

11.1

## Аппроксимация решения внутренней задачи электродинамики методом собственных функций

© Д.П. Табаков, А.Г. Майоров

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия  
E-mail: a.mayorov@psuti.ru

Поступило в Редакцию 17 февраля 2023 г.

В окончательной редакции 3 марта 2023 г.

Принято к публикации 3 марта 2023 г.

Рассмотрена задача построения аппроксимационных моделей излучающих и переизлучающих структур на основе метода собственных функций. Отмечена неоднозначность решения данной задачи. Предложены приемы, которые могут быть использованы при разработке аппроксимационных моделей. Представлено выражение для оценки погрешности, вносимой аппроксимационной моделью. В качестве примера приведен один из возможных вариантов построения аппроксимационной модели для трубчатого вибратора. Приведены результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** метод собственных функций, метод моментов, сингулярные интегральные уравнения, аппроксимационная модель, трубчатый вибратор.

DOI: 10.21883/PJTF.2023.09.55320.19531

В настоящее время для решения задач излучения и дифракции электромагнитных волн часто применяют системы автоматизированного проектирования. Одним из наиболее эффективных методов, использующихся при их построении, является метод конечных элементов [1]. При этом внутренняя задача электродинамики с помощью метода моментов [2] сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), сложность прямого решения которой в зависимости от ее размерности  $N$  можно оценить как  $O(N^3)$ . Размерность  $N$  непосредственным образом связана с выбором системы проекционных функций (СПФ). Оптимальными можно считать СПФ, приводящие матрицу СЛАУ к диагональному виду. В [3] для решения этой задачи предложено использовать метод собственных функций (МСФ). Альтернативой МСФ можно считать метод характеристических мод [4]. Также в [3] рассмотрены достоинства и недостатки указанных методов, и в качестве примера приведено решение задачи дифракции на спиральной частице с помощью МСФ. Сделан вывод, что МСФ может стать хорошей основой для построения аппроксимационных моделей (АМ) решения внутренней задачи электродинамики. В настоящей работе предложены некоторые приемы, которые могут быть использованы при построении АМ. В качестве примера рассмотрен один из вариантов построения АМ трубчатого вибратора.

Обычно задача определения источников (внутренняя задача электродинамики) сводится к интегральному уравнению (ИУ), которое можно записать в операторном виде

$$A(M)u = v. \quad (1)$$

Здесь  $A$  — интегральный оператор,  $M$  — ядро,  $v$  — правая часть ИУ. МСФ предполагает представление решения (1) в виде суммы аппроксимированного решения

$u'$  и остатка  $r$ :

$$u = u' + r, \quad u' = \sum_{j=1}^N u'_j \phi_j,$$

$$u'_j \in U' = \hat{W}'V, \quad \hat{W}' = (\hat{J}\hat{X}^{-1}\hat{J}^T)'. \quad (2)$$

Здесь  $\hat{U}'$  — приближение решения СЛАУ  $\hat{M}\hat{U} = \hat{V}$ , получаемой методом моментов;  $\hat{V}$  — ее правая часть;  $\hat{J}$  и  $\hat{X}$  — матрицы собственных векторов (СВ) и собственных чисел (СЧ), являющиеся решением спектральной задачи  $\hat{M}\hat{J} = \hat{X}\hat{J}$ ;  $\phi_j$  — проекционные функции метода моментов. Матрица  $\hat{X}$  диагональная, при этом  $\xi_{j,j} \equiv \xi_j \in \mathbf{X}$  — собственные числа  $\hat{M}$ . Столбцы  $\hat{J}_j$  матрицы  $\hat{J}$  представляют собой СВ, соответствующие СЧ  $\xi_j$ . Штрих используется для обозначения усечения исходных матриц ( $j = 1 \dots P$ ,  $P < N$ ). Штрих после скобок предполагает его применение ко всем объектам, находящимся в скобках. Усечение увеличивает  $r$  в (2) на заранее известную величину.

Пусть  $\mathbf{p} = \{x, \gamma_1, \gamma_2 \dots\}$  — точка, принадлежащая области аппроксимации  $A$ ,  $x = h/\lambda$ ,  $h$  — главный геометрический параметр исследуемой системы,  $\gamma_1, \gamma_2 \dots$  — ее остальные параметры,  $\lambda$  — длина волны. Физически элементы  $\hat{J}$  и  $\hat{X}$  являются гладкими функциями координат  $\mathbf{p}$ . Их аппроксимации  $\hat{J}''$  и  $\hat{X}''$  для  $\mathbf{p} \in A$  дают нам АМ, с заданной точностью описывающую состояние системы в указанной области. Относительную погрешность аппроксимации можно оценить с помощью выражения

$$\rho_A = \rho_A(\mathbf{p}) = |\hat{W}''\hat{M}' - \hat{I}^*|/|\hat{I}^*|, \quad \hat{W}'' = (\hat{J}\hat{X}^{-1}\hat{J}^T)'',$$

$$\hat{M}' = (\hat{J}\hat{X}\hat{J}^T)', \quad (\hat{J}\hat{J}^T)' = \hat{I}^*. \quad (3)$$

Аппроксимация  $\tilde{\mathbf{J}}'$  и  $\tilde{\mathbf{X}}'$  осуществляется на основе исходных массивов  $\{j\}$  и  $\{\xi\}$ , представляющих собой  $\tilde{\mathbf{J}}'$  и  $\tilde{\mathbf{X}}'$ , вычисленные для массива точек  $\{p\} \in A$ . Восстановление  $\tilde{\mathbf{J}}'$  и  $\tilde{\mathbf{X}}'$  из  $\{j\}$  и  $\{\xi\}$  осуществляется с помощью различных вариантов интерполяции (линейная, сплайн-интерполяция и т.д.). Размер  $\{j\}$  и  $\{\xi\}$  достаточно велик, поэтому АМ предполагает формирование процедур  $T_j$  и  $T_\xi$ , позволяющих с известной точностью восстанавливать  $\{j\}$  и  $\{\xi\}$  из более компактных опорных массивов  $\{j^*\}$  и  $\{\xi^*\}$  соответственно. Желательно, чтобы  $\{j^*\}$  и  $\{\xi^*\}$  имели хороший потенциал для сжатия, определяющийся числом элементов, удаление которых из массивов не приводило бы к существенному росту погрешности при восстановлении  $\{j\}$  и  $\{\xi\}$ . В [5] показано, что частотная зависимость элементов СЧ и СВ хорошо аппроксимируется полиномиальными разложениями. Потенциал для сжатия  $\{j^*\}$  можно увеличить на основе проецирования СВ на текущей частоте по СВ на фиксированной частоте.

Рассмотрим один из вариантов построения АМ для трубчатого вибратора (рис. 1), внутренняя задача для которой формулируется в виде сингулярного ИУ [6]. На рис. 1 используются следующие обозначения:  $L$  — длина вибратора,  $a$  — радиус трубки,  $2b$  — ширина зазора,  $s$  — смещение центра зазора вдоль оси  $Oz$ . ИУ по форме соответствует задаче (1), в которой  $u = \eta(z)$  — поверхностная плотность тока,  $v = E_z^{ext}(z)/Z$ ;  $E_z^{ext}$  —  $z$ -компонента стороннего поля,  $Z$  — волновое сопротивление среды. Для рассматриваемой структуры  $\mathbf{p} = \{x, \gamma\}$ , где  $x = L/\lambda$ ,  $\gamma = a/L$ . В силу симметрии в рамках метода моментов для вибратора можно сформировать две независимые СЛАУ относительно четных и нечетных СПФ. В нашем случае вибратор разбивался на сегменты равной длины, а в качестве базисных и пробных использовались соответственно суперпозиции кусочно-постоянных функций и дельта-функций, учитывающие симметрию структуры. В качестве исходных использовались массивы

$$\begin{aligned} \{\xi\} &= \{\xi_{r,f,p}\} = \xi'_p(\mathbf{p}_{f,r}), & \{j\} &= \{j_{r,f,n,p}\} = \mathbf{J}'(\mathbf{p}_{f,r}), \\ \mathbf{p}_{f,r} &= \{x_f, \gamma_r\}, & x_f &\in \{x\}, & \gamma_r &\in \{\gamma\}, \\ n &= 1 \dots N_s/2, & p &= 1 \dots P, \\ f &= 1 \dots N_f, & r &= 1 \dots N_r, \end{aligned} \quad (4)$$

$N_f$  — число длин волн,  $N_r$  — число нормированных радиусов,  $N_s$  — число сегментов. Процедура  $T_\xi$  определяет

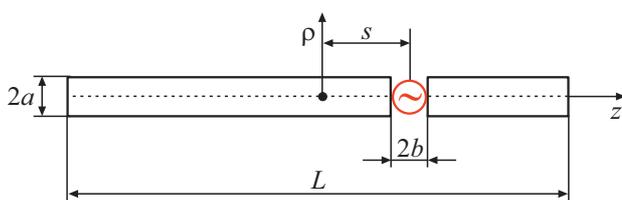
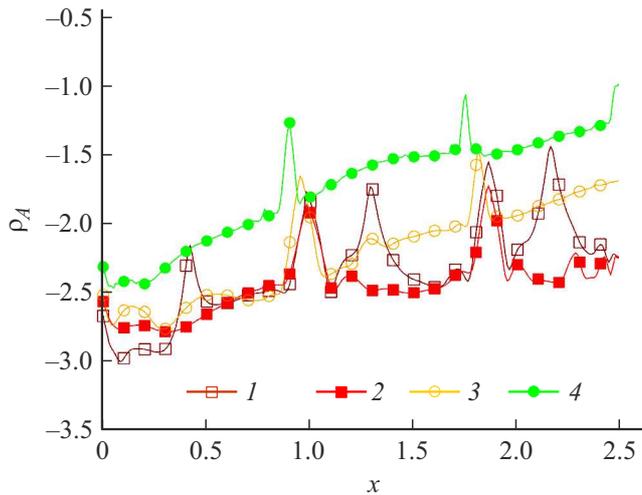


Рис. 1. Геометрия трубчатого вибратора.

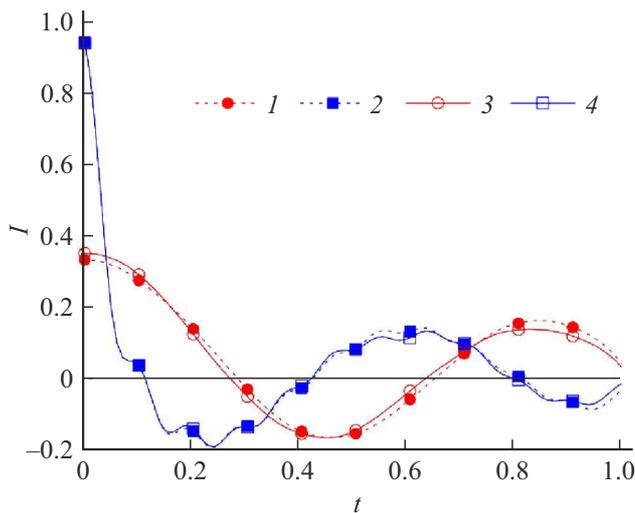
массив  $\{\xi^*\} = \{\xi_{r,c,p}^*\}$ ,  $c$ -элементы которого являются коэффициентами разложения  $f$ -элементов  $\{\xi\}$  в ряды по полиномам Чебышева ( $c = 1 \dots N_c$ ). Процедура  $T_j$  определяет массив  $\{j^*\} = \{j_{r,c,q,p}^*\}$ ,  $c$ -элементы которого являются коэффициентами разложения  $f$ -элементов массива  $\{j'_{r,f,q,p}\} = \sum_n \{j_{r,f,n,q}\} \{j_{r,1,n,p}\}$  в ряды по полиномам Чебышева. Сжатие массивов  $\{\xi_{r,c,p}^*\}$ ,  $\{j_{r,f,q,p}^*\}$  заключается в удалении элементов малой амплитуды таким образом, чтобы соответствующие невязки  $\rho_\xi$  и  $\rho_j$  между исходными и сжатыми массивами не превышали заранее известных значений  $\varepsilon_\xi$  и  $\varepsilon_j$ .

Построение АМ осуществлялось при следующих параметрах:  $N_s = 300$ ,  $N = 150$ ,  $P = 25$ ,  $N_c = 64$ ,  $2b/L = 1/100$ ,  $\varepsilon_\xi = 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_j = 10^{-3}$ ,  $x_f \in [10^{-3}; 2.5]$ ,  $\gamma_r \in [10^{-4}; 10^{-1}]$ . Вычисления проводились с числами двойной точности. Для  $x$  использовался равномерный шаг (250 точек), для  $\gamma$  диапазон был разбит на три декады  $[1; 10] \cdot 10^{n-5}$ , где  $n = 1, 2, 3$  — номер декады, и внутри каждой декады массивы рассчитывались в следующих точках:  $\gamma/10^{n-5} = 1, 1.375, 1.75, 2.5, 3.75, 5, 6.25, 7.5, 8.75, 10$  (три декады содержат четыре граничные точки и по восемь внутренних точек). Таким образом, всего было использовано 28 расчетных точек по  $\gamma$ . В результате вычислений были получены следующие реальные размеры исходных и сжатых опорных массивов:  $\{\xi\}$  — 2.6 МВ,  $\{\xi'\}$  — 106 КВ,  $\{j\}$  — 3.36 ГВ,  $\{j'\}$  — 1 МВ, размер опорного массива  $\{j_{r,1,n,p}\}$  — 2 МВ. На рис. 2 приведены результаты расчета погрешности аппроксимации обратного интегрального оператора по формуле (3). На рис. 3 приведены нормированные графики аппроксимированных распределений поверхностной плотности тока для наихудшего случая, вычисленные с помощью представленной АМ. Предполагалось, что вибратор является симметричным ( $s = 0$ ), а поле  $E_z^{ext}$  локализовано в области зазора. Аналогичные графики, полученные с помощью непосредственно вычисленных СЧ и СВ, имеют довольно малые визуальные отличия от графиков, полученных с помощью АМ.

Таким образом, настоящая работа посвящена проблеме построения АМ излучающих и переизлучающих структур на основе метода собственных функций. Рассмотрены общие принципы создания АМ. Отметим, что углубленное исследование свойств опорных массивов позволяет совершенствовать исходную АМ. Исходная АМ может стать основой более компактной АМ, имеющей меньшую точность аппроксимации. Приведен простой в реализации вариант построения АМ для трубчатого вибратора для заданного диапазона частот, учитывающий радиус трубки. По мнению авторов, данную АМ можно использовать в инженерных расчетах и для построения моделей многоэлементных вибраторных антенн. Недостаток предложенной АМ — некоторая потеря физического смысла данных, хранящихся в опорных массивах. В [3] был сделан акцент на особом значении экстремумов частотных зависимостей



**Рис. 2.** Оценка погрешности аппроксимации согласно (3).  $\gamma = 1.875 \cdot 10^{-4}$  (1),  $9.375 \cdot 10^{-4}$  (2),  $9.375 \cdot 10^{-3}$  (3),  $9.375 \cdot 10^{-2}$  (4).



**Рис. 3.** Сравнение нормированных распределений тока, полученных с помощью исходных ( $I' = \eta' / \eta_{\max}$ ) и восстановленных в рамках АМ ( $I'' = \eta'' / \eta_{\max}$ ) собственных чисел и собственных векторов. 1 —  $\text{Re}I'$ , 2 —  $\text{Im}I'$ , 3 —  $\text{Re}I''$ , 4 —  $\text{Im}I''$ .  $\varepsilon_{\xi} = 10^{-7}$ ,  $\varepsilon_j = 10^{-3}$ ,  $x = 2.5$ ,  $\gamma = 9.375 \cdot 10^{-2}$  (наихудший случай),  $I_{\max} = \max(|\eta'(t)|, |\eta''(t)|)$ ,  $t = 2z/L$ .

СЧ, определяющих общий характер решения внутренней задачи. В идеале эта информация должна включаться в опорные массивы в явном виде. Это позволяет максимально точно хранить данные, необходимые для анализа, интерпретации и прогнозирования получаемых результатов. Представленная АМ содержит эти данные в неявном виде, и для получения информации об экстремумах требуются дополнительные (относительно простые) вычислительные процедуры с некоторой потерей точности. В перспективе авторы планируют построение АМ, учитывающих этот момент в наиболее полной мере.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] R.H. Gallagher, *Finite element analysis: fundamentals* (Prentice-Hall, 1974).
- [2] R.F. Harrington, *Field computation by moment method* (Macmillan, N.Y., 1968).
- [3] Д.П. Табаков, Изв. вузов. Радиофизика, **64** (3), 179 (2021). DOI: 10.52452/00213462\_2021\_64\_03\_179 [D.P. Tabakov, Radiophys. Quantum Electron., **64** (3), 163 (2021). DOI: 10.1007/s11141-021-10120-9].
- [4] R. Garbacz, Proc. IEEE, **53** (8), 856 (1965). DOI: 10.1109/PROC.1965.4064
- [5] Д.П. Табаков, А.Г. Майоров, Тр. учебных заведений связи, **5** (4), 36 (2019). DOI: 10.31854/1813-324X-2019-5-4-58-64
- [6] В.А. Неганов, *Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики* (Сайнс-Пресс, М., 2008).