

## Умножение носителей заряда в кремниевых $P-N$ -переходах

© Ю.Н. Серезкин<sup>¶</sup>, А.А. Шестеркина

Мордовский государственный университет,  
430000 Саранск, Россия

(Получена 5 ноября 2002 г. Принята к печати 21 ноября 2002 г.)

Рассмотрены зависимости коэффициентов умножения носителей заряда  $M$  от приложенного напряжения в кремниевых  $p-n$ -переходах с напряжением лавинного пробоя 10–3000 В. Предложены аналитические выражения для аппроксимации этих зависимостей для электронов, дырок и генерационного тока. В диапазоне изменения коэффициентов умножения 1.01–3.0 относительная среднеквадратичная ошибка аппроксимации ( $M - 1$ ) составляет несколько процентов. Это более чем на порядок величины лучше, чем при аппроксимации широко распространенным выражением Миллера–Молла.

Предполагается, что аналитические выражения предлагаемого вида будут пригодны для аппроксимации зависимостей коэффициентов умножения от приложенного напряжения в большинстве полупроводниковых материалов.

Умножение носителей заряда в обратносмещенных  $p-n$ -переходах играет важную роль в определении свойств многих полупроводниковых приборов: биполярных транзисторов, тиристоров, лавинных фотодиодов и т. д. Количественными характеристиками этого процесса являются коэффициенты умножения носителей заряда и генерационного тока  $p-n$ -перехода.

В общем случае коэффициенты умножения электронов и дырок  $M_{n,p}$  являются сложными неявными функциями приложенного напряжения [1]:

$$M_{n,p} = 1/(1 - J_{n,p}), \quad (1)$$

$$J_n = \int_0^L \alpha_n \exp\left(-\int_0^x (\alpha_n - \alpha_p) dx'\right) dx, \quad (2)$$

$$J_p = \int_0^L \alpha_p \exp\left(\int_x^L (\alpha_n - \alpha_p) dx'\right) dx, \quad (3)$$

где  $\alpha_n$  и  $\alpha_p$  — коэффициенты ударной ионизации электронов и дырок соответственно,  $L$  — ширина области объемного заряда  $p-n$ -перехода. Для большинства полупроводников зависимости  $\alpha_n$  и  $\alpha_p$  от напряженности электрического поля  $E$  имеют вид

$$\alpha(E) = A \exp(- (b/E)^m) \quad (4)$$

при  $m = 1$  или  $2$ . Поправки  $b$  и  $A$  определяются экспериментальным путем. При подобной зависимости коэффициенты умножения могут быть рассчитаны лишь численными методами. Между тем для анализа работы и расчета параметров приборов желательно иметь более простые и явные зависимости  $M(U)$ .

Первое аппроксимационное выражение такого рода, предложенное Миллером [2] и впоследствии модифици-

рованное Моллом [3], имеет вид

$$M = \left(1 - \left(\frac{1}{f} \frac{U}{U_B}\right)^n\right)^{-1}, \quad (5)$$

где  $U_B$  — напряжение лавинного пробоя  $p-n$ -перехода,  $f$ ,  $n$  — параметры, зависящие от типа умножаемых носителей заряда, типа  $p-n$ -перехода и его напряжения пробоя.

Однако впоследствии выяснилось, что это выражение хорошо описывает зависимости  $M(U)$  лишь в редких случаях. Оно, например, плохо件годно для умножения электронов в кремниевых  $p-n$ -переходах. Использовались и другие аппроксимационные выражения [4–7], но их точность также оказалась недостаточной. При этом все предлагаемые выражения никак не обосновывались. Лишь в [7] оно получено на основе другого приближенного соотношения, но ориентировано на относительно высокие коэффициенты умножения и сложно для практического использования.

Рассмотрим частный случай равенства коэффициентов ионизации электронов и дырок. При  $\alpha_n(E) = \alpha_p(E)$  ионизационные интегралы (2) и (3) существенно упрощаются и могут быть выражены через трансцендентные функции. В кремнии  $m = 1$ , тогда

$$J = ALE_2(z) \quad (6)$$

для резких  $p-n$ -переходов и

$$J = AL(z/2) \exp(-z/2) \cdot (K_1(z/2) - K_0(z/2)) \quad (7)$$

для плавных  $p-n$ -переходов [1]. Здесь  $E_2(z)$  — экспоненциальный интеграл второго рода,  $K(z/2)$  — модифицированная функция Бесселя мнимого аргумента и  $z = b/E_m$ . Анализ показывает, что обычно при умножении носителей заряда максимальная напряженность поля в  $p-n$ -переходах  $E_m$  для большинства полупроводников значительно меньше параметра  $b$  вплоть до пробивных полей. Поэтому аргумент  $z$  вышеуказанных функций значительно превышает единицу, особенно при

<sup>¶</sup> E-mail: Serezhkin\_YN@mail.ru

**Таблица 1.** Результаты аппроксимации умножения электронов в резком  $p^+ - n$ -переходе с  $N_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ 

$U, \text{В}$	$U/U_B$	$M_n - 1$				
		Расчетные значения по (1) и (2)	Аппроксимация по (9)	Погрешность, %	Аппроксимация по (5)	Погрешность, %
56.93	0.2125	0.0045	0.0043	-5.1	0.0097	115
69.40	0.2591	0.0131	0.0127	-3.2	0.0197	51
86.52	0.3230	0.0389	0.0388	-0.2	0.0437	12.2
106.91	0.3991	0.1036	0.1048	1.1	0.0966	-6.8
130.21	0.4861	0.2495	0.2521	1.0	0.2139	-14.3
151.78	0.5667	0.4969	0.4973	0.1	0.4329	-12.9
163.38	0.6100	0.7008	0.6969	-0.5	0.6433	-8.2
175.71	0.6560	0.9999	0.9883	-1.2	1.0224	2.3
183.91	0.6866	1.2651	1.2457	-1.5	1.4603	15.4
192.79	0.7198	1.6362	1.6059	-1.8	2.3406	43.1
199.80	0.7459	2.0131	1.9727	-2.0	3.8656	92.1
212.65	0.7939	2.9971	2.9382	-2.0	90.5	2920

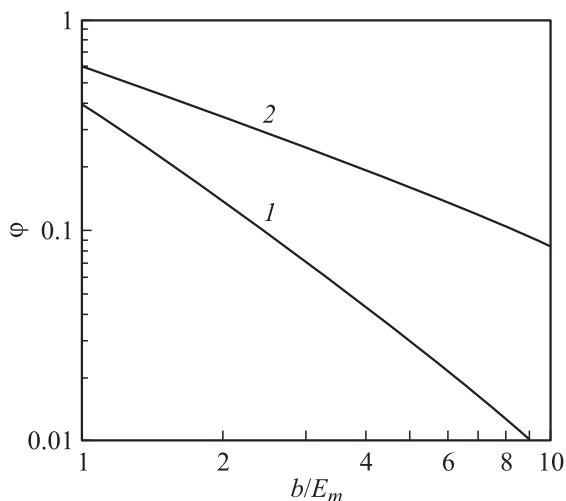
$U \ll U_B$ . Используя свойства этих функций при больших значениях аргумента [8], ионизационные интегралы (6) и (7) можно представить в виде

$$J = B_\varphi(z)\alpha(z),$$

где  $\varphi(z)$  — функция, медленно изменяющаяся с изменением напряженности поля,  $\alpha(z)$  — коэффициент ионизации. На рис. 1 представлены зависимости  $\varphi(z)$  для  $z > 1$ . Как видно из рисунка, в достаточно широком диапазоне изменения  $z$  эти функции могут быть представлены степенными зависимостями. В отдельно взятом  $p-n$ -переходе максимальная напряженность поля при изменении  $M$  от 1.01 до  $\infty$  обычно возрастает не более чем вдвое. Поэтому для аппроксимации ионизационных интегралов может быть использовано выражение

$$J = (U_B/U)^k \exp(-a((U_B/U)^\chi - 1)), \quad (8)$$

где  $\chi = 1/2$  для резких и  $2/3$  для плавных переходов соответственно,  $k$  и  $a$  — параметры аппроксимации.



**Рис. 1.** Функция  $\varphi$  для резкого (1) и плавного (2)  $p-n$ -перехода.

Если  $\alpha_n(E) \neq \alpha_p(E)$ , то аппроксимация будет тем лучше, чем больше отношение  $b/E_m$  и чем меньше различаются коэффициенты ионизации электронов и дырок. В кремнии при напряжении пробоя  $z > 1.5$  даже в самых низковольтных  $p-n$ -переходах. Однако коэффициенты ионизации электронов и дырок различны и их отношение зависит от напряженности поля, изменяясь приблизительно от 1.1 до 20 с изменением напряженности поля от  $8 \cdot 10^5$  до  $2.5 \cdot 10^5 \text{ В/см}$ .

Для анализа пригодности выражения (8) по соотношениям (1)–(3) численными методами рассчитывались ионизационные интегралы и коэффициенты умножения. Коэффициенты ионизации электронов и дырок принимались в виде (4) при  $m = 1$  и  $A = 6.3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ ,  $b = 1.23 \cdot 10^6 \text{ В/см}$  для электронов и  $A = 1.74 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ ,  $b = 2.18 \cdot 10^6 \text{ В/см}$  для дырок, считающимися в кремнии на настоящее время наиболее достоверными [9].

Максимально допустимое напряжение биполярных транзисторов в схеме с общим эмиттером и блокирующее напряжение тиристоров в обратном направлении определяются критерием  $\alpha_0 M = 1$ , где  $\alpha_0$  — коэффициент усиления по току соответствующего транзистора без учета умножения носителей заряда. Исходя из этого критерия, параметры аппроксимации  $k$  и  $a$  определялись для диапазона изменения  $M$  от 1.01 до 3, представляющего наибольший интерес при анализе свойств биполярных транзисторов и тиристоров. Параметры определения методом наименьших квадратов после линеаризации выражения (8) логарифмированием. Анализировались резкие и плавные  $p-n$ -переходы с напряжением пробоя от 10 до 3000 В.

Оказалось, что соотношение (8) аппроксимирует зависимости  $M(U)$  намного лучше, чем соотношение (5) Миллера–Молла. При этом точность аппроксимации можно улучшить, если наряду с  $k$  и  $a$  варьировать и параметр  $\chi$ . Однако если определять параметры  $k$ ,  $a$ ,  $\chi$  методом наименьших квадратов, то при некотором значении напряжения пробоя параметр  $\chi$  меняет знак,

**Таблица 2.** Параметры аппроксимации коэффициентов умножения дырок в плавном переходе

$\text{grad} N_a - N_d , \text{см}^{-4}$	$U_{br}, \text{В}$	$a$	$k$	$\delta, \%$
$10^{16}$	3488.72	-5.729	4.925	0.003
$10^{17}$	1346.06	-3.622	7.166	0.003
$10^{18}$	531.22	-2.120	7.991	0.003
$10^{19}$	215.59	-1.081	7.875	0.002
$10^{20}$	90.69	-0.389	7.177	0.002
$10^{21}$	40.00	0.054	6.172	0.007
$10^{22}$	18.85	0.332	5.067	0.020
$10^{23}$	9.79	0.486	3.946	0.045

проходя через нулевое значение. При этом значения параметров  $k$  и  $a$  сильно возрастают и стремятся к бесконечности. Это весьма неудобно при описании зависимости  $k$  и  $a$  от напряжения лавинного пробоя.

Анализ показал, что для исследуемого диапазона пробивных напряжений можно выбрать другие, также не зависящие от напряжения пробоя, значения параметра  $\chi$ , чем получены выше. Наиболее оптимальными для кремния в нашем случае оказались значения  $\chi = -1/2$  для электронов и  $\chi = -4$  для дырок и генерационного тока как в резких, так и в плавных переходах. Поэтому окончательно для аппроксимации коэффициентов умножения были выбраны соотношения

$$1/M_n(U) = 1 - (U/U_B)^k \exp[-a((U/U_B)^{1/2} - 1)] \quad (9)$$

и

$$1/M_{p,g}(U) = 1 - (U/U_B)^k \exp[-a((U/U_B)^4 - 1)]. \quad (10)$$

В табл. 1 в качестве примера представлены результаты аппроксимации зависимости  $M_n(U)$  для  $p$ - $n$ -перехода с концентрацией донорной примеси в базе  $N_d = 10^{15} \text{см}^{-3}$ . Расчетное значение напряжения пробоя  $U_B = 267.85 \text{В}$ . Значения параметров аппроксимации составили  $k = 9.845$ ,  $a = 18.160$ .

Там же даны результаты аппроксимации по формуле (5) Миллера–Молла ( $f = 0.80$ ,  $n = 3.52$ ). Относительная среднеквадратичная погрешность аппроксимации для  $(M_n - 1)$  по формуле (9) в диапазоне изменения  $M_n$  от 1.01 до 3 составляет около 3%, в то время как для соотношения Миллера–Молла она более 40%.

В табл. 2 представлены параметры аппроксимации и относительная среднеквадратичная погрешность  $\delta$  для  $(M_p - 1)$  в диапазоне изменения  $M_p$  от 1.01 до 3 для дырок в плавных  $p$ - $n$ -переходах. Как видно из результатов таблицы, выражение (10) очень хорошо аппроксимирует коэффициенты умножения дырок.

В целом коэффициенты умножения в плавных  $p$ - $n$ -переходах аппроксимируются лучше, чем в резких, для дырок — лучше, чем для электронов, в низковольтных  $p$ - $n$ -переходах — лучше, чем в высоковольтных.

Все эти тенденции хорошо объясняются различием в отношениях  $b/E_m$  и  $\alpha_n/\alpha_p$ . Чем ближе при напряжении пробоя  $\alpha_n/\alpha_p$  к единице и чем больше  $b/E_m$ , тем лучше выполняются предположения, при которых получена аппроксимационная формула для коэффициентов умножения.

На рис. 2 и 3 представлены зависимости параметров аппроксимации от напряжения лавинного пробоя  $p$ - $n$ -перехода. Для  $n^+$ - $p$ -переходов характер зависимостей  $k$  и  $a$  мало отличается от соответствующих кривых для  $p^+$ - $n$ -переходов и на рисунках не показан. Как видно из рис. 2, параметр  $a$  для электронов при всех значениях пробивных напряжений отличается от нуля,

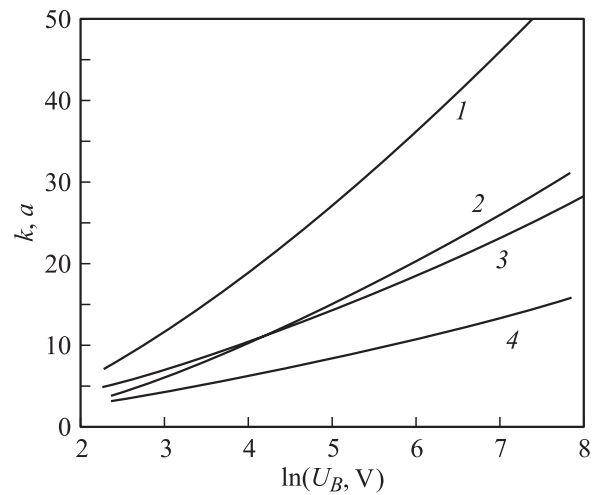
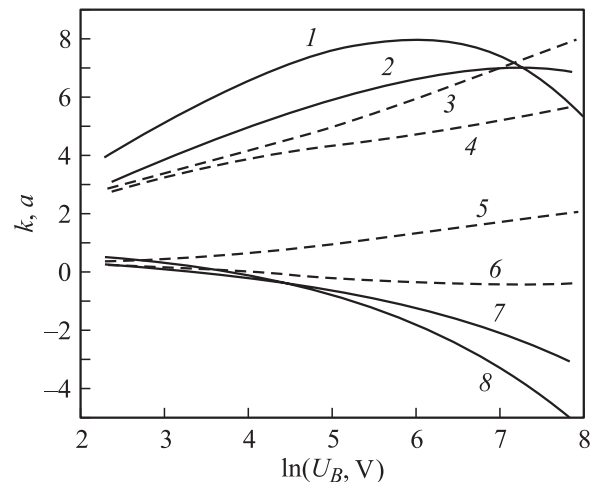
**Рис. 2.** Параметры аппроксимации  $k$  и  $a$  для умножения электронов: 1, 2 —  $a$  для плавного и резкого  $p^+$ - $n$ -перехода соответственно, 3, 4 —  $k$  для плавного и резкого  $p^+$ - $n$ -перехода соответственно.**Рис. 3.** Параметры аппроксимации  $k$  и  $a$  для умножения дырок и генерационного тока. Сплошные линии для умножения дырок, пунктирные — для генерационного тока. Верхняя группа кривых,  $k$ : 1, 3 — плавный  $p$ - $n$ -переход, 2, 4 — резкий  $p^+$ - $n$ -переход. Нижняя группа кривых,  $a$ : 5, 8 — плавный  $p$ - $n$ -переход, 6, 7 — резкий  $p^+$ - $n$ -переход.

Таблица 3. Коэффициенты аппроксимационных формул для параметров  $k$  и  $a$ 

Умножение	Тип перехода	Параметр	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
Электронов	$p^+ - n$	$k$	$-3.958 \cdot 10^{-2}$	1.051	$1.345 \cdot 10^{-1}$	$-1.165 \cdot 10^{-3}$
		$a$	-2.607	1.784	$3.970 \cdot 10^{-1}$	$-9.346 \cdot 10^{-3}$
	$n^+ - p$	$k$	$-4.972 \cdot 10^{-1}$	1.319	$9.432 \cdot 10^{-2}$	$-2.213 \cdot 10^{-4}$
		$a$	-3.588	2.673	$2.659 \cdot 10^{-1}$	$4.221 \cdot 10^{-3}$
	Плавный	$k$	$-4.666 \cdot 10^{-1}$	1.687	$2.682 \cdot 10^{-1}$	$-3.800 \cdot 10^{-3}$
		$a$	-3.383	2.987	$7.000 \cdot 10^{-1}$	$-1.668 \cdot 10^{-3}$
Дырок	$p^+ - n$	$k$	$9.504 \cdot 10^{-1}$	$6.157 \cdot 10^{-1}$	$1.786 \cdot 10^{-1}$	$-2.032 \cdot 10^{-2}$
		$a$	$7.324 \cdot 10^{-1}$	$-2.458 \cdot 10^{-1}$	$3.817 \cdot 10^{-2}$	$-8.677 \cdot 10^{-3}$
	$n^+ - p$	$k$	1.155	$2.640 \cdot 10^{-1}$	$2.630 \cdot 10^{-1}$	$-2.802 \cdot 10^{-2}$
		$a$	$8.519 \cdot 10^{-1}$	$-2.823 \cdot 10^{-1}$	$6.060 \cdot 10^{-2}$	$-1.147 \cdot 10^{-2}$
	Плавный	$k$	1.647	$2.876 \cdot 10^{-1}$	$4.498 \cdot 10^{-1}$	$-5.332 \cdot 10^{-2}$
		$a$	1.086	$-3.801 \cdot 10^{-1}$	$9.534 \cdot 10^{-2}$	$-1.851 \cdot 10^{-2}$
Генерационного тока	$p^+ - n$	$k$	$-5.685 \cdot 10^{-1}$	1.979	$-2.829 \cdot 10^{-1}$	$-1.692 \cdot 10^{-2}$
		$a$	$2.734 \cdot 10^{-1}$	$1.528 \cdot 10^{-1}$	$-8.412 \cdot 10^{-2}$	$6.964 \cdot 10^{-3}$
	$n^+ - p$	$k$	$7.411 \cdot 10^{-1}$	$5.283 \cdot 10^{-1}$	$7.316 \cdot 10^{-4}$	$5.472 \cdot 10^{-4}$
		$a$	$-2.268 \cdot 10^{-1}$	$1.753 \cdot 10^{-1}$	$2.615 \cdot 10^{-2}$	$-1.741 \cdot 10^{-3}$
	Плавный	$k$	1.497	$5.199 \cdot 10^{-1}$	$3.637 \cdot 10^{-2}$	$2.996 \cdot 10^{-4}$
		$a$	$7.644 \cdot 10^{-1}$	$-4.244 \cdot 10^{-1}$	$1.223 \cdot 10^{-1}$	$-5.933 \cdot 10^{-3}$

что свидетельствует о недостаточности соотношения Миллера–Молла для аппроксимации  $M_n(U)$ . В то же время из рис. 3 видно, что для дырок и генерационного тока в диапазоне  $U_B = 30-50$  В  $a = 0$ . В этом диапазоне соотношение Миллера–Молла для аппроксимации  $M_p(U)$  вполне приемлемо. Эти достаточно гладкие кривые можно аппроксимировать степенными полиномами. Однако для сохранения точности аппроксимации коэффициентов умножения степени полиномов должны быть не меньше 3

$$k, a = C_0 + C_1 \ln U_B + C_2 (\ln U_B)^2 + C_3 (\ln U_B)^3,$$

где  $U_B$  в вольтах.

Коэффициенты соответствующих полиномов представлены в табл. 3. Конечно, если для коэффициентов ионизации  $\alpha_n(E)$  и  $\alpha_p(E)$  взять другие значения параметров  $A$  и  $b$ , то эти коэффициенты изменятся. Однако точность аппроксимации коэффициентов умножения выражениями (9) и (10) сохранится высокой. Если же сузить интервал изменения напряжения пробоя, то точность аппроксимации может стать еще выше.

Полученные аппроксимационные выражения и аппроксимационные параметры для коэффициентов умножения электронов, дырок и генерационного тока в кремниевых  $p-n$ -переходах позволяют с высокой точностью описывать зависимости  $M(U)$  в диапазоне пробивных напряжений от 10 до 3000 В.

Исходя из допущений, сделанных при обосновании аппроксимационной формулы, можно ожидать, что выражение (8) для ионизационного интеграла будет пригодным и для многих других полупроводниковых материалов. В частности, для GaAs и GaP, где  $\alpha_n(E) = \alpha_p(E)$ , и для Ge, где  $\alpha_p(E) \approx 2\alpha_n(E)$ , точность аппроксимации может

оказаться даже более высокой. Выражение (8) может оказаться пригодным и в тех случаях, когда коэффициенты ионизации не следуют точно формуле (4), так как качественно зависимости  $\alpha(E)$  для большинства полупроводников являются аналогичными.

## Список литературы

- [1] И.В. Грехов, Ю.Н. Серезкин. *Лавинный пробой  $p-n$ -перехода в полупроводниках* (Л., Энергия, 1980).
- [2] S.L. Miller. Phys. Rev., **99**, 1234 (1955).
- [3] J.L. Moll, J.L. Su., A.C.M. Wang. IEEE Trans. Electron. Dev., **5**, 420 (1970).
- [4] J. Maserjian. J. Appl. Phys., **30**, 1613 (1959).
- [5] П.Г. Дерменжи, В.А. Кузьмин, Н.Н. Крюкова, В.И. Мамонов, В.Я. Павлик. *Расчет силовых полупроводниковых приборов*, под ред. В.А. Кузьмина (М., Энергия, 1980).
- [6] В.П. Григоренко, П.Г. Дерменжи, В.А. Кузьмин, Т.Т. Мнацканов. *Моделирование и автоматизация проектирования силовых полупроводниковых приборов* (М., Энергоатомиздат, 1988).
- [7] В.А. Холодков. ФТП, **30**, 1051 (1966).
- [8] *Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками, и математическими таблицами)*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган (М., Наука, 1979). [Пер. с англ.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables* (1964)].
- [9] А.С. Кюрегян, С.Н. Юрков. ФТП, **23**, 1819 (1989).

Редактор Л.В. Беляков

## Multiplication of charge carriers in silicon $p-n$ -junctions

*Yu.N. Serezhkin, A.A. Shesterkina*

Mordovian State University,  
430000 Saransk, Russia

**Abstract** The dependences of charge carriers multiplication coefficients  $M$  on the applied voltage in silicon  $p-n$ -junctions with the avalanche breakdown voltage 10–3000 V have been studied. The analytical expressions for approximation of these dependences for electrons, holes and generation current are given. In the range of multiplication coefficients 1.01–3.0 the relative root-mean-square error of approximation ( $M - 1$ ) is a few percent. That is more than an order of magnitude better than the Miller–Moll’s widespread approximation gives. It is supposed, that the proposed analytical expressions will be suitable for approximation of the dependences of multiplication coefficients on the applied voltage for most semiconductor materials.