

05,10

## К аналитической теории магнитных скирмионов высокого порядка в неоднородном магнитном поле

© М.С. Шустин<sup>1</sup>, Д.М. Дзедзисашвили<sup>1</sup>, В.А. Степаненко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт физики им. Л.В. Киренского ФИЦ КНЦ СО РАН, Красноярск, Россия

<sup>2</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

E-mail: mshustin@yandex.ru

Поступила в Редакцию 17 апреля 2023 г.

В окончательной редакции 17 апреля 2023 г.

Принята к публикации 11 мая 2023 г.

Показано, что аксиально-симметричные неоднородные магнитные поля могут приводить к стабилизации магнитных скирмионов высокого порядка с значениями топологического заряда  $|Q| > 1$  за счет орбитальных эффектов. Проведено аналитическое описание эволюции характеристик таких скирмионов: энергии, размеров и ширины доменных стенок в неоднородных полях со степенным пространственным профилем, при параметрах, отвечающих сильно коррелированным электронным системам. Полученные результаты могут иметь приложения при описании формирования нетривиальных магнитных структур в неоднородных полях сверхпроводящих вихрей в гетероструктурах сверхпроводник — киральный магнетик типа  $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1]^{10}/\text{MgO}/\text{Nb}$ .

**Ключевые слова:** магнитные скирмионы, неоднородные магнитные поля, сверхпроводящие вихри.

DOI: 10.21883/FTT.2023.06.55660.41Н

### 1. Введение

Скирмионы представляют собой топологически нетривиальные полевые конфигурации, являющиеся решениями нелинейных дифференциальных уравнений физики. Изначально такие решения были рассмотрены Скирмом в ядерной физике для барионного поля [1,2]. В дальнейшем аналогичные распределения поля  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  были найдены в магнитных системах [3–8]. Так, в 2D-случае для магнитной конфигурации скирмиона, определяемой классическим полем,  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ , можно ввести понятие топологического заряда [9]:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \mathbf{m} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right] \right) dx dy, \quad (1)$$

такого, что структуры с различным значением  $Q$  не могут перейти друг в друга без преодоления энергетического барьера: бесконечного в континуальном приближении (если  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  — непрерывная функция), и конечного при учете дискретности распределения магнитных моментов. Геометрический смысл  $Q$  состоит в том, сколько раз вектор  $\mathbf{m}$  совершает „прокруток“ при отображении  $S^2 \rightarrow S^2$ . Очевидно, что для однородного магнитного состояния  $Q = 0$ , тогда как для МС  $Q = \pm 1$  (см. ниже). Описанное обуславливает т.н. топологическую защищенность скирмионных состояний и обуславливает интерес к таким структурам, как к перспективным объектам для создания устройств логики и магнитной памяти нового поколения [10–14].

До недавнего времени основная доля исследований топологических магнитных структур была посвящена изучению 2D-МС с  $|Q| = 1$ . Однако, в последние годы усилился интерес к более экзотическим магнитным возбуждениям, таким, например, как: скирмионумы, скирмионные мешки и т.д. [15–21]. В настоящей работе мы будем исследовать т.н. 2D-магнитные скирмионы высокого порядка (МСВП), у которых азимутальный угол намагниченности (vorticity)  $\phi = n\varphi$ , где  $\varphi$  — угол полярной системы координат в плоскости пленки. При этом  $|n| > 1$ , отвечает ситуации  $|Q| = |n| > 1$ . В настоящее время МСВП исследованы значительно слабее по сравнению с МС. Это связано с тем, что стабилизирующее взаимодействие Дзялошинского–Мории не дает вклада в энергию МСВП. Учитывая это, было предложено несколько моделей, в которых МСВП возникали за счет фрустрированного обменного взаимодействия [15–17]. Однако, такой механизм требует тонкого подбора магнитных материалов и не обладает необходимой гибкостью для изменения характеристик МСВП, пригодной для практических применений.

В недавней работе мы предложили новый механизм формирования 2D-МСВП, основанный на влиянии орбитальных эффектов неоднородного магнитного поля [22]. С магнитной точки зрения влияние орбитальных эффектов магнитного поля сказывается в возникновении т.н. скалярного кирального или трехспинового взаимодействия [23–29], которое в случае однородного поля пропорционально плотности топологического заряда магнитной конфигурации, а в неоднородных полях может

приводить к новым структурам [22]. При этом мы заметили, что в сильно коррелированных электронных системах вклад от скалярного кирального взаимодействия в энергию стабилизации МС с  $n = 1$  может быть сравним с вкладом взаимодействия Дзялошинского–Мории для простых скирмионов. В случае МСВП с  $n > 1$  вклад взаимодействия Дзялошинского–Мории равен нулю и магнитные нетривиальные состояния стабилизируются за счет скалярного кирального взаимодействия.

Важно отметить, что исследование магнитных скирмионов в неоднородных магнитных полях в настоящее время приобрело дополнительную актуальность в контексте изучения связанных состояний магнитный скирмион — сверхпроводящий вихрь (СВ) [30–36]. Так, недавно было экспериментально обнаружено, что такие пары, МС–СВ, могут сформировать устойчивые состояния в гетероструктурах  $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1]^{10}/\text{MgO}/\text{Nb}$  [33]. При этом теоретически было показано, что одним из факторов стабилизации аксиально-симметричной структуры МС–СВ могут быть неоднородные поля сверхпроводящего вихря [34–36]. В последнем случае может реализоваться изучаемая в настоящей работе ситуация МСВП в аксиально-симметричном магнитном поле. Сами связанные состояния МС (МСВП)–СВ могут приводить к локализации на скирмионах майорановских мод, перспективных в области квантовых вычислений [37–39].

Учитывая сказанное, видится актуальным изучение условий реализации и базовых характеристик МСВП (энергия, радиус, ширина доменной стенки и топологический заряд) в аксиально-симметричных неоднородных магнитных полях с различными радиальными профилями магнитного поля  $B(r)$ . В последней работе мы такой анализ проводили в рамках вариационного подхода аналитически для частных случаев  $B(r) \sim r$ ,  $1/r$  [22]. В настоящей работе мы проводим обобщение аналитической теории, позволяющей описывать МСВП в полях с произвольными степенными зависимостями поля  $B(r) \sim r^\beta$  (произвольные  $\beta$ ). Важным аспектом построения теории является использование иерархии магнитных энергетических параметров, отвечающей сильно коррелированным электронным системам. Для решения вариационных уравнений мы использовали математический аппарат теории функций многих комплексных переменных [40,41]. Это позволило на аналитическом уровне описать нетривиальные зависимости размеров МСВП от напряженности приложенного магнитного поля, и обнаружить нетривиальную картину конкуренции орбитальных и зеемановских эффектов магнитного поля при стабилизации таких структур. Найденные эффекты могут быть полезными при экспериментальном или численном поиске МСВП. Более того, мы считаем, что предложенный подход аналитического описания МСВП может быть применен при изучении других магнитных возбуждений, таких как: скирмиониумы, бимероны, скирмионные мешки и т. д.

## 2. Энергетический функционал и условия реализации МСВП в неоднородных полях

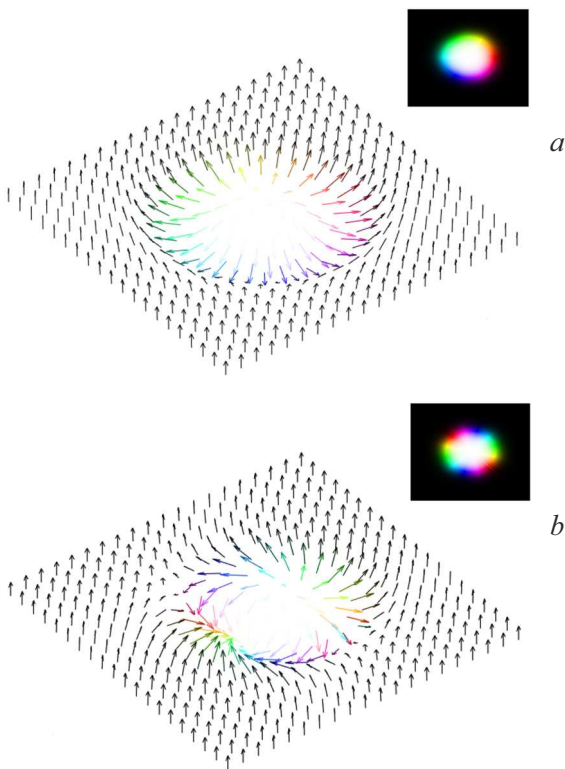
Условия формирования МСВП будем исследовать в рамках следующего энергетического функционала, описывающего энергию магнитной системы

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle f, g \rangle} \mathcal{J} \cdot \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{S}_g + \sum_{\langle f, g, l \rangle \in \Delta} \mathcal{K} \cdot \mathbf{S}_f \cdot [\mathbf{S}_g \times \mathbf{S}_l] - \mathcal{B} \sum_f S_f^z - \mathcal{A} \sum_f (S_f^z)^2. \quad (2)$$

Первое слагаемое правой части описывают обменное взаимодействие между узлами  $f$  и  $g$ , являющимися ближайшими соседями (символ  $\langle f, g \rangle$ ), с амплитудой  $\mathcal{J} > 0$ . Второе слагаемое описывает трехспиновое взаимодействие между тремя ближайшими узлами  $f$ ,  $g$  и  $h$  с амплитудой  $\mathcal{K}$ . Параметр  $\mathcal{A} > 0$  описывает одноионную анизотропию типа „легкая ось“,  $\mathcal{B}$  — выраженная в энергетических единицах напряженность внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси  $z$ . При этом ось  $z$  полагается ортогональной 2D-плоскости системы, в которой локализованы моменты  $\mathbf{S}_f$ , считающиеся классическими трехкомпонентными векторами. Описанные взаимодействия являются конкурирующими: обменное ( $\mathcal{J}$ ), анизотропное ( $\mathcal{A}$ ) и зеемановское ( $\mathcal{B}$ ) взаимодействия формируют тенденцию магнитных моментов выстраиваться коллинеарно друг относительно друга и оси  $z$ , тогда как скалярное киральное взаимодействие стремится сформировать неколлинеарные магнитные конфигурации. Тип магнитных структур и возбуждений определяется соотношением амплитуд этих параметров. В настоящей работе мы будем использовать следующую иерархию параметров

$$\mathcal{J} \gg \mathcal{K} \gg \mathcal{A}, \mathcal{B}, \quad (3)$$

которая имеет место при рассмотрении слоистых сильно коррелированных систем [22–28]. Важно отметить, что микроскопическое происхождение скалярного кирального взаимодействия связано с орбитальными эффектами магнитного поля. В континуальном приближении можно считать, что амплитуда такого взаимодействия  $\mathcal{K}$  повторяет профиль внешнего магнитного поля:  $\mathcal{K}(r) \sim \mathcal{B}(r)$ . В случае однородного поля,  $\mathcal{B}(r) = \text{const}$ , вклад скалярного кирального взаимодействия пропорционален топологическому заряду  $Q$  и не может приводить к новым магнитным конфигурациям. Ниже мы покажем, что учет неоднородности внешнего магнитного поля приводит к тому, что скалярное киральное взаимодействие может стабилизировать как простые МС с  $n = 1$ , так и МСВП с  $n > 1$ . Отметим также, что функционал (2) не включает в себя векторного кирального взаимодействия, или взаимодействия Дзялошинского–Мории, которое стандартно используется при описании МС. Легко показать, однако,



**Рис. 1.** Пространственные профили: *a*) МС с  $n = 1$ , *b*) МСВП с  $n = 2$ . На вставках справа приведена визуализация профилей с помощью цветовой схемы, используемой ниже. Черному и белому цвету отвечают направления с  $m_z = \pm 1$ , соответственно. В случае  $m_z \neq 1$  цвет отвечает направлению проекции поля намагниченности  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  на плоскость ХоУ. Если:  $\{m_x, m_y\} = \{1, 0\}$ , то цвет — красный;  $\{m_x, m_y\} = \{\cos 2\pi/3, \sin 2\pi/3\}$  — зеленый;  $\{m_x, m_y\} = \{\cos 4\pi/3, \sin 4\pi/3\}$  — синий. Для наглядности профили  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  представлены в том же цветовом коде.

что учет взаимодействия Дзялошинского–Мории приведет к изменению результатов предсказываемой теории только для случаев МС с  $n = 1$  и никак не скажется на результатах для случаев МСВП с  $n > 1$  [22]. Таким образом, ниже единственным механизмом формирования МС и МСВП будут выступать орбитальные эффекты неоднородного магнитного поля.

Вопрос о стабилизации МСВП в неоднородном поле будем рассматривать в рамках вариационного подхода для континуальной версии классического функционала (2). В качестве пробной функции, описывающей формирование МСВП, будем рассматривать двухпараметрический анзац [42]:

$$m_x = \sin \Theta \cos n\varphi; \quad m_y = \sin \Theta \sin n\varphi; \quad m_z = \cos \Theta;$$

$$\Theta(r, R, w) = 2 \arctan \left( \frac{\cosh(R/w)}{\sinh(r/w)} \right) \sim 2 \arctan \left( e^{(R-r)/w} \right) + 2 \arctan \left( e^{(-R-r)/w} \right).$$

Такая параметризация имеет смысл аксиально симметричной 1D доменной стенки, где  $w$  — ширина,  $R$  — расстояние от центра скирмиона до ее середины. Все расстояния будем определять в единицах межатомных расстояний —  $a$ . Индекс кручений („vorticity“)  $n$  для скирмионов полагается по модулю большим нуля, при этом  $|n| = |Q|$ . Визуализация пространственных профилей МС с  $n = 1$  и МСВП с  $n = 2$ , построенные с использованием (4) приведена на рис. 1. Далее, будем предполагать, что ось вращения аксиально симметричного профиля магнитного поля проходит через центр скирмиона (точка  $r = 0$ ) перпендикулярно плоскости пленки. Также будем считать, что среди (мета-) стабильных конфигураций функционала (2) реализуются скирмионы с узкой доменной стенкой,  $R \gg w$ . Это предположение оправдывается дальнейшими вычислениями. В таком предположении запишем приближенно

$$\Theta(r, R, w) \cong 2 \arctan \left( e^{(R-r)/w} \right). \quad (4)$$

Заметим, что для профиля (4) выполняются соотношения

$$\frac{d\Theta}{dr} = -2f(r - R); \quad \sin \Theta = 2wf(r - R);$$

$$1 - \cos \Theta = 2n_F \left( \frac{r - R}{w} \right), \quad (5)$$

где  $n_F \left( \frac{r-R}{w} \right)$  — функция Ферми–Дирака, а функция  $f(r - R)$  имеет вид

$$f(r - R) = \frac{1}{R} \frac{R}{w} \frac{e^{(r-R)/w}}{1 + e^{2(r-R)/w}}.$$

При  $R/w \gg 1$  функция  $f(r - R)$  локализована в окрестности точки  $r = R$ , симметрична и имеет постоянную площадь. То же справедливо и для  $f^2(r - R)$ . Значит в пределе  $R/w \rightarrow \infty$  их можно аппроксимировать дельта-функциями

$$\lim_{R/w \rightarrow \infty} f(r - R) \rightarrow \frac{\pi}{2} \delta(r - R),$$

$$\lim_{R/w \rightarrow \infty} f^2(r - R) \rightarrow \frac{1}{2w} \delta(r - R). \quad (6)$$

Наконец, сделаем предположение о функциональной зависимости аксиально-симметричного профиля внешнего магнитного поля: будем считать, что она описывается кусочной функцией следующего вида:

$$\mathcal{B}(r) = \begin{cases} 0, & r < \delta r \ll 1 \\ r^\beta, & r \geq \delta r, \quad \beta \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (7)$$

при этом условие на равенство нулю напряженности магнитного поля при  $r < \delta r$  позволяет рассматривать профили с  $\beta < 0$ . Тогда, переходя стандартным образом

к континуальному описанию, найдем приближенные зависимости парциальных вкладов в энергетический функционал МСВП от его параметров

$$E_J = \frac{J}{2} \int_0^\infty \left[ \left( \frac{d\Theta}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \Theta}{r^2} \right] r dr \cong J (\rho + n^2 \rho^{-1}), \quad (8)$$

$$E_A = \frac{A}{2} \int_0^\infty \sin^2 \Theta r dr \cong A \rho w^2 \quad (9)$$

$$E_K = \frac{Kn}{2} \int_0^\infty r^\beta \sin \Theta \frac{d\Theta}{dr} dr \cong -Kn \rho^\beta w^\beta, \quad (10)$$

$$E_Z = \frac{H}{2} \int_0^\infty r^\beta (1 - \cos \Theta) r dr \cong -H \left( \frac{w}{2} \right)^{\beta+2} \Gamma_{\beta+2} \text{Li}_{\beta+2}(\delta r, -e^{2\rho}). \quad (11)$$

Здесь, в правых частях была введена переменная  $\rho = R/w$  и везде предполагается, что  $\rho, w \gg 1$ . При вычислении правых частей выражений (8)–(11) использовались соотношения (4)–(6). При этом была использована интегральная связь фермиевской функции  $n_F(r/w - \rho) \sim 1 - \cos \Theta$  и неполного полилогарифма  $\text{Li}_{\beta+2}(\delta r, -e^{2\rho})$ :

$$\begin{aligned} \text{Li}_\beta(\delta r, -e^{2\rho}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2k\rho}}{k^\beta} \frac{\Gamma(\beta, k\delta r)}{\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{-1}{\Gamma_\beta} \int_{\delta r}^{\infty} \frac{t^{\beta-1} dt}{e^{t-2\rho} + 1}, \end{aligned} \quad (12)$$

в которой использовалось определение неполной гамма-функции с переменным нижним пределом

$$\Gamma(\beta, k\delta r) = \int_{k\delta r}^{\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt. \quad (13)$$

Очевидно, что при  $\delta r = 0$  неполный полилогарифм сводится к стандартному полилогарифму,  $\text{Li}_{\beta+2}(\delta r = 0, -e^{2\rho}) = \text{Li}_{\beta+2}(-e^{2\rho})$ . Энергетические параметры  $J, A, K$  и  $H$  в (8)–(11) пропорциональны параметрам  $\mathcal{J}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$  и  $\mathcal{B}$  в (2) соответственно. Коэффициенты пропорциональности зависят от геометрии и параметров решетки, а также от величин спинов магнетоактивных ионов. В настоящей работе мы будем рассматривать параметры в (8)–(11), как свободные, однако будем использовать иерархию

$$J \gg K \gg A, H, \quad (14)$$

проистекающую из описанной выше иерархии (3). Учитывая вышесказанное, зависимость энергии возбуждения

от размеров МСВП можно записать в виде

$$E = E_J + E_K + E_A + E_Z = J (\rho + n^2 \rho^{-1}) - Kn \rho^\beta w^\beta + A \rho w^2 - H \left( \frac{w}{2} \right)^{\beta+2} \Gamma_{\beta+2} \text{Li}_{\beta+2}(\delta r, -e^{2\rho}). \quad (15)$$

Минимизация функционала (15) требует решения системы нелинейных уравнений относительно  $\rho$  и  $w$ . Аналитический поиск такого решения в общем виде представляется сложной математической задачей. Однако, учет иерархии энергетических параметров (14) делает возможным провести качественное, но упрощенное описание системы, позволяющее развить аналитическую теорию МСВП. Так, учет в (15) только слагаемого с параметром  $J$  приводит к возникновению в плоскости  $(\rho, w)$  линии,  $\rho = n$ , вырожденных локальных минимумов. Поскольку  $J$  — самый большой энергетический параметр, рассмотрим поведение функционала (15) вдоль данной линии

$$E \rightarrow \tilde{E}(w) = E(w, \rho = n). \quad (16)$$

В таком приближении поиск локального минимума, отвечающего МСВП, сводится к поиску минимума для функции одной переменной  $\tilde{E}(w)$ . Возможность такого описания продемонстрирована на рис. 2. Тогда оценка характерных размеров МСВП требует решения уравнения (при условии  $w \gg 1$  и  $d^2 \tilde{E}/dw^2 > 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{d\tilde{E}}{dw} &= 2An - Kn \beta n^{\beta+1} w^{\beta-2} \\ &- H \frac{\beta+2}{2^{\beta+1}} \Gamma_{\beta+2} \text{Li}_{\beta+2}(\delta r, -e^{2n}) w^\beta = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение уравнения (17) при  $H \neq 0$  будет описано в следующем параграфе. Здесь мы кратко остановимся на свойствах МСВП, когда только орбитальные эффекты поля имеют место. Такая ситуация может реализоваться либо в случае нулевых значений  $g$ -факторов магнетоактивных ионов. Тогда, легко показать, что размеры скирмионов высокого порядка определяются выражениями

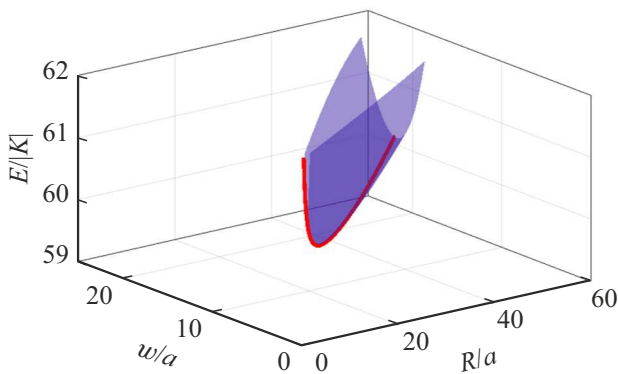
$$w_* = \left( \frac{Kn^\beta}{2A} \right)^{\frac{1}{2-\beta}}, \quad R_* = nw_*,$$

$$\beta < 2; \quad \text{sign}(Kn^\beta) = \text{sign}(\beta A); \quad \text{sign}(An) > 0. \quad (18)$$

В частности, в физически интересном случае, когда скирмион находится в поле сверхпроводящего пирловского вихря можно приближенно считать, что  $B(r) = 1/r$  ( $\beta = -1$ ) [30–32], приведенные соотношения имеют вид

$$w_* = \sqrt[3]{\frac{|K|}{2An}}; \quad R_* = nw_*; \quad K < 0.$$

Поскольку знак константы  $K$  определяется знаком потока магнитного поля, формирование МСВП за счет



**Рис. 2.** Участок энергетической поверхности функционала  $E(R, w)$  (16) с  $n = 3$  в переменных  $R = \rho w$  и  $w$ . Толстая линия — поведение функционала  $\tilde{E}(w)$  (18) вдоль линии  $R = nw$ . Видно, что точки минимумов  $E(R, w)$  и  $\tilde{E}(w)$  совпадают, а потому для их поиска можно использовать упрощенное описание с помощью функции одной переменной  $\tilde{E}(w)$ . Энергетические параметры выбраны следующими:  $J = 10, K = -1, H = -0.006, A = 0.001$ .

орбитальных эффектов неоднородного поля возможно только при определенном направлении последнего. Так, из (18) видно, что в случае „возрастающих“ полей ( $\beta > 0$ ) внешнее поле должно быть сонаправлено направлению магнитного момента ферромагнитной пленки. В случае же „убывающих“ полей ( $\beta < 0$ ) ситуация становится обратной и для формирования МСВП необходимо приложить внешнее поле противоположно направлению исходной намагниченности пленки. Ниже мы покажем, что качественно эти особенности сохраняются и при учете зеемановских эффектов магнитного поля.

### 3. Аналитическое описание МСВП при $H \neq 0$

Перейдем к описанию условий стабилизации МСВП при совместном учете зеемановских и орбитальных вкладов магнитного поля в энергию 2D-магнитной подсистемы. В первую очередь рассмотрим качественные аспекты конкуренции слагаемых в (17) при  $H \neq 0$ . С этой целью удобно рассмотреть отдельно поведение уравнения (17) для положительных,  $\beta > 0$ , и отрицательных,  $\beta = -\alpha < 0$ , степенях профиля поля  $\mathcal{B}(r)$ . Для рассмотрения последних введем новую переменную  $m = 1/w$ . Тогда уравнения на минимум функционала примут вид

$$\frac{1}{w} \frac{d\tilde{E}}{dw} = -K\beta n^{\beta+1} w^{\beta-2} + H(2 + \beta)v_{\beta} w^{\beta} + 2An = 0; \quad \beta > 0 \quad (19)$$

$$m^3 \frac{d\tilde{E}}{dm} = -Kan^{1-\alpha} m^{\alpha+2} - H(2 - \alpha)v_{\alpha} m^{\alpha} - 2An = 0; \quad \alpha > 0. \quad (20)$$

Здесь фигурируют параметры

$$v_{\beta} = -\frac{\Gamma_{2+\beta}}{2^{1+\beta}} \text{Li}_{2+\beta}(\delta r, -e^{2n}) > 0, \\ v_{\alpha} = -\frac{\Gamma_{2-\alpha}}{2^{1-\alpha}} \text{Li}_{2-\alpha}(\delta r, -e^{2n}) > 0. \quad (21)$$

На решения  $w_*$  и  $m_*$  уравнений (19) и (20) необходимо наложить условия минимизации функционала, а также ограничить диапазон их значений исходя из используемых ранее предположений об узости доменной стенки МСВП

$$\left. \frac{d^2\tilde{E}}{dw^2} \right|_{w=w_*} > 0; \quad w_* \gg 1; \quad \left. \frac{d^2\tilde{E}}{dm^2} \right|_{m=m_*} > 0; \quad 0 < m_* \ll 1.$$

Это значит, что правые части уравнений (19) и (20) должны пересекать ноль, меняя знак с отрицательного на положительный, как функции  $w$  и  $m$ , соответственно. Для уравнения (19) такое решение достигается, если  $\text{sign}(K) = \text{sign}(H) = 1$ . В этом случае, при достаточно малых  $w$  доминирует второе слагаемое правой части (17), поскольку  $Kw^{\beta-2} \gg Hw^{\beta}$ . При достаточно больших  $w$  неравенство становится обратным, и функция  $d\tilde{E}/dw$  меняет знак в точке  $w_* \gg 1$ . При этом, большие значения  $w_*$  связаны с условием  $K \gg H$ . Таким образом, учет зеемановских эффектов взаимодействия скирмиона с „возрастающим“ магнитным полем ( $\beta > 0$ ) приводит к тому, что условия формирования МСВП перестают быть ограничены условиями  $\beta < 2$ , как это имело место при рассмотрении только орбитальных эффектов магнитного поля (см. уравнение (18)).

В случае „спадающих“ магнитных полей,  $\alpha > 0$ , особенности конкуренции орбитальных ( $K$ ) и зеемановских ( $H$ ) эффектов магнитного поля в выражении (20) различаются в случае  $\alpha < 2$  и  $\alpha \geq 2$ . В случае  $\alpha < 2$  параметр  $v_{\alpha} \sim n^{2-\alpha}$  а потому в актуальной области поиска решений имеем

$$|Kan^{1-\alpha} m^{\alpha+2}| \sim |H(2 - \alpha)v_{\alpha} m^{\alpha}|;$$

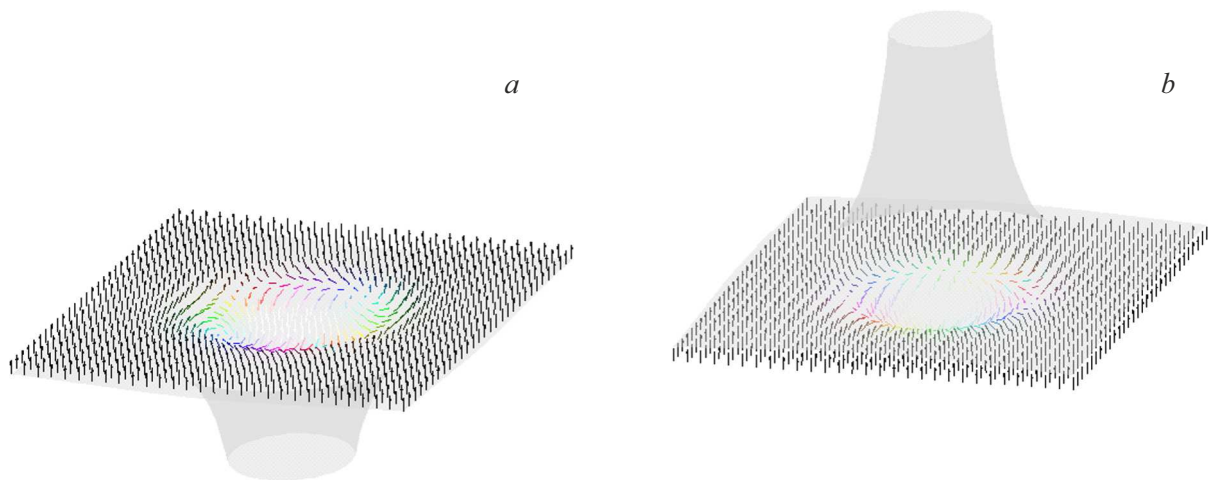
$$0 < m \ll 1; \quad 0 < \alpha < 2.$$

Последнее означает, что поиск физических решений  $m_* \ll 1$  более предпочтителен, если константы  $K$  и  $H$  одного знака. Более того, поскольку при  $m = 0$  правая часть уравнения (20) равна  $-2An$  то оптимальный способ найти физическое решение, отвечающее минимуму МСВП состоит в выполнении соотношений

$$\text{sign}(An) = 1, \quad \text{sign}(K) = \text{sign}(H) = -1.$$

Таким образом, в случае „умеренно убывающих“ полей (7) с  $-2 < \beta < 0$  реализация МСВП также принципиально возможна. Однако, в отличие от случая  $\beta > 0$ , внешнее магнитное поле должно быть приложено противоположно направлению ферромагнитного упорядочения изначально намагниченной пленки.

Примеры устойчивых и неустойчивых конфигураций МСВП с  $n = 2$  и профилем поля  $\mathcal{B}(r) = 1/r$  ( $\alpha = 1$ )



**Рис. 3.** Визуализация пространственных профилей МСВП в неоднородном „линейно убывающем“ поле  $B(R) = 1/r$  ( $\beta = -1$ ). Случаи *a*) и *b*) отвечают ситуациям, когда поле приложено вдоль и противоположно намагниченности насыщения пленки: такие конфигурации являются устойчивыми и неустойчивыми, соответственно.

приведены на рис. 3. Так, на рис. 3, *a* приведена устойчивая конфигурация, при которой магнитное поле направлено противоположно вектору намагниченности пленки вне области локализации МСВП, отвечая соотношениям (27). На рис. 3, *b* приведена аналогичная, но неустойчивая конфигурация, при которой поле направлено вдоль намагниченности насыщения пленки. Причина такого различия связана с тем, что в случае *a* зеемановский вклад в энергию возбуждения МСВП  $E_Z < 0$  и стабилизирует нетривиальную конфигурацию, поскольку вблизи ядра скирмиона напряженность поля максимальная и моменты ориентированы вдоль поля. В случае *b* зеемановский вклад приводит к дестабилизации МСВП из-за положительности  $E_Z$ .

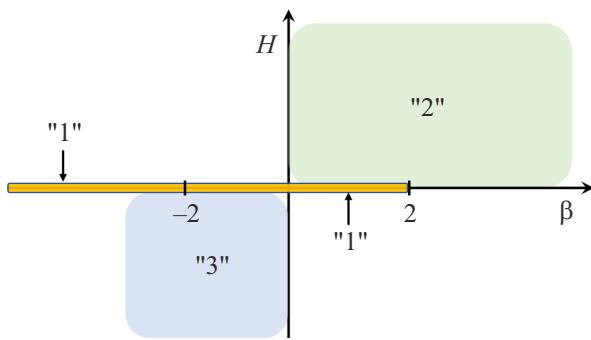
В случае достаточно быстро спадающих полей,  $\alpha > 2$ , парциальный вклад от зеемановского слагаемого в уравнение (20) увеличивается по сравнению с орбитальным вкладом: функция  $v_\alpha$  возрастает с ростом  $\alpha$ . Более того, изменяется знак зеемановского слагаемого по сравнению со случаем  $\alpha < 2$ . Это приводит к тому, что в случае  $\alpha \gg 1$  стабилизация МСВП также возможна, причем преимущественно за счет зеемановских эффектов магнитного поля, направление которого может быть сонаправлено направлению намагниченности пленки.

Учитывая вышесказанное, качественные аспекты конкуренции различных энергетических вкладов при формировании устойчивых МСВП с резкой доменной стенкой можно обобщить с помощью приведенной на рис. 4 диаграммы устойчивости. При ее построении считалось, что реализуется иерархия энергетических параметров (15), отвечающая сильно коррелированным электронным системам. Кроме того, поскольку параметры  $K$  и  $H$  описывают орбитальные и зеемановские вклады в энергию взаимодействия возбуждения с магнитным полем, соответственно, мы считали, что  $\text{sign}(K) = \text{sign}(H)$ . Область на рис. 4, отмеченная

как „1“ отвечает условию, когда только орбитальные эффекты магнитного поля дают вклад в энергию МСВП:  $H = 0$ . В этом случае, как было сказано в конце разд. 2 МСВП формируются при условии  $\beta < 2$  и иных соотношениях на материальные параметры, приведенных в (20). Область, обозначенная цифрой „2“ отвечает возрастающим магнитным полям при учете зеемановских эффектов магнитного поля. Как говорилось выше (см. обсуждение под формулой (25)), в этом случае особенности конкуренции орбитальных и зеемановских эффектов магнитного поля такие, что МСВП с резкой доменной стенкой могут возникать практически при всех степенях поля и напряженностях  $H$ . Последнее условно отмечено тем, что область „2“ занимает почти весь первый квадрант координатных осей на рис. 4. Область „3“ на рис. 4 отвечает ситуации спадающих магнитных полей ( $\beta < 0$ ), имеющих максимум вблизи центра МСВП. В этом случае для стабилизации МСВП приложенное внешнее магнитное поле должно быть отрицательно, т.е. направлено противоположно намагниченности насыщения пленки. Более того, если мы считаем, что  $\text{sign}(K) = \text{sign}(H)$ , то из сказанного выше следует, что с достоверностью МСВП в убывающих полях будут стабилизироваться если  $-2 < \beta < 0$ . Если же  $\beta < -2$ , то из уравнения (23) следует, что зеемановский и орбитальные вклады станут конкурирующими и стабилизация МСВП станет более проблематичной, в случае  $-2\beta \gg 2$  невозможной. Такая особенность качественно отмечена на рис. 4 тем, что закрашенная область „3“ занимает неполный третий квадрант переменных  $\beta, H$ .

Обсудив качественные эффекты конкуренции различных энергетических вкладов в уравнения (19) и (20), перейдем к нахождению решений этих уравнений. Будем исследовать случай „спадающих“ полей, т.е. решать уравнение (20). При этом уравнение для „возрастающих“ полей (19) может быть рассмотрено аналогично.





**Рис. 4.** Качественная диаграмма устойчивости МСВП в переменных: степень профиля магнитного поля  $\beta$  (см. уравнение (6)), амплитуда  $H$  приложенного внешнего магнитного поля на расстоянии  $r = a$  от центра скирмиона. Считается, что реализуется иерархия энергетических параметров (15) и  $\text{sign}(H) = \text{sign}(K)$ . Области, отмеченные цифрами „1“, „2“ и „3“ отвечают областям устойчивости МСВП и описываются соотношениями: (20);  $H > 0, \beta > 0$ ; (27) соответственно. При этом, в последнем случае считается, что  $\beta$  не много меньше, чем  $-2$ .

Рассмотрим сначала наиболее простой случай  $\alpha = 1$ . Он отвечает радиальному спадаанию магнитного поля по закону  $\mathcal{B}(r) = 1/r$ , что реализуется, например, в поле сверхпроводящего вихря. В этом случае уравнение (20) на оптимальный размер скирмиона высокого порядка сводится к виду

$$Km^3 + 2Hnm + 2An = 0. \tag{22}$$

Из этого уравнения легко находится аналитическое выражение на ширину доменной стенки МСВП:

$$w_* = \frac{u^{1/3}}{u^{2/3} - Hn/3K};$$

$$u = \left| \frac{An}{K} \right| \left( \sqrt{1 + \left( \frac{H}{3} \right)^3 \frac{An}{K}} - \text{sign} \left( \frac{An}{K} \right) \right).$$

Примеры поведения функции  $w_*$  (23) и  $R_* = w_*n$  представлены на рис. 2 как функции напряженности приложенного внешнего магнитного поля  $|H|$  для МСВП с различными топологическими зарядами  $n$ . Видно, что ширина доменной стенки увеличивается с увеличением  $|H|$  и уменьшается с увеличением  $n$ . При этом оптимальный радиус МСВП увеличивается как функция и  $|H|$ , и  $n$ .

На практике может быть полезным представить решение уравнения (22) в виде ряда по малому параметру. В случае рассматриваемой в настоящей работе иерархии (14) такое разложение можно записать в виде [43]:

$$m_* = \frac{1}{w_*} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-2j}{3}\right)} \left( \frac{H}{\sqrt[3]{KA^2/2n}} \right)^j. \tag{24}$$

В общем случае (произвольные  $\alpha$ ) решение уравнение (20) не может быть найдено в радикалах. Однако, аналогично (24), его можно выразить в виде ряда по параметрам уравнения. С этой целью рассмотрим случай, когда степень спадаания поля представима в виде рациональной дроби  $\alpha = p/q$  ( $p, q > 0$ ). Данное предположение является достаточно общим, поскольку иррациональные  $\alpha$  можно приблизить рациональными дробями с произвольной наперед заданной точностью. Тогда, уравнение (20) можно представить в виде

$$a = l^p \cdot (1 + hl^{2q}), \tag{25}$$

где

$$l = m^{1/q}, \quad a = \frac{-2An}{H(2-\alpha)v_\alpha}, \quad h = \frac{K\alpha n^{1-\alpha}}{H(2-\alpha)v_\alpha}, \quad \alpha = p/q.$$

Уравнение вида (25) можно разрешить с использованием формулы [40,41]:

$$l = a^{1/p} + \sum_{\gamma=2}^{\infty} A_\gamma a^{\gamma/p};$$

$$A_\gamma = \frac{1}{\gamma!} \mathcal{D}^\gamma \left( \frac{l}{(1 + h \cdot l^{2q})^{(q+1)/p}} \left( l (1 + h \cdot l^{2q})^{1/p} \right)' \right) \Big|_{l=0}, \tag{26}$$

где посредством  $\mathcal{D}^\gamma$  обозначен оператор дифференцирования кратности  $\gamma$  по переменной  $l$ . Тогда, вспоминая, что  $l = m^{1/q}$  и возводя ряд в выражении (26) в степень  $q$ , получим выражение для обратной ширины доменной стенки при произвольном рациональном  $\alpha = p/q$ :

$$m_* = \sum_{k=q}^{\infty} B_k a^{k/p};$$

$$B_k = \sum_{\substack{q=\gamma_1+\dots+\gamma_k \\ \{k=1-\gamma_1+\dots+(k-q+1)-\gamma_{k-q+1}\}}} \frac{q!}{\gamma_1! \dots \gamma_{k-q+1}!} A_1^{\gamma_1} \dots A_{k-q+1}^{\gamma_{k-q+1}}. \tag{27}$$

Функции  $A_\gamma$  могут быть вычислены с помощью формулы бинома Ньютона

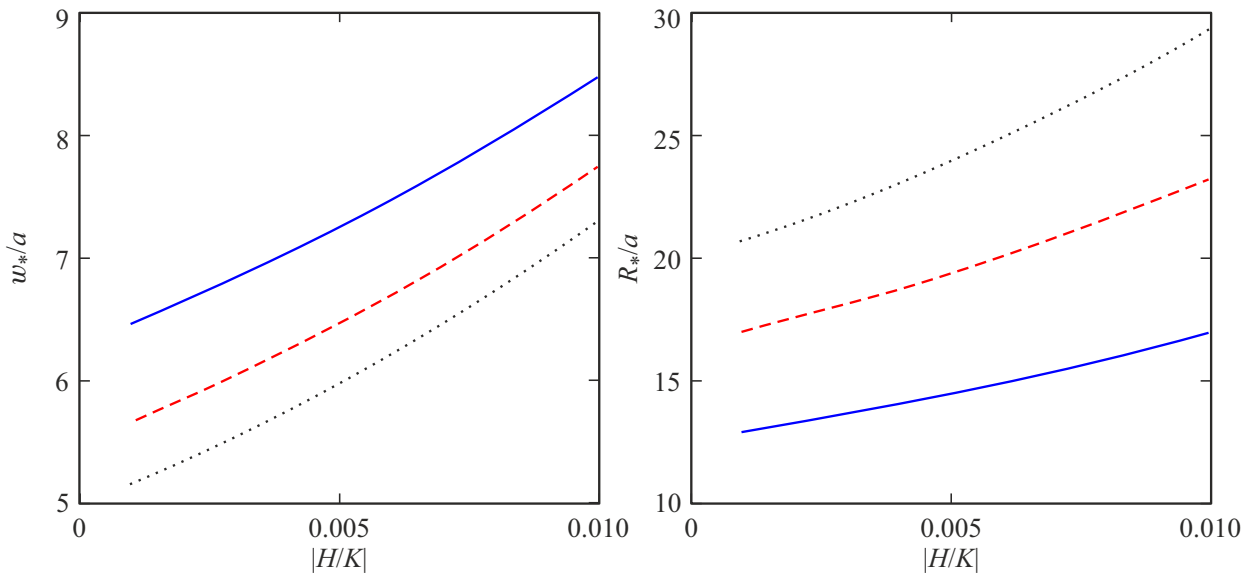
$$\frac{\mathcal{D}^\gamma (F \cdot G_\gamma)}{\gamma!} \Big|_{l=0} = \sum_{k=0}^{\gamma} \frac{1}{k!(\gamma-k)!} \left[ \frac{d^k F(l)}{dl^k} \cdot \frac{d^{\gamma-k} G_\gamma(l)}{dl^{\gamma-k}} \right] \Big|_{l=0},$$

где функции

$$F(l) = l \left( l (1 + h \cdot l^{2q})^{1/p} \right)'_l,$$

$$G_\gamma(l) = (1 + h \cdot l^{2q})^{-(\gamma+1)/p}$$

фигурируют в выражении (26). Вычисление производной  $n$ -го порядка от сложной функции  $G_k = g^{-k}$ , где



**Рис. 5.** Зависимости оптимальной ширины доменной стенки  $w_*$  (слева) и радиуса  $R_*$  (справа) от напряженности внешнего магнитного поля при  $\beta = -\alpha = -1$ . Параметры системы такие же, что на рис. 1. Сплошная кривая, пунктир и точки отвечают МСВП с  $n = 2, 3, 4$  соответственно.

$g = 1 + h \cdot l^{2q}$  и  $\kappa = (\gamma + 1)/\rho$  может быть вычислена с использованием формулы Фаа-ди-Бруно:

$$\frac{d^n G_\kappa}{dl^n} = \sum_{k=1}^n \sum_{\{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k\}} \frac{n!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \times \left(\frac{d^k g^{-\kappa}}{d\kappa^k}\right) \left(\frac{1}{l!} \frac{dg}{dl}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dl^n}\right)^{\alpha_n}, \quad (28)$$

чем завершается нахождение решения уравнения (19) при рациональных  $\alpha$ .

Наконец, заметим, что найденные решения (24) и (27), записанные в виде ряда по параметрам уравнения (20), описывают обратную ширину доменной стенки МСВП,  $m_* = 1/w_*$ . В то же время может оказаться полезным представление в виде аналогичных разложений самих функций  $w_*$ . С этой целью приведем здесь полезную формулу, позволяющую получить коэффициенты разложения обратного по умножению ряда к исходному, заданному ряду. Пусть имеется исходный ряд

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

с известными коэффициентами  $b_0, b_1$  и т.д. Тогда нахождение обратного по умножению ряда

$$\frac{1}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots,$$

требует нахождения коэффициентов  $c_0, c_1$  и т.д. Можно показать, что последние могут быть найдены с исполь-

зованием следующих соотношений:

$$c_0 = \frac{1}{b_0}, \quad c_k = \frac{(-1)^k}{b_0^{k+1}} \Delta_k,$$

где посредством  $\Delta_k$  обозначены детерминанты от матриц, составленных из коэффициентов исходного ряда, следующего вида:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & \dots & b_{k-1} & b_k \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_{k-2} & b_{k-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_{k-3} & b_{k-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & \dots & b_{k-4} & b_{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b_{k-5} & b_{k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Тогда, выбирая в качестве коэффициентов  $b_k$  коэффициенты ряда (24) или отношения коэффициентов  $B_{q+k}/B_q$ , фигурирующих в ряде (27), можно получить явный вид зависимостей  $w_*$  от параметров правых частей уравнений (19) и (20).

### 4. Заключение

В работе исследованы условия формирования магнитных скирмионов высокого порядка (МСВП) в двумерных системах — магнитных возбуждений специального вида, у которых азимутальный угол намагниченности  $\phi = n\varphi$ , где  $\varphi$  — угол полярной системы координат в плоскости пленки, а топологический заряд возбуждений  $|Q| = |n|$ . Ключевым фактором стабилизации МСВП при



этом оказалась конкуренция в магнитной подсистеме обменного взаимодействия, одноионной анизотропии, а также зеемановских и орбитальных эффектов неоднородного магнитного поля. Проявление орбитальных эффектов сводилось к добавлению к гамильтониану магнитной подсистемы дополнительных киральных слагаемых, вклад которых в энергию магнитной конфигурации зависит от пространственного распределения ее плотности топологического заряда, а также пространственного распределения магнитного поля.

Для аналитического описания эффекта стабилизации МСВП мы исследовали размеры скирмионов высокого порядка в аксиально-симметричных неоднородных магнитных полях степенного профиля, для которых поперечная компонента (перпендикулярная плоскости пленки) поля  $B \sim r^\beta$ , где  $r$  — расстояние от центра скирмиона до точки плоскости. Несмотря на простую функциональную зависимость, такой профиль описывает широкий класс конфигураций магнитных полей вблизи МСВП, если размеры последних много меньше характерных масштабов изменения напряженности полей. Анализ размеров МСВП нами проводился в рамках вариационного подхода, с хорошо зарекомендовавшим себя профилем магнитного скирмиона, при использовании иерархии энергетических параметров (см. неравенства (3) и (14)), характерных для сильно коррелированных электронных систем. Это позволило свести задачу минимизации энергетического функционала к вариационной задаче с одной переменной, описывающей ширину доменной стенки МСВП. При этом для решения вариационных уравнений в профилях  $\mathcal{B}(r)$  общего положения мы использовали математический аппарат теории функций многих комплексных переменных. Это позволило аналитически описать нетривиальные зависимости размеров МСВП от напряженности приложенного магнитного поля, а также обнаружить богатую картину конкуренции орбитальных и зеемановских эффектов магнитного поля при стабилизации таких структур. Так, было показано что для стабилизации МСВП в полях с  $\beta < 0$  внешнее поле должно быть направлено вдоль направления намагниченности пленки, тогда как для полей с  $\beta > 0$  — противоположно.

В качестве важного частного случая, рассмотрена задача формирования МСВП в аксиально-симметричных „спадающих“ магнитных полях типа  $\mathcal{B}(r) \sim 1/r$  (случай  $\beta = -1$ ). Исследования скирмионов в полях такого типа в последние годы приобрело популярность в виду экспериментального детектирования связанных состояний магнитный скирмион — сверхпроводящий вихрь в гетероструктурах  $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1]^{10}/\text{MgO}/\text{Nb}$ , а также теоретического предсказания стабилизации таких связанных состояний за счет взаимодействия скирмиона с неоднородным полем вихря. Стоит отметить, что главным механизмом стабилизации МС с  $n = 1$  в гетероструктурах традиционно считается взаимодействие Дзялошинского–Мории, индуцированное, в том числе, за счет создания интерфейса гетероструктуры. Однако,

в случае МСВП с  $n > 1$  такое взаимодействие не дает существенного вклада энергию спиновой структуры и одним из факторов стабилизации МСВП может служить скалярное киральное взаимодействие. Нами в настоящей работе было показано, что неоднородное поле вихря совместно с фактором наличия скалярного кирального взаимодействия может стать причиной стабилизации магнитных скирмионов высокого порядка. При этом, само существование скалярного кирального взаимодействия, а также используемая иерархия материальных параметров (3) накладывает условия на магнитные материалы-кандидаты, в которых МСВП могут сформировать за счет орбитальных эффектов. Так, микроскопический вывод магнитных взаимодействий [22], формирующих функционал (2) с иерархией (3) показал, что естественными материалами — кандидатами в рассматриваемые системы являются слоистые сильно коррелированные соединения, в которых магнитные взаимодействия возникают за счет косвенного (непрямого) обмена. К таким соединениям могут относиться переходные  $3d$ - и редкоземельные  $4f$ -металлы [44]. Однако, вопрос о возможности формирования в них нетривиальных магнитных состояний является предметом отдельного исследования.

## Благодарности

Авторы благодарят И.С. Бурмистрова, С.С. Апостолова и Е.С. Андрияшину за полезные дискуссии.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (проект № 20-1-4-25-1), гранта Президента РФ МК-4687.2022.1.2, Красноярского математического центра Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 75-02-2023-936.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] T. Skyrme. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **260**, 127 (1961).
- [2] T. Skyrme. Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- [3] А.А. Белавин, А.М. Поляков. Письма в ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
- [4] И.Е. Дзялошинский, Б.А. Иванов. Письма в ЖЭТФ **29**, 592 (1979).
- [5] А.С. Ковалев, А.М. Косевич, К.В. Маслов. Письма в ЖЭТФ **30**, 321 (1979).
- [6] А.Н. Богданов, Д.А. Яблонский. ЖЭТФ **95**, 178 (1989).
- [7] F.N. Rybakov, N.S. Kiselev, A.B. Borisov, L. Döring, C. Melcher, S. Blügel. APL Materials **10**, 111113 (2022).

- [8] K.L. Metlov. *Physica D* **443**, 133561 (2023).
- [9] A.S. Schwarz. *Quantum Field Theory and Topology*. Springer, Berlin, Heidelberg (2013).
- [10] S.-H. Yang, K.-S. Ryu, S. Parkin. *Nature Nanotechnology* **10**, 221 (2015).
- [11] C. Moreau-Luchaire, C. Mouta S., N. Reyren, J. Sampaio, C.A.F. Vaz, N. Van Horne, K. Bouzehouane, K. Garcia, C. Deranlot, P. Warnicke, P. Wohlhüter, J.-M. George, M. Weigand, J. Raabe, V. Cros, A. Fert. *Nature Nanotechnology* **11**, 444 (2016).
- [12] X. Zhang, M. Ezawa, Y. Zhou. *Sci. Rep.* **5**, 9400 (2015).
- [13] J. Zázvorka, F. Jakobs, D. Heinze. *Nature Nanotechnology* **14**, 658 (2019).
- [14] G. Yu, P. Upadhyaya, Q. Shao, H. Wu, G. Yin, X. Li, C. He, W. Jiang, X. Han, P.K. Amiri, K. Wang. *Nano Lett.* **17**, 261 (2017).
- [15] A. Leonov, M. Mostovoy. *Nature Commun.* **6**, 8275 (2015).
- [16] R. Ozawa, S. Hayami, Y. Motome. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 147205 (2017).
- [17] L. Rózsa, K. Palotás, A. Deák, E. Simon, R. Yanes, L. Udvardi, L. Szunyogh, U. Nowak. *Phys. Rev. B* **95**, 094423 (2017).
- [18] D. Foster, C. Kind, P.J. Ackerman, J.-S.B. Tai, M.R. Dennis, I. Smalyukh. *Nature Phys.* **15**, 655 (2019).
- [19] F. Rybakov, N. Kiselev. *Phys. Rev. B* **99**, 064437 (2019).
- [20] V.M. Kuchkin, B. Barton-Singer, F.N. Rybakov, S. Blügel, B.J. Schroers, N. Kiselev. *Phys. Rev. B* **102**, 144422 (2020).
- [21] B. Göbel, I. Mertig, O.A. Tretiakov. *Phys. Rep.* **895**, 1 (2021).
- [22] M.S. Shustin, V.A. Stepanenko, D.M. Dzebisashvili. *Phys. Rev. B* **107**, 195428 (2023).
- [23] D. Sen, R. Chitra. *Phys. Rev. B* **51**, 1922 (1995).
- [24] O.I. Motrunich. *Phys. Rev. B* **73**, 155115 (2006).
- [25] B. Bauer, L. Cincio, B. Keller, M. Dolfi, G. Vidal, S. Trebst, A. Ludwig. *Nature Commun.* **5**, 5137 (2014).
- [26] Y. Zhang, Y. Sun, H. Yang, J. Železný, S.P.P. Parkin, C. Felser, B. Yan. *Phys. Rev. B*, **95**, 075128 (2017).
- [27] K. Komarov, D. Dzebisashvili. *J. Magn. Magn.* **440**, 57 (2017).
- [28] M. Malki, G.S. Uhrig. *Europhys. Lett.* **132**, 20003 (2020).
- [29] J. Kipp, K. Samanta, F.R. Lux, M. Merte, D. Go, J.-P. Hanke, M. Redies, F. Freimuth, S. Blügel, M. Ležaić, Y. Mokrousov. *Commun. Phys.* **4**, 99 (2021).
- [30] S.M. Dahir, A.F. Volkov, I.M. Eremin. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 097001 (2019).
- [31] R.M. Menezes, J.F.S. Neto, C.C. de Souza Silva, M.V. Milosevic. *Phys. Rev. B* **100**, 014431 (2019).
- [32] S.M. Dahir, A.F. Volkov, I.M. Eremin. *Phys. Rev. B* **102**, 014503 (2020).
- [33] A.P. Petrović, M. Raju, X.Y. Tee, A. Louat, I. Maggio-Aprile, R.M. Menezes, M.J. Wyzyński, N.K. Duong, M. Reznikov, Ch. Renner, M.V. Milošević, C. Panagopoulos. *Phys. Rev. Lett.* **126**, 117205 (2021).
- [34] E. Andriyakhina, I. Burmistrov. *Phys. Rev. B* |bf103, 17, 174519 (2021).
- [35] E.S. Andriyakhina, S. Apostoloff, I.S. Burmistrov. *JETP Lett.* **116**, 825 (2022).
- [36] S.S. Apostoloff, E.S. Andriyakhina, P.A. Vorobyev, O.A. Tretiakov, I.S. Burmistrov. arXiv:2212.08351 (2023).
- [37] G. Yang, P. Stano, J. Klinovaja, D. Loss. *Phys. Rev. B* **93**, 224505 (2016).
- [38] S. Rex, I. Gornyi, A. Mirlin. *Phys. Rev. B* **100**, 064504 (2019).
- [39] A.O. Zlotnikov, M.S. Shustin, A.D. Fedoseev. *J. Sup. Nov. Magn.* **34**, 3053 (2021).
- [40] Л.А. Айзенберг, А.П. Южаков. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Наука, Новосибирск (1979). 368 с.
- [41] Т.М. Садыков, А.К. Цих. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. Наука, М. (2019). 408 с.
- [42] X. Wang, H. Yuan, M.X. Wang. *Commun. Phys.* **1**, 1 (2018).
- [43] H. Mellin, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **172**, 658 (1927).
- [44] В.Ю. Ирхин, Ю.П. Ирхин. Электронная структура, корреляционные эффекты и физические свойства d- и f-переходных металлов и их соединений РХД, М. (2008). 476 с.

*Редактор Т.Н. Василевская*

*Продолжение публикации материалов Симпозиума см. в ФТТ No 7/23*