

09
Резонансное туннелирование фотонов в слоистых оптических наноструктурах (метаматериалах)

© М.В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
 410012 Саратов, Россия
 e-mail: tdauidovichmv@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 16 декабря 2022 г.
 В окончательной редакции 16 декабря 2022 г.
 Принято к публикации 16 декабря 2022 г.

Рассмотрены условия резонансного (почти полного) туннелирования фотонов (плоских монохроматических электромагнитных волн) сквозь слоистые диэлектрические и металлодиэлектрические структуры. Резонансное туннелирование происходит на частотах, на которых выполняются условия резонанса для соответствующих структурам открытых резонаторов. Для металлодиэлектрических структур показана возможность туннелирования в оптическом диапазоне при сильном заграждении в ИК диапазоне, что может быть использовано для контроля пропускания оконных стекол.

Ключевые слова: диэлектрическая проницаемость, гомогенизация, резонансное туннелирование, плазмы, металлические наночастицы, оконные стекла.

DOI: 10.21883/JTF.2023.04.55037.275-22

Введение

Резонансное туннелирование (РТ) — это квантовый волновой эффект полного резонансного прохождения частиц через структуры, имеющие два и более сильно отражающих элемента, между которыми частицы движутся почти свободно [1–7]. При этом в области отражающего элемента волны эванесцентные. Фактически РТ означает такую интерференцию отраженных волн, при которой полный коэффициент отражения R обращается в нуль. При моделировании РТ рассматривают 1D-структуры и учитывают импульс частиц в направлении движения, т.е. решают одномерные задачи. РТ начали использовать свыше 50 лет назад в твердотельных резонансно-туннельных диодах и резонансно-туннельных транзисторах [6–21], в которых создавалась квантовая гетероструктура, формирующая для туннелирующих электронов два или более потенциальных барьера, разделенных областью или областями, которые иногда называют квантовыми ямами. Такая гетероструктура формируется из широкозонных и узкозонных полупроводниковых наноразмерных слоев, например, $Al_xGa_{1-x}As$ и GaAs с выполнением омических контактов на катоде и аноде из GaAs. Энергетическое дно ямы должно быть ниже энергии набегающих электронов, при этом в яме возможно образование метастабильных уровней. Конфигурацию квантового потенциала можно регулировать легированием. В твердотельных структурах под носителями заряда понимают квазичастицы с некой эффективной массой μ , т.е. можно рассматривать и дырки, а простейшая форма такого квантового потенциала $V(z)$ может иметь два прямоугольных барьера, отсчитываемых от нулевого уровня, разделенных областью с нулевым потенциалом. Поскольку частицы с мас-

сой μ обладают волновыми свойствами, а их движение подчиняется уравнению Шредингера (УШ) с волновой функцией $\psi(z)$, им можно приписать импульс $p = \hbar k$ и волновое число $k = \sqrt{2\mu(E - V(z))}/\hbar = ik$, а движение описывать волновой проводимостью (волновым адмиттансом) $\eta(z) = -i\psi'(z)/\psi(z) = k$, так как везде должна быть непрерывна волновая функция и ее производная. Условие $R = 0$ в случае двух одинаковых прямоугольных барьеров приводит к уравнению [22]:

$$\tan(kt_W) \tanh(\kappa t_B) = -\frac{2i\tilde{\eta}}{1 + \tilde{\eta}^2} = \frac{\sqrt{V/E - 1}}{1 - (1/2)V/E}. \quad (1)$$

Это комплексное трансцендентное уравнение может при $V/E > 1$ иметь комплексные корни, соответствующие уровням РТ. В нем t_B означает размер барьера (обедненной области), t_W — размер ямы, V — высота прямоугольного барьера, а $\tilde{\eta} = \eta(V)/\eta(0)$ — отношение адмиттансов. Далее везде тильдой обозначаем нормированные величины. В симметричной структуре существует такой же обратный ток (поток) электронов. Асимметрия возникает при приложении анодного напряжения. РТ возможно и при движении через две потенциальные ямы ($V < 0$) [20].

Имеется прямая аналогия между стационарным УШ и волновым уравнением Гельмгольца в электродинамике, т.е. между туннелированием электронов и фотонов [22–25]. Именно, движение плоской волны в пространстве с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$ (ДП) эквивалентной движению электрона в потенциальном поле V , если принять во внимание соотношение $k_0^2\epsilon(z) = 2m_eE(1 - V(z)/E)/\hbar^2$, откуда заключаем, что имеет место соответствие $\epsilon(z) = 1 - V(z)/E$ с движением плоской электромагнитной волны в направлении

оси z . Таким образом, отсутствие потенциала соответствует движению фотона в вакууме ($\varepsilon = 1$), условие $V(z)/E > 1$ (туннелирование) означает $\varepsilon(z) < 0$, что соответствует движению фотона в бесстолкновительной плазме, а условие $V(z)/E < 1$, соответствующее надбарьерному движению ($V > 0$) и движению над ямой $V < 0$. Эти два случая соответствуют условиям $0 < \varepsilon(z) < 1$ и $\varepsilon(z) > 1$, т.е. плазме выше плазменной частоты и диэлектрику. Условие $\varepsilon \approx 1$ может выполняться в плазме с небольшой диссипацией, и в электродинамике оно соответствует волнам в ENZ (epsilon-near-zero) средах [26]. В квантовой механике $V(z) = E$ соответствует особой точке. Важно отметить, что полное РТ получается в отсутствии диссипации, что в квантовой механике выполняется в силу сохранения числа частиц, а в электродинамике для этого следует пренебречь поглощением фотонов. Также следует иметь в виду, что фотон с энергией $\omega\hbar$ в среде — это квазичастица (квазифотон) с другим импульсом, в частности, в плазме ему следует приписывать мнимый импульс. Сильно выраженная туннельная резонансная структура (РС) для фотона возникает, когда есть два резких плазменных слоя, разделенных вакуумным или диэлектрическим промежутком. Для электрона это аналог двугорбого квантового потенциала, разделенного ямой. Другая резонансная структура может иметь вид двух диэлектрических пластин с большой ДП, разделенных вакуумным промежутком или слоем с малой ДП. В оптике обе структуры являются открытыми резонаторами, радиационные добротности которых тем выше, чем сильнее отражают слои (пластины). Однако во втором случае следует говорить не о РТ, а о резонансном прохождении. Отражение зависит от толщины слоев и от отличия ДП от единицы. Поэтому плазменные слои при условии $0 < \varepsilon < 1$ не очень эффективны для образования резких резонансов. В холодной газовой плазме сложно выполнить слои с резкими границами. Исключение может составить случай заключения плазмы в стеклянные колбы с тонкими плоскими стенками. Реализовывать плазму с помощью металлических или полупроводниковых слоев проще, при этом слои можно выполнять с толщиной от нескольких нанометров до весьма больших величин. Добиться резкого снижения потерь можно, используя криогенные температуры. Получение РС на слоях с большой ДП ограничено выбором материалов, анизотропией их ДП и диссипацией. Так, полупроводниковые материалы с ДП более 10, как правило, имеют большие потери. Для слоя диэлектрика $\tilde{\eta} = \sqrt{\varepsilon}$, а для слоя плазмы $\tilde{\eta} = i\sqrt{|\varepsilon|}$, поэтому уравнение (1) справедливо и в этих случаях. Однако в оптике более удобны структуры из двух слоев, разделенных диэлектрическим слоем. Это изменяет отношение адмиттансов, при этом левую часть (1) следует брать в виде $\tan(k_0 t_W \sqrt{\varepsilon_W}) \tanh(k_0 t_B \sqrt{|\varepsilon_B|})$. Здесь $\varepsilon_B < 0$ соответствует ДП плазмы. Для случая $\varepsilon_B > \varepsilon_W$ следует выполнить замену $\tanh(k_0 t_B \sqrt{|\varepsilon_B|}) \rightarrow -i \tan(k_0 t_B \sqrt{\varepsilon_B})$.

1. Многослойные туннельные РС с металлодиэлектрическими слоями

Для туннелирования фотонов целесообразно рассматривать дифракцию плоской электромагнитной волны $\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 E_0 \exp(-ik_0 z)$, $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \mathbf{e} \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E_0 \exp(-ik_0 z)$ на многослойной недиссипативной РС, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0$. Для падающей под углом θ в плоскости (x, z) волны следует взять зависимости $\exp(-ik_z z - ik_x x)$, $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$ и направление поляризации $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0 \cos(\varphi) + \mathbf{z}_0 \sin(\varphi)$ или $\mathbf{e}_0 = (\mathbf{x}_0 k_z + \mathbf{z}_0 k_x)/k_0$, т.е. в данном случае рассматривается E -волна. Для нее нормированная волновая проводимость в среде есть $\tilde{y}_e = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} H_y/E_x = k_0 \varepsilon/k_z$. Для другой поляризации $\tilde{y}_h = k_z/k_0$. Далее приведены формулы для нормального падения волны. Результаты при произвольном падении просто получаются путем указанных замен. Мы рассматриваем симметричные РС. Именно в таких структурах в отсутствие диссипации возможно полное РТ. Полное РТ означает нулевой коэффициент отражения. Неполное РТ может означать, что есть частоты, на которых достигается ненулевой минимум коэффициента отражения по мощности $|R|^2$, не достигающий нуля даже при отсутствии диссипации. Рассмотрим пятислойную симметричную РС. Для ее расчета можно использовать нормированную матрицу переноса слоя

$$\hat{a}_n = \begin{bmatrix} \cos(k_0 t \sqrt{\varepsilon_n}) & i\tilde{\eta}_n^{-1} \sin(k_0 t \sqrt{\varepsilon_n}) \\ i\tilde{\eta}_n \sin(k_0 t \sqrt{\varepsilon_n}) & \cos(k_0 t \sqrt{\varepsilon_n}) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

в которую входят нормированные проводимости $\tilde{\eta}_n$ и полная матрица переноса РС из пяти слоев. Однако в РС без диссипации удобно использовать трансформацию проводимостей:

$$\tilde{y}_n^{in} = \tilde{y}_n \frac{\tilde{y}_{n+1}^{in} + i\tilde{y}_n \tan(k_0 t_n \sqrt{\varepsilon_n})}{\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n+1}^{in} \tan(k_0 t_n \sqrt{\varepsilon_n})}. \quad (3)$$

Здесь \tilde{y}_n^{in} представляют собой нормированные трансформированные к плоскостям слоев адмиттансы, а \tilde{y}_n — нормированные волновые проводимости слоев. В случае трех одинаковых плазменных слоев, разделенных двумя диэлектрическими слоями, имеем характеристическое уравнение в виде равенства соотношений (4) и (5):

$$\tilde{y}_{i3} = \frac{-\tilde{\eta} i t_g t_h + i\tilde{\eta}^2 (1 + i t_g + t_h^2) + \tilde{\eta}^3 t_h (2 + i t_g) + \tilde{\eta}^4 t_g t_h^2}{t_g t_h^2 - \tilde{\eta} t_h (2 + i t_g) + i\tilde{\eta}^2 (1 + i t_g + t_h^2) + i\tilde{\eta}^3 t_g t_h}, \quad (4)$$

$$\tilde{y}_{i3} = \frac{i t_g t_h + \tilde{\eta} (1 - t_g) + i\tilde{\eta}^2 t_h}{-t_h + \tilde{\eta} (1 - t_g) + \tilde{\eta}^2 t_h t_g}. \quad (5)$$

Для упрощения они получены трансформацией типа (3) от двух внешних границ к одной внутренней. В этих соотношениях обозначено: $t_g = \tan(k_0 t_e \sqrt{\varepsilon})$, $t_h = \tanh(k_0 t_d \sqrt{|\varepsilon_m|})$, $\tilde{\eta} = \sqrt{|\varepsilon_m|/\varepsilon_d}$, t_e и t_d — толщины слоев. Уравнение определяет комплексные резонансные частоты. На всех других частотах $0 < |R|^2 < 1$.

Аналогичные соотношения для симметричных структур можно получить из следующих соображений. Симметричная структура должна иметь нечетное число слоев, причем $N = 2M + 1$, слои n и $N - n$ одинаковы, $n = 1, 2, \dots, M = (N - 1)/2$. Это означает, что в центре слоя с номером $n = (N + 1)/2$ имеется либо магнитная, либо электрическая стенки. Трансформируя единичный адмиттанс $\tilde{y}_{N+1} = 1$ вакуума по формуле (3) к границе слоя, а затем к центру этого слоя, имеем

$$\tilde{y}_{M+2}^{in} = \tilde{y}_{M+2} \frac{\tilde{y}_{M+3}^{in} + i\tilde{y}_{M+2} \tan(k_0 t_{M+2} \sqrt{\varepsilon_{M+2}})}{\tilde{y}_{M+2} + i\tilde{y}_{M+3}^{in} \tan(k_0 t_{M+2} \sqrt{\varepsilon_{M+2}})},$$

$$\tilde{y}^{in} = \tilde{y}_{M+1} \frac{\tilde{y}_{M+2}^{in} + i\tilde{y}_{M+1} \tan(k_0 t_{M+1} \sqrt{\varepsilon_{M+1}/2})}{\tilde{y}_{M+1} + i\tilde{y}_{M+2}^{in} \tan(k_0 t_{M+1} \sqrt{\varepsilon_{M+1}/2})},$$

а также условия

$$\tan(k_0 t_{M+1} \sqrt{\varepsilon_{M+1}/2}) = i(\tilde{y}_{M+2}^{in}/\tilde{y}_{M+1})^\nu,$$

где $\nu = 1$ соответствует магнитной стенке, а $\nu = -1$ — электрической. Это опять неявные трансцендентные уравнения. Следует отметить, что если рассматривать не нормальное падение волны, а движение волны под углом с продольными компонентами волновых векторов $k_{zn} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_n - k_x^2}$ и поперечной компонентой k_x , то эти же уравнения описывают движущиеся в многослойной структуре вдоль x плазмон-поляритоны [27].

2. Многослойные диэлектрические РС

Рассмотрим диэлектрическую пластину толщины t_d с ДП $\varepsilon_d > 1$. Хорошо известно, что такая пластина прозрачна для полуволновой длины $t_d = \lambda \sqrt{\varepsilon_d}/2$. Соответствующее условие отсутствия отражения имеет вид

$$\frac{1 + i\sqrt{\varepsilon} \tan(k_0 t_d \sqrt{\varepsilon_d})}{1 + i \tan(k_0 t_d \sqrt{\varepsilon})/\sqrt{\varepsilon}} = 1,$$

или $\tan(k_0 t_d \sqrt{\varepsilon}) = 0$, что дает частоты прозрачности $\omega_n = n\pi c/(t_d \sqrt{\varepsilon})$, $n = 1, 2, \dots$. Если такую пластину обложить слева и справа двумя другими одинаковыми пластинами с другой ДП, то получим РС, которая описывается тем же уравнением (1) с учетом указанного соответствия. Мы перепишем его по-другому, обозначив параметры внешних пластин индексом 1, а внутренней — индексом 2. Именно, трансформация единичного (нормированного) адмиттанса вакуума первой пластиной приводит к величине

$$\tilde{y}_1 = \frac{1 + i\sqrt{\varepsilon_1} \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})}{1 + i \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})/\sqrt{\varepsilon_1}}. \quad (6)$$

Трансформация второй пластиной дает величину

$$\tilde{y}_2 = \frac{\tilde{y}_1 + i\sqrt{\varepsilon_2} \tan(k_0 t_2 \sqrt{\varepsilon_2})}{1 + i\tilde{y}_1 \tan(k_0 t_2 \sqrt{\varepsilon_2})/\sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (7)$$

Трансформация третьей пластиной приводит ее к величине

$$\tilde{y}_3 = \frac{\tilde{y}_2 + i\sqrt{\varepsilon} \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})}{1 + i\tilde{y}_2 \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})/\sqrt{\varepsilon_1}} = 1.$$

Мы положили ее равной единице, чтобы выполнить условие отсутствия отражения. Поэтому

$$\tilde{y}_2 = \frac{1 - i\sqrt{\varepsilon} \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})}{1 - i \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})/\sqrt{\varepsilon_1}}. \quad (8)$$

Сравнивая с (7), находим

$$\tilde{y}_1 = \frac{1 - i\sqrt{\varepsilon} \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1}) - i\sqrt{\varepsilon_2} \tan(k_0 t_2 \sqrt{\varepsilon_2}) \times [1 - i \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})/\sqrt{\varepsilon_1}]}{1 - i \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})/\sqrt{\varepsilon_1} - [1 - i\sqrt{\varepsilon} \tan(k_0 t_1 \sqrt{\varepsilon_1})] \times [i \tan(k_0 t_2 \sqrt{\varepsilon_2})/\sqrt{\varepsilon_2}]}. \quad (9)$$

Наконец, сравнивая с (6), получаем искомое характеристическое уравнение. Оно имеет достаточно громоздкий вид, но может быть упрощено. Для этого необходимо преобразовать $\tan(k_0 t_2 \sqrt{\varepsilon_2})$ к тангенсу половинного аргумента. Мы не будем делать выкладки, а получим два уравнения относительно величины $x = \tan(k_0 t_2 \sqrt{\varepsilon_2}/2)$, на которые распадается полученное при этом квадратное уравнение относительно x . Именно, наложение магнитной и электрической стенок в центре РС приводит к уравнениям $\tilde{y}_1 + ix\sqrt{\varepsilon_2} = 0$ и $1 + i\tilde{y}_1 x/\sqrt{\varepsilon_2} = 0$, т.е. $x = i(\tilde{y}_1/\sqrt{\varepsilon_2})^{\pm 1}$, где плюс соответствует магнитной стенке, а минус — электрической. Физическая природа получаемых резонансов при $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ различная, поскольку отражения парциальных волн двух направлений внутри второй пластины при падении их на ее обкладки различные. В частности, они отличаются фазами. Так, случай $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$ близок к рассмотренной одиночной пластине, особенно, если $t_1 \ll t_2$, случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ соответствует низкочастотному сдвигу резонансов по сравнению с одиночной пластиной из-за фактического увеличения длины на $2t_1$, а случай $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ при определенном соотношении длин может реализовывать режим почти стоячих волн с узлами на границах пластин. Для получения добротных резонансов должно быть сильное различие ДП слоев. Увеличив число слоев до пяти, получим дуплет вместо каждого из отдельных резонансных пиков. Многослойная симметричная РС создает несколько частотных пиков. Указанные пики при большом числе слоев преобразуются в полосу пропускания соответствующего фотонного кристалла. РС работает как полосовой фильтр с полосами пропускания и заграждения.

3. РС как фотонный кристалл

Описать РС с n числом периодов $d = t_1 + t_2$ можно матрицей переноса $\hat{a} = \hat{c}^n = (\hat{a}^{(1)} \hat{a}^{(2)})$, где введены матрицы переноса слоев. Однако такая матрица описывает структуру с четным числом слоев. Для

РС следует использовать полную матрицу $\hat{b} = \hat{a}\hat{a}^{(1)}$. Тогда задача решается так: $1 + R = b_{11}T + b_{12}T$, $1 - R = b_{21}T + b_{22}T$, $T = 2/(b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22})$, а для нормированной входной проводимости получаем $y_{in} = (1 - R)/(1 + R) = (b_{21} + b_{22})/(b_{11} + b_{12})$. Характеристическое уравнение имеет вид $y_{in} = 1$ или $R = 0$. Здесь все величины нормированы. Имеем $b_1 = a_{11}a_{11}^{(1)} + a_{12}a_{21}^{(1)}$ и аналогичные выражения для остальных коэффициентов полной матрицы. Элементы матрицы \hat{a} удобно получать с помощью полиномов Чебышева по рекуррентным формулам. Обозначим $X = (c_{11} + c_{22})/2$. Тогда дисперсионное уравнение для дисперсии блоховской волны в бесконечном фотонном кристалле (ФК) приобретает вид

$$\cos(k_B d) = X. \quad (10)$$

Для первой зоны Бриллюэна $-\pi < k_B d < \pi$ и $-1 < X < 1$. В запрещенной зоне волновое число $k_B = ik_B$ мнимое, т.е. $\cosh(k_B d) - X > 1$. На границах зон $X = \pm 1$. Разрешая (10) через арккосинус или логарифм, имеем $\varphi_B = k_B d = \arccos(X) + 2n\pi$ или $\varphi_B = k_B d = \pm i \ln(X - \sqrt{X^2 - 1}) + 2n\pi$, т.е. блоховские волны можно представить в виде $\exp(\mp ik_B z)$. Внутри ФК волны можно представить в виде

$$E_x = A^+ \exp(-ik_B z) + A^- \exp(ik_B z),$$

$$H_y = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0 k_B/k_0} [A^+ \exp(-ik_B z) - A^- \exp(ik_B z)].$$

Эти волны следует сшить с падающей волной

$$E_x = \exp(-ik_0 z) + \text{Re } xp(ik_0 z),$$

$$H_y = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} [\exp(-ik_0 z) - \text{Re } xp(ik_0 z)]$$

и с прошедшей волной $E_x = T \exp(-ik_0(z-l))$, $H_y = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} T \exp(-ik_0(z-l))$, где l — полная длина структуры. Однако для симметричной РС перед ней и падающей волной следует еще расположить первый слой. Это усложняет расчет. Кроме того, надо еще решать уравнение (10) и определять дисперсию $k_B(k_0)$. Такое сшивание целесообразно в случае большого числа периодов. Метод матриц переноса более общий и удобный. Однако определение границ зон на основе (10) удобно для синтеза РС с заданной полосой. Описание с помощью ФК начинает хорошо работать при $n \geq 40$. Синтез структуры с заданной полосой можно выполнить по условиям $X = \pm 1$, а затем использовать алгоритм матриц переноса для расчета параметров конечной структуры R и T . Если потерями действительно можно пренебречь, то более хорошим и быстрым методом расчета является пересчет проводимостей или импедансов, поскольку метод матриц переноса может быть неустойчивым. В этом случае прозрачность $D = |T|^2 = 1 - |R|^2$ может быть определена через коэффициент отражения.

Другая приближенная возможность анализа прохождения фотонов через квазипериодические слоистые структуры — ФК может быть основана на гомогенизации [28,29]. Гомогенизация по Рытову в этом случае выполняется достаточно просто, причем она возможна как без учета пространственной дисперсии, так и с ее учетом [29]. Слабая диссипация может приводить к почти полному прохождению, при этом туннелирование сильно зависит от угла падения, если ось анизотропии метаматериала повернута относительно нормали [29,30]. По поводу туннелирования фотонов через ФК имеет место ряд заблуждений относительно времени и скорости туннелирования [23–25]. Особенно это касается туннелирования через запрещенные зоны, причем, не только в ФК. Выше отмечено, что распространяются квазичастицы — квазифотоны, определяемые коллективными взаимодействиями фотонов и атомов. Их импульс может быть мнимым. Для определения скорости движения и времени туннелирования нельзя пользоваться интерференционными измерениями, которые часто показывают сверхсветовые скорости. Строго скорость такого движения можно определить как скорость переноса энергии квазимонохроматической волной [24,25].

4. Учет диссипации и дисперсии ДП

Диссипация связана с дисперсией ДП, однако для чисто диэлектрических РС с хорошо прозрачными слоями дисперсия обычно слабая, так что основное влияние оказывает диссипация и отражения от слоев. Ниже показано, что слабая диссипация на уровне ниже 0.01 практически не влияет на РТ и на резонансное прохождение. Существенно снижает их диссипация выше уровня 0.01. В металлических слоях имеет место очень сильная частотная дисперсия, причем в низкочастотной области (ниже ω_c) имеет место сильный скин-эффект с комплексными волнами и сильной диссипацией со слабо изменяющимися по амплитуде парциальными волнами в металлических слоях при размерах последних порядка нескольких нанометров. Основной эффект заграждения на низких частотах связан с отражением, а затухание в заграждение вносит малую долю. В области плазмоники ($\omega_c \ll \omega < \omega_p$) волны эванесцентные со слабой диссипацией. Во всех случаях замедление волн сильно растет с уменьшением частоты, а глубина проникновения всегда больше 100 nm [31]. В диссипативной структуре не может быть полного пропускания (число фотонов не сохраняется). Соответственно, нет полного РТ. В этом коренное отличие от РТ в квантовой механике, где число частиц сохраняется. Для РС с близкими к единице прозрачностью надо всячески снижать потери. Для металлических слоев с толщинами порядка 10–20 nm и более еще можно использовать ДП массивного образца металла. Если не рассматривать УФ диапазон, ДП металла хорошо описывается формулой Друде–Лоренца,

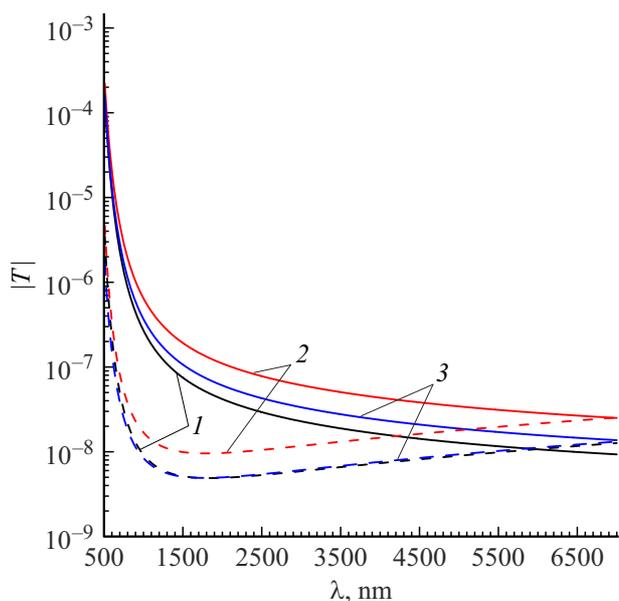


Рис. 1. Модули коэффициентов прохождения в зависимости от длины волны (nm) на основе строгой модели (сплошные кривые) и на основе гомогенизации (штриховые кривые) для структуры $t_m = t_d = 10$ nm с числом периодов 22 и толщиной структуры 440 nm. Кривые 1 — нормальное падение, кривые 2 — падение E-моды, кривые 3 — падение H-моды (угол падения $\pi/4$).

где член Лоренца ϵ_L постоянный и действительный:

$$\epsilon_m = \epsilon'_m - i\epsilon''_m = \epsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_{0c}). \quad (11)$$

Величина ϵ_L определяет коротковолновые оптические и УФ свойства металла, а в интересующем нас диапазоне эта величина действительная и порядка 10. Определять плазменную частоту ω_p в (1) будем на основе концентрации носителей, а частоту столкновений ω_{0c} и ϵ_L — из проводимости на постоянном токе $\sigma_0 = \epsilon_0\omega_p^2/\omega_c$ и из условия перехода ϵ'_m через нуль. Учет резонансных частот в члене Лоренца важен в УФ области, где следует учитывать электронные межзонные переходы и переходы между атомными уровнями. Для наших целей вполне достаточно считать этот член постоянным. Так, для серебра можно взять $\epsilon_L = 9.3$, $\omega_p = 1.57 \cdot 10^{16}$ Hz, $\omega_{0c} = 3.56 \cdot 10^{13}$ Hz, а для меди $\epsilon_L = 13.09$, $\omega_p = 1.65 \cdot 10^{16}$ Hz, $\omega_{0c} = 5.41 \cdot 10^{13}$. Частоты столкновений здесь и в (1) приведены для комнатной температуры $\tilde{T}_0 = 300$ K. В случае произвольной температуры \tilde{T} для чистых металлов имеется хорошее соответствие зависимости от температуры: $\omega_c = \omega_{0c}\tilde{T}/\tilde{T}_0$.

Результаты расчета модуля коэффициента прохождения $|T|$ квазипериодических металлодиэлектрических структур со многими периодами приведены на рис. 1. Там же представлены результаты с использованием гомогенизации. Как видно, она хорошо соответствует строгому расчету. Представленная структура прозрачна

в УФ и коротковолновой части оптического диапазона. Для прозрачности во всем оптическом диапазоне число периодов следует уменьшить, а толщину диэлектрических слоев увеличить. На рис. 2 приведены частотные характеристики прозрачности $D = |T|^2$ и модуля коэффициента отражения $|R|$ для РС с двумя и тремя металлическими слоями, разделенными вакуумными промежутками. Кривые 1 и 4 представлены для температуры в 1 K. Кривыми 2 и 5 с символами показано влияние комнатной температуры. В рассмотренном диапазоне частот для использованного отношения $\omega_{0c}/\omega_p \sim 0.001$ уменьшение температуры ниже комнатной практически не влияет на результат. Имеет место выраженная высокочастотная область со многими частотами РТ, которая резко переходит в область сильного экранирования в ИК диапазоне, когда прозрачность падает на несколько порядков. На рис. 3 приведены аналогичные результаты для РС в виде металлических слоев, разделенных диэлектрическими слоями. Диэлектрические потери не учитывались. На рис. 4 приведен расчет диэлектрических РС без учета и с учетом диэлектрических потерь в них. Дисперсия ДП не учитывалась. Диэлектрические потери ниже $\epsilon''_d/\epsilon'_d = 0.01$ практически не влияют на прохождение. Для простоты они одинаковые для всех слоев. На рис. 5 приведено влияние угла падения при р-поляризации для трехслойной металлодиэлектрической РС. Увеличение угла падения приводит к небольшому снижению заграждения в ИК области. Рассмотренные зависимости от угла падения при заданных частотах показывают резонансы, которые соответствуют углам возбуждения в структуре поверхностных плазмон-

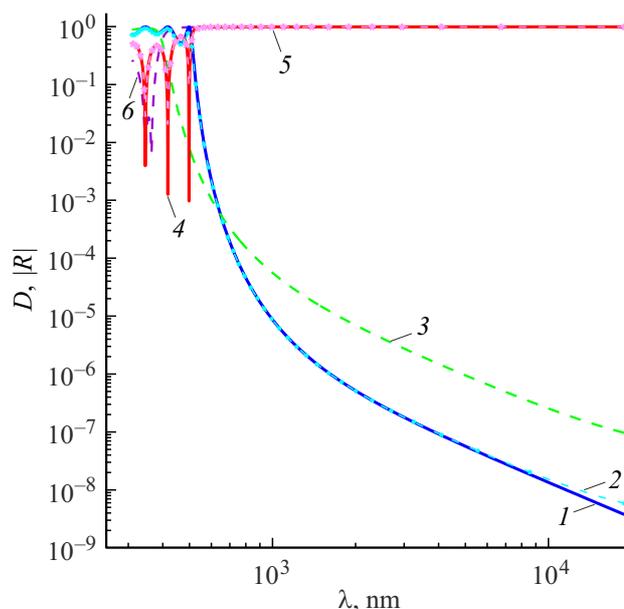


Рис. 2. Зависимости $D = |T|^2$ (кривые 1–3) и $|R|$ (4–6) от частоты длины волны (nm) для туннельной РС с тремя серебряными слоями толщины 20 nm, разделенных вакуумными промежутками 150 (кривые 1, 2, 4, 5) и 50 nm (3, 6). Кривые 1, 4 построены для $\tilde{T} = 1$ K, остальные — для $\tilde{T} = 300$ K.

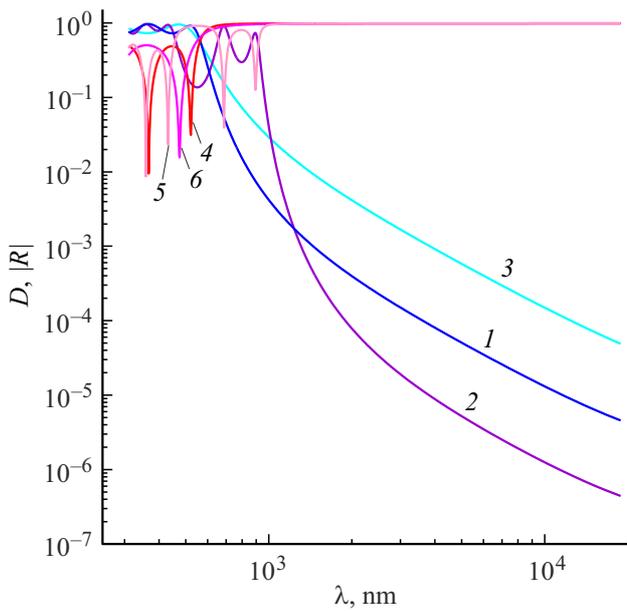


Рис. 3. Зависимости $E = |T|^2$ (кривые 1–3) и $|R|$ (кривые 4–6) от длины волны (nm) для туннельной РТ при комнатной температуре с тремя (1, 2, 4, 5) и двумя (3, 6) серебряными слоями толщины 10 nm, разделенными диэлектриком $\epsilon + d = 3$ с толщинами 50 nm (1, 3, 4, 6) и 150 nm (2, 5).

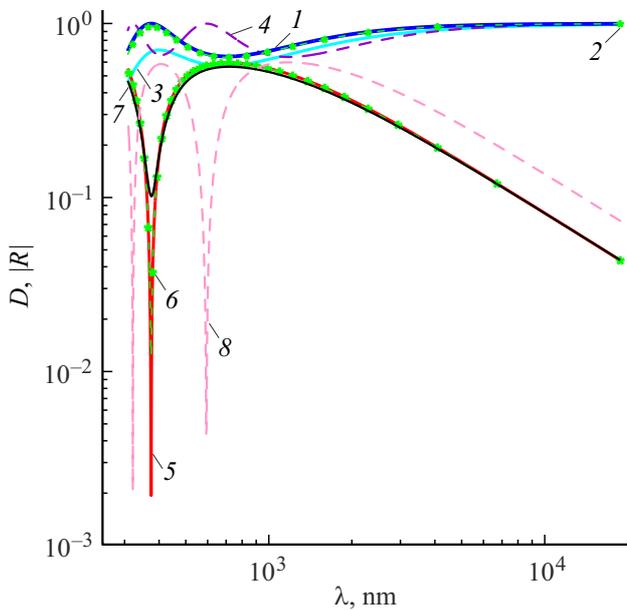


Рис. 4. Прозрачность D (кривые 1–4) и модуль $|R|$ (5–8) для трехслойной диэлектрической РС (кривые 1–3, 5–7) при $t_1 = t_3 = 10$ nm, $t_2 = 20$ nm, $\epsilon'_1 = \epsilon'_3 = 9$, $\epsilon'_2 = 3$ и пятислойной диэлектрической РС (4, 8) при $t_1 = t_3 = t_5 = 10$ nm, $t_2 = t_4 = 20$ nm, $\epsilon'_1 = \epsilon'_3 = \epsilon'_5 = 9$, $\epsilon'_2 = \epsilon'_4 = 3$ и при $\epsilon''_n/\epsilon'_n = 0$ (кривые 1, 4, 5, 8), $\epsilon''_n/\epsilon'_n = 0.01$ (2, 6), $\epsilon''_n/\epsilon'_n = 0.1$ (3, 7).

поляритонов. Во всех случаях в оптическом диапазоне резонансный характер резко выражен, тогда как в ИК диапазоне прозрачность стремится к нулю с ростом

длины волны. В таблице рассмотрено влияние диэлектрических потерь на комплексные резонансные частоты открытого пятислойного диэлектрического резонатора. Потери существенно снижают радиационную добротность, если ее обратная величина сравнима с ними. Если потери еще выше, РТ практически исчезает.

Высокая собственная добротность обратно пропорциональна ширине спектральной линии и связана с большим временем жизни уровня. Говоря другим языком, для установления таких колебаний в случае возбуждения нужно большое время, существенно пре-

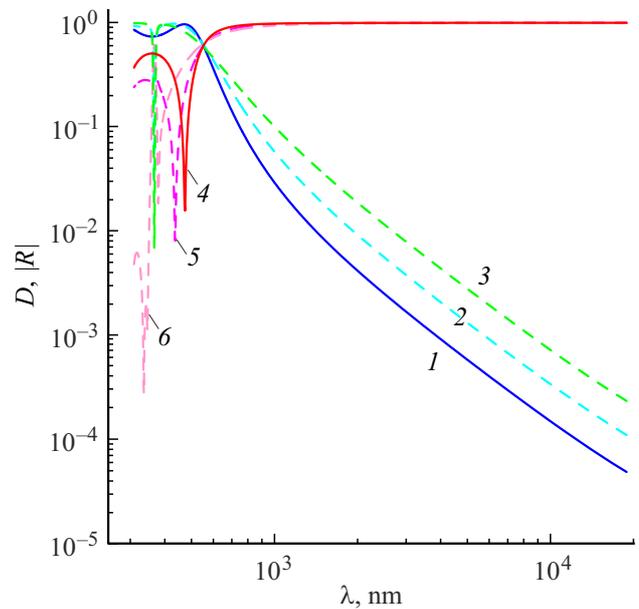


Рис. 5. Зависимость прозрачности D (кривые 1–3) и $|R|$ (2–6) от длины волны (nm) для трехслойной туннельной РС двумя серебряными слоями $t_m = 10$ nm и диэлектрическим слоем $\epsilon_d = 3$, $t_d = 50$ nm при разных углах падения: 0 (кривые 1, 4), $\pi/4$ (2, 5), $\pi/3$ (3, 6).

Резонансные частоты $\omega_n = \omega'_n + i\omega''_n$ (THz) и добротности $Q_n = \omega'_n/(2\omega''_n)$ для пятислойной диэлектрической РС, соответствующей кривым на рис. 4

Номер резонанса n	ω'_n	ω''_n	Q_n
$\epsilon''_n/\epsilon'_n = 0$			
1	3170.2	18.54	85.5
2	5850.4	17.08	171.3
$\epsilon''_n/\epsilon'_n = 0.01$			
1	3160.4	34.28	46.09
2	5848.3	46.31	63.14
$\epsilon''_n/\epsilon'_n = 0.1$			
1	3168.6	177.02	8.95
2	5835.1	308.73	9.45

вышающее $2\pi/\omega_0$. Фотон определяется монохроматической волной, для которой время прохождения не определено. Такая волна — поток фотонов одинаковой энергией $\hbar\omega_0$, где локализация каждого не определена. Можно ввести только плотность энергии в единице объема и соответственно плотность потока фотонов. Для квазимонохроматической волны с узким спектром $\Delta\omega = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, содержащей в основном фотоны с частотами, близкими ω_0 , можно говорить о примерном времени прохождения РС фотонами с частотой ω_0 . Строго время туннелирования волнового пакета определяется переносом энергии с усреднением по спектру [23]. Очевидно, результат для фотонов заданной частоты будет тем точнее, чем уже спектр. Ясно, что время туннелирования не может быть менее времени жизни резонансного уровня, т.е. времени, необходимого для установления колебаний в структуре. Это же относится и к туннелированию через разрешенные зоны ФК. Указанные зоны должны сформироваться за счет многократных отражений, на что нужно определенное время. Такую картину, например, демонстрируют FDTD-пакеты программ электродинамического моделирования: весьма слабый сигнал (предвестник) на выходе РС длины d появляется спустя время $\tau = d/c$ после подхода к ней фронта волнового пакета, а затем после достаточно большого времени установления сигнал усиливается и становится почти гармоническим. При туннелировании через запрещенную зону появившийся спустя время τ сигнал начинает постепенно подавляться. Это еще раз подчеркивает тот факт, что туннелирование фотонов есть коллективный многофотонный эффект их взаимодействия с веществом.

5. Использование туннельных РС при ИК экранировании оконных стекол

К оконным стеклам в настоящее время предъявляются весьма высокие требования различного характера [32]. Одним из важнейших требований является свойство не пропускать излучение ИК диапазона и пропускать весь оптический диапазон. Это связано с тем, что стенки зданий практически не пропускают излучение ИК диапазона, но оконные стекла пропускают его весьма хорошо. При комнатной температуре T_0 порядка 300 К внутри здания тепловое излучение можно с достаточно хорошим приближением считать равновесным планковским, т.е. эквивалентным излучению абсолютно черного тела. Если комнатная температура $\tilde{T}_0 = 27^\circ\text{C}$, а температура на улице $\tilde{T} = -23^\circ\text{C}$, то при разности температур в 50° тепловой поток через окна здания наружу весьма велик (394 Вт с квадратного метра без учета небольшого поглощения в стекле). Если же температура на улице летом $\tilde{T} = 37^\circ\text{C}$, то разность температур будет десять градусов, и соответствующий поток тоже существенен. Максимальная плотность теплового излучения есть

$u_p = \hbar\omega^3 f_{FD}(\omega, \tilde{T})/(\pi^2 c^3)$, где обозначена функция Бозе–Эйнштейна $f_{FD}(\omega, \tilde{T}) = [\exp(\hbar\omega/(k_B\tilde{T})) - 1]^{-1}$. Если площадь окон S , то поток энергии в секунду через почти прозрачные оконные стекла равен $P = \sigma_{SB}((\tilde{T})^4 - \tilde{T}_0^4) W$. Здесь обозначена постоянная Стефана–Больцмана. Максимум потока при температурах 300 ± 500 К лежит в диапазоне длин волн от 8.27 до 11.59 μm , т.е. в середине ИК диапазона. Таким образом, задача состоит в экранировании ИК диапазона с максимумом экранирования для длин волн порядка 10 μm при достаточно хорошем пропускании в оптической области. Использовать в этом случае только диэлектрические слои не эффективно, поскольку, выполнив резонансное прохождение на коротких оптических длинах волн, мы не получим заграждение на длинных ИК волнах. Хорошо отражают электромагнитное излучение металлы. В оптике тонкие пленки металлов с толщиной в несколько нанометров полупрозрачны. Имеется большое число публикаций по слоистым фотонным структурам (см., например, [33–35] и литературу там). Однако по РТ фотонов в металлодиэлектрических структурах публикаций немного. В работах [36,37] рассмотрены многослойные экраны с такими пленками и чередующимися слоями диэлектрика, например, из SiO_2 . Их можно выполнить на стекле толщиной в несколько миллиметров. Тогда задача состоит в синтезе оптимальной структуры такого покрытия на стекле. При этом возможно сильное подавление ИК излучения при сохранении хорошей прозрачности в оптическом диапазоне [36,37]. В СВЧ диапазоне с ростом длины волны прозрачность также улучшается, что, например, важно для сотовой связи. Однако технологически выполнить такое многослойное покрытие сложно и дорого. Оконное стекло толщины несколько миллиметров можно симметрично покрывать РС с обеих сторон. Другой способ — выполнить покрытие на одной стороне стекла, а затем закрыть его другим таким же стеклом, т.е. выполнить РС в центре двойного стекла. Это более дорогая технология. Более дешево, но менее эффективно выполнять несимметричные покрытия. Наиболее дешевый способ — внедрение металлических наночастиц в стекло на некоторую глубину (см., например, [32]). Его можно осуществить, внедрив наночастицы в расплав стекла и нанеся тонкий слой расплава на основное стекло. Таким способом можно выполнить несколько слоев с толщиной порядка сотен нанометров. Эффективную ДП таких слоев можно оценить по формуле Бругемана (см. [29]), или на основе простой формулы гомогенизации $\epsilon_{\perp}^{ef} = c_m \epsilon_m + (1 - c_m) \epsilon_d$. Здесь c_m — концентрация металлических частиц. Для слоистых структур эта формула более точная, чем Бругемана. Она соответствует тому факту, что глубина проникновения в металл существенно меньше размеров наночастиц, т.е. поле в них однородное и имеет дипольный характер [31]. Соответственно для поляризации

частиц можно написать $\mathbf{P}_m = c_m \varepsilon_0 (\varepsilon_m - \varepsilon_d) \mathbf{E}$. Учитывая $\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_d$, $\mathbf{P}_d = (1 - c_m) \varepsilon_0 \varepsilon_d \mathbf{E}$, имеем указанное соотношение. Отметим, что если в формулу Бруггемана ввести коэффициенты (факторы) деполяризации, то для плоских слоев она соответствует приведенной. Именно, многофазная такая формула имеет вид

$$\sum_{j=1}^n c_j \frac{\varepsilon_\alpha^{ef} - \varepsilon_j}{\varepsilon_\alpha^{ef} + L_\alpha (\varepsilon_j - \varepsilon_\alpha^{ef})} = 0, \quad \alpha = x, y, z. \quad (12)$$

Для плоских слоев $L_x = L_y = 0$, $L_z = 1$ сразу получаем гомогенизацию по Рыгову [28,29]: $\varepsilon_\perp^{ef} = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2$. Внедряя в стекло металлические цилиндрические частицы с магнитными свойствами в присутствии магнитного поля, можно управлять их ориентацией вдоль поля при застывании слоя стекла и создавать оптически анизотропные структуры. Они лучше пропускают в направлении ориентации частиц, т.е. не при нормальном падении, а когда ось анизотропии повернута относительно нормали и волна падает вдоль этой оси [29,30]. Возникает эффект как бы жалюзи. Получить тензор эффективной ДП на основе формулы (12) в этом случае можно, используя матрицу поворота [30]. Отметим, что формула Гарнетта для металлических частиц не применима [38]. Она приводит к резонансам типа локализованных плазмонов в области частот, где $\varepsilon_m = -2\varepsilon_d$, т.е. на частотах $\omega \approx \omega_p / \sqrt{\varepsilon_L + 2\varepsilon_d}$. При этом ε^{ef} меняет знак. Результаты сравнения формулы (12) для сферических частиц и для слоев с результатами по приведенной формуле для ε_\perp^{ef} даны на рис. 4. Отрицательная реальная часть ДП по формуле Бруггемана получается при превышении порога перколяции, т.е. формула требует сильного насыщения стекла металлическими частицами. Реально это завышенное требование. Так же отметим, что формула Бруггемана хуже работает в окрестности порога перколяции, и ее следует использовать при большой концентрации $c_m > 1/2$. Обычное оконное стекло, скажем, толщины 4 мм для средней длины волны зеленого света имеет толщину в 12 600 длин волн. Это означает, что отражение по мощности $|R|^2$ в оптическом диапазоне изменяется с частотой весьма часто в небольших пределах от нуля до 0.07, т.е. имеется много частот полного туннелирования. Их также много и в ИК диапазоне, но там они расположены реже. В этом диапазоне следует учитывать потери в стекле. Выполнение РС на стекле приводит к наложению таких мелких осцилляций на сильно выраженные резонансы, причем в ИК диапазоне имеет место сильное заграждение. Мы не учитывали дисперсию и потери стекла в ИК диапазоне. По сравнению с влиянием металлических РС это слабый эффект. Ближний инфракрасный диапазон (NIR) и коротковолновый инфракрасный диапазон (SWIR) хорошо проходят через обычное оконное стекло. Средневолновое ИК излучение поглощается сильнее. Принципиально эти эффекты учесть можно, но они вносят слабый вклад.

Заключение

Рассмотрены структуры, почти полностью пропускающие фотоны определенных частот, т.е. осуществляющие РТ. Полное РТ связано с пренебрежимо малыми потерями, которые можно достичь в области сверхнизких температур. РТ связано с комплексными собственными (свободными) резонансными частотами, и оно тем ближе к полному туннелированию, чем более добротен открытый резонатор, соответствующий РС. Для простейших РС приведены характеристические уравнения, определяющие такие частоты. Их нахождение аналогично определению дисперсии поверхностных плазмон-поляритонов в структуре и требует итерационного решения характеристического уравнения. Интересно отметить, что в обоих случаях условием существования решений является нулевой коэффициент отражения. Только в первом случае ищутся комплексные частоты при заданных действительных компонентах волнового вектора падающей волны, а во втором — комплексные значения волнового вектора в вакууме, при заданных действительных частотах. Эти комплексные значения волнового вектора в вакууме определяют характер волны: она может быть втекающей поверхностной, или же вытекающей (антиповерхностной) [39,40]. При изменении частоты возможен переход от одного типа волн к другому. Во втекающей волне энергия из вакуума передается структуре и поглощается. В вытекающей волне запасенная в структуре энергия излучается в вакуум, поэтому волна в продольном направлении затухает, даже если диссипации нет. Частота перехода определяет отсечку для поверхностной волны и соответствует распространению со скоростью света. Интересно отметить, что для полупространства в отсутствие потерь это условие соответствует условию Брюстера [39]. Мы рассмотрели простейший случай нормального падения. В случае E -волн и H -волн (p -поляризации и s -поляризации) отличие состоит только в изменении волновых сопротивлений или проводимостей, в которые войдут компоненты вектора, касательные к поверхностям раздела. Увеличение числа слоев приводит к увеличению резонансных пиков пропускания, т.е. к формированию зоны пропускания. Так, осуществляется переход к структуре ФК. Для РС с большим числом периодов приведен расчет на основе гомогенизации. Следует также отметить, что в рассматриваемых структурах парадокс Хартмана [41] не имеет места [23–25].

Применение РТ продемонстрировано на примере ИК экранов для оконных стекол, позволяющих снизить на несколько порядков пропускание теплового излучения, при этом РТ достигается в оптическом диапазоне. Рассмотрено создание покрытий методом внедрения металлических частиц в слой стекла и определение эффективной диэлектрической проницаемости таких слоев. При воздействии волн, падающих под разными углами в рассматриваемых покрытиях, возможно возбуждение поверхностных плазмонов. Это означает, что при рас-

смотрении указанных поверхностей под разными углами в отраженном свете в оптическом и ИК диапазонах должны наблюдаться блики разного цвета (частоты), изменяющиеся при изменении углов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (№ FSRR-2023-0008).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] R. Tsu, L. Esaki. Appl. Phys. Lett., **22** (11), 562 (1973). DOI: 10.1063/1.1654509
- [2] L.L. Chang, L. Esaki, R. Tsu. Appl. Phys. Lett., **24**, 593 (1974). DOI: 10.1063/1.1655067
- [3] L. Esaki. J. Quantum Electron., QE-**22** (9), 1611(1986). DOI: 10.1007/978-94-009-3073-5_4
- [4] Y. Arakawa, A. Yariv. J. Quantum Electron., QE-**22** (9), 1887 (1986). DOI: 10.1109/JQE.1986.1073185
- [5] E.X. Ping, H.X. Jiang. Phys. Rev. B, **40** (17), 11792 (1989). DOI: 10.1103/PhysRevB.40.11792
- [6] М.В. Давидович. Письма в ЖЭТФ, **110** (7), 465 (2019). [M.V. Davidovich. JETP Lett., **110**, 472 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19190068]
- [7] M.V. Davidovich, I.S. Nefedov, O.E. Glukhova, M.M. Slepchenkov. J. Appl. Phys., **130**, 204301(1–11) (2021). DOI: 10.1063/5.0067763
- [8] L.D. Macks, S.A. Brown, R.G. Clark, R.P. Starrett, M.A. Reed, M.R. Deshpande, C.J.L. Fernando, W.R. Frensley. Phys. Rev. B, **54** (7), 4857 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevB.54.4857
- [9] J.M. Xu, V.V. Malov, L.V. Iogansen. Phys. Rev. B, **47** (12), 7253 (1993). DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.47.7253
- [10] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **128** (5), 922 (2005). [V.F. Elesin. JETP, **101**, 795 (2005). DOI: 10.1134/1.2149060]
- [11] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **116** (2), 704 (1999). [V.F. Elesin. JETP, **89**, 377 (1999). DOI: 10.1134/1.558994]
- [12] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **119** (4), 816 (2001). [V.F. Elesin. JETP, **92**, 710 (2001). DOI: 10.1134/1.1371352]
- [13] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **121** (4), 925 (2002). [V.F. Elesin. JETP, **94**, 794 (2002). DOI: 10.1134/1.1477905]
- [14] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **144** (5), 1086 (2013). [V.F. Elesin. JETP, **117**, 950 (2013). DOI: 10.1134/S1063776113130104]
- [15] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **145** (6), 1078 (2014). [V.F. Elesin. JETP, **118**, 951 (2014). DOI: 10.1134/S1063776114060041]
- [16] O. Pinaud. Appl. Phys., **92** (4), 1987 (2002). https://doi.org/10.1063/1.1494127
- [17] И.И. Абрамов, И.А. Гончаренко, Н.В. Коломейцева. ФТП, **39** (9), 1138 (2005). [I.I. Abramov, I.A. Goncharenko, N.V. Kolomejtseva. Semiconductors, **39** (9), 1102 (2005). DOI: 10.1134/1.2042607]
- [18] V.N. Mantsevich, N.S. Maslova, P.I. Arseyev. Solid State Comm., **152** (16), 1545 (2012). DOI: 10.1016/j.ssc.2012.05.027
- [19] Л.В. Иогансен. ЖЭТФ, **48**, 207 (1963). [L.V. Iogansen. Soviet Phys. JETP, **18** (1), 146 (1964).]
- [20] D.J. Day, Y. Chung, C. Webb, J.N. Eckstein, J.M. Xu, M. Sweeny. Appl. Phys. Lett., **57** (12), 1260 (1990). DOI: 10.1063/1.103503
- [21] T.C.L.G. Sollner, W.D. Goodhue, P.E. Tannenwald, C.D. Parker, D.D. Peck. Appl. Phys. Lett., **43** (6), 588 (1983). DOI: 10.1063/1.94434
- [22] Е.А. Нелин. УФН, **177** (3), 307 (2007). [E.A. Nelin. Phys. Usp., **50** (3), 293 (2007). DOI: 10.1070/PU2007v050n03ABEH006091]
- [23] М.В. Давидович. ЖЭТФ, **157** (1), 44 (2020). [M.V. Davidovich. JETP, **130**, 35 (2020). DOI: 10.1134/S1063776119120161]
- [24] М.В. Давидович. Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Серия Физико-математические науки, **24** (1), 22 (2020). [M.V. Davidovich. J. Samara State Tech. Univer. Ser. Phys. Mathemat. Sci., **24** (1), 22 (2020).]
- [25] М.В. Давидович. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Физика, **21** (2), 116 (2021). [M.V. Davidovich. Izvestiya of Saratov Univer. New Series. Series: Physics, **21** (2), 116 (2021). DOI: 10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132]
- [26] A. Alú, M.G. Silveirinha, A. Salandrino, N. Engheta. Phys. Rev. B, **75**, 155410(1–13) (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.75.155410
- [27] М.В. Давидович. Квант. электрон., **47** (6), 567 (2017). [M.V. Davidovich. Quant. Electron., **47** (6), 567 (2017). DOI: 10.1070/QEL16272]
- [28] С.М. Рытов. ЖЭТФ, **29** (5), 605 (1955). [S.M. Rytov. Sov. Phys. JETP, **2** (3), 466 (1956).]
- [29] М.В. Давидович. УФН, **189** (12), 1250 (2019). [M.V. Davidovich. Phys. Usp., **62**, 1173 (2019). DOI: 10.3367/UFNe.2019.08.038643]
- [30] М.В. Давидович. Компьютерная оптика, **45** (1), 48 (2021). [M.V. Davidovich. Comp. Optics, **45** (1), 48 (2021). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-673]
- [31] М.В. Давидович. ЖТФ, **92** (10), 1537 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.10.53246.26-22 [M.V. Davidovich. DOI: 10.1134/S106378422207012X]
- [32] В.А. Майоров. Опт. и спектр., **124** (4), 559 (2018). DOI: 10.21883/OS.2018.04.45759.240-17 [V.A. Maiorov. Opt. Spectr., **124** (4), 594 (2018). DOI: 10.1134/S0030400X18040112]
- [33] А.М. Мерзликин. *Мезоскопические эффекты когерентного распространения и локализации поляризованных электромагнитных волн в фотонных кристаллах и неупорядоченных слоистых средах.* (Дисс. д.ф.-м.н. М., 2016)
- [34] L.I. Deych, A. Yamilov, A.A. Lisyans. Phys. Rev. B, **64**, 075321(1–13) (2001). DOI: 10.1103/PhysRevB.64.075321
- [35] D.S. Citrin, W. Harshawardhan. Pys. Rev. B, **60** (3), 1759 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevB.60.1759
- [36] М.В. Давидович, Р.К. Яфаров, Д.М. Доронин, П.А. Шиловский. Физика волновых процессов и радиотехнические системы, **15** (2), 19 (2012).
- [37] М.В. Давидович, И.А. Корнев. Компьютерная оптика, **43** (5), 765 (2019). [M.V. Davidovich, I.A. Kornev. Comp. Opt., **43** (5), 765 (2019). DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-765-772]

- [38] Б.А. Беляев, В.В. Тюрнев. ЖЭТФ, **127** (4), 608 (2018).
[B.A. Belyaev, V.V. Tyurnev. JETP, **127**, 608 (2018).
DOI: 10.1134/S1063776118100114]
- [39] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны* (Радио и связь, М., 1988)
- [40] М.В. Давидович. Радиотехника и электроника, **63** (6), 499 (2018). [M.V. Davidovich. J. Comm. Technol. Electron. **63**, 497 (2018). DOI: 10.1134/S1064226918060050]
- [41] А.Б. Шварцбург. УФН, **177** (1), 43 (2007). [A.B. Shvartsburg. Phys. Usp., **50**, 37 (2007).
DOI: 10.1070/PU2007v050n01ABEH006148]