

01.1;12.1

Расчет силы магнитного поля в магнитных системах со стационарным током

© М.Э. Рояк¹, Е.И. Антохин², П.А. Бублей², В.С. Елисеев², Т.Р. Дербышева¹, С.Д. Авдеева¹¹Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия²Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: mikeroyak@gmail.com

Поступило в Редакцию 11 августа 2022 г.

В окончательной редакции 11 августа 2022 г.

Принято к публикации 23 августа 2022 г.

Рассмотрены три различных подхода к вычислению сил, действующих на ферромагнетики в стационарном магнитном поле. Проведено сравнение результатов расчета силы магнитного поля этими способами на тестовой модели с данными измерений, полученных с использованием экспериментальной установки.

Ключевые слова: численное моделирование, магнитостатика, расчет магнитной силы, тензор Максвелла.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.19.53595.19337

Расчет сил магнитного поля необходим при конструировании и создании больших электромагнитов, в частности для детекторов ядерных частиц. Такие магниты имеют вес в десятки, а в некоторых случаях и в сотни тонн. При этом магнитные силы в них достигают сопоставимых величин, что приводит к значительным дополнительным напряжениям и деформациям конструктивных элементов магнитов. Знание величин и направлений магнитных сил позволяет разрабатывать ненагруженные конструкции магнитов в пределах требуемых допусков.

Вычислять силу, действующую на ферромагнетики в магнитном поле, можно несколькими способами. В работе [1] приводится сравнение двух методов определения силы. Первый из них связан с использованием принципа возможных перемещений (virtual work principle). Данный принцип рассматривает силу как производную полной энергии магнитного поля при бесконечно малом перемещении объекта, к которому она приложена. Вторым методом является расчет силы, действующей на ферромагнитный объект, с помощью интегрирования тензора Максвелла (Maxwell stress tensor method) по охватывающей этот объект произвольной поверхности, не пересекающей ферромагнетики. В публикации сравниваются эффективность и точность методов при численном моделировании магнитной системы для расчета как локальной, так и глобальной силы магнитного поля.

Возможности применения тензора Максвелла для расчета силы магнитного поля в совместной конечно-элементной и гранично-интегральной формулировке показаны в [2]. Работа [3] посвящена методам расчета силы с помощью интегрирования по поверхности, охватывающей объем, к которому приложена сила. Приведены основные теоретические выкладки и рассмотрено практическое применение. Расчет магнитной силы с использованием тензора Максвелла при конечно-элементной постановке для решения задач магнитостатики приводится в [4]. Применение для различных

типов магнитов разобрано в [5]. Вычислительная погрешность рассмотренных методов является основной обсуждаемой проблемой даже для простых примеров с нелинейной зависимостью магнитной проницаемости от поля в железе.

Вычисление сил с помощью тензора Максвелла производится следующим образом. Магнитные силы, действующие на объем V , можно свести к эквивалентной системе поверхностных натяжений, представляемой с помощью тензора натяжений Максвелла [2–6]. Компоненты такого тензора для охватывающей объем V поверхности S , не проходящей через ферромагнетики, можно записать в виде

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mu_0(H_x^2 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}/2) & \mu_0 H_x H_y & \mu_0 H_x H_z \\ \mu_0 H_x H_y & \mu_0(H_y^2 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}/2) & \mu_0 H_y H_z \\ \mu_0 H_x H_z & \mu_0 H_y H_z & \mu_0(H_z^2 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}/2) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля, μ_0 — магнитная постоянная.

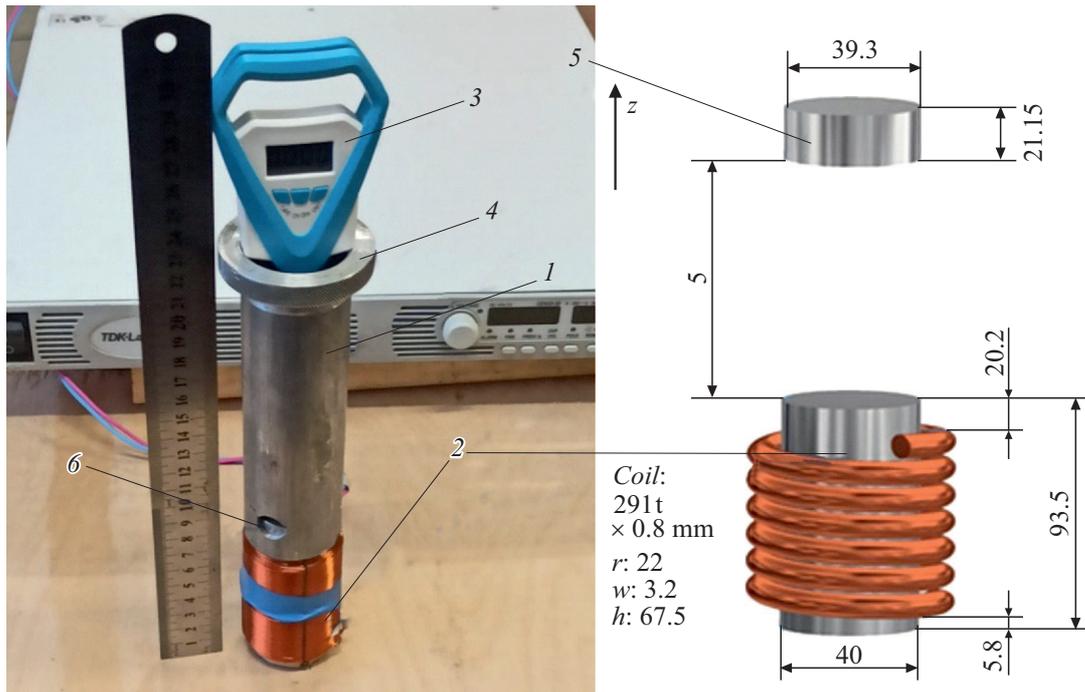
Тогда компоненты результирующего вектора силы \mathbf{F} определяются через компоненты тензора натяжений \mathbf{T} следующим образом:

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S .

Теоретически значение силы не зависит от выбора поверхности S , но на практике на выбор поверхности существенно влияет возможное наличие подобластей расчетной области, в которых присутствует заметная при интегрировании погрешность вычисленного магнитного поля (см. [7,8]).

Вычисление магнитной силы, действующей на ферромагнитный объект, через перемещения может быть



Экспериментальная установка для расчета силы магнитного поля. 1 — подставка, 2 — катушка с цилиндрическим сердечником, 3 — безмен, 4 — верхняя часть подставки с возможностью регулирования высоты, 5 — верхний цилиндр (подвешен к безмену и находится внутри подставки), 6 — боковое отверстие.

выполнено по формуле

$$F_r = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W_r - W}{t}, \quad (3)$$

где \mathbf{r} — направление перемещения, W — полная энергия в несмещенном положении, W_r — полная энергия при перемещении объекта в направлении \mathbf{r} на расстояние t . При этом для вычисления энергии магнитного поля применяется формула

$$W = 1/2 \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (4)$$

где V — вся расчетная область. Обратим внимание на то, что рассматриваемый способ позволяет вычислить только одну компоненту вектора силы за одно перемещение.

Третий способ расчета сил — интегрирование удельной силы по объему. Для этого можно использовать следующую формулу:

$$\mathbf{F} = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{M} \cdot \nabla(\mathbf{H} + \mathbf{M}) d\Omega, \quad (5)$$

где \mathbf{M} — намагниченность, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, Ω — область, содержащая тело, для которого вычисляется сила. Поскольку намагниченность \mathbf{M} вблизи границы раздела сред является разрывной функцией, вычисление интеграла (5) превращается в вычисление суммы интеграла (5) по объему $\Omega \setminus \Gamma$ (где

Γ — поверхность разрыва \mathbf{M}) и дополнительного интеграла по поверхности Γ , вид которого зависит от способа представления намагниченности в используемой модели магнитного поля. Например, для случая, когда намагниченность представлена через относительную магнитную проницаемость $\hat{\mu}$ в виде $\mathbf{M} = (\hat{\mu} - 1)\mathbf{H}$, этот интеграл имеет вид

$$\frac{\mu_0}{2} \int_{\Gamma} (\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)(\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1 - 2)(\mathbf{H} \times \mathbf{n})^2 n d\Gamma, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности Γ ; $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ — относительные магнитные проницаемости с отрицательной и положительной стороны поверхности Γ в соответствии с нормалью \mathbf{n} . Заметим, что этот способ вычисления сил является технически более сложным для конечно-элементного моделирования, так как требует вычисления градиента намагниченности в интеграле (5).

На рисунке изображена экспериментальная установка, собранная для измерения притягивающей силы, создаваемой магнитным полем. Физически данное устройство состоит из двух основных частей, соединенных с помощью специальной подставки в виде полой трубки из немагнитного металла. Нижняя часть представляет собой катушку с цилиндрическим сердечником из стали Armco. Верхняя часть содержит безмен, расположенный на подставке, а также подвешенный к нему и находящийся внутри подставки второй металлический цилиндр. Верхний цилиндр также сделан из стали Armco. Зазор 5 mm между двумя цилиндрами был выставлен

Результаты расчетов и данные измерений (воздушный зазор 5 mm)

I, A	F_d , kg	F_e , N	F_c , N		
			Тензор Максвелла	Производная энергии	Интегрирование
6	0.15	1.470	1.542	1.542	1.529
7	0.21	2.058	2.099	2.099	2.083
8	0.28	2.744	2.742	2.742	2.721
10	0.45	4.410	4.284	4.288	4.254
12	0.63	6.174	6.170	6.178	6.128

с помощью тонких пластин через боковое отверстие в подставке.

Для различных значений тока в катушке были проведены измерения магнитной силы, действующей на верхний цилиндр.

Для численного моделирования использовался программный комплекс TELMA, разрабатываемый под руководством одного из авторов в НГТУ. В этом комплексе для решения задачи магнитостатики есть возможность использовать совместную постановку методов граничных и конечных элементов [9–11]. Кроме того, применяется подход с использованием полного и неполного скалярных потенциалов [12,13], что позволяет проводить расчет магнитного поля катушки с током отдельно от ферромагнетиков [14].

Заметим, что при реализации рассмотренного выше способа расчета силы через производную энергии осуществлялся сдвиг верхнего цилиндра только вдоль оси z , так как вычислялась только одна компонента силы.

Задача расчета силы через тензор Максвелла в данном случае сводится к интегралу по поверхности, охватывающей верхний цилиндр. Также равную по модулю силу можно получить, интегрируя по поверхности, охватывающей нижний цилиндр с катушкой. В программной реализации вычисление интеграла проводилось с помощью квадратур Гаусса по поверхности охватывающего цилиндра, на котором строились вложенные сетки до получения заданной точности интегрирования.

В таблице приведены значения силы, действующей на верхний цилиндр при различной силе тока в катушке. Столбец F_d содержит показания безмена в оригинальном виде в килограммах. В столбце F_e представлены пересчитанные данные эксперимента в ньютонах, которые сравниваются с результатами компьютерного моделирования F_c , вычисленными тремя рассмотренными выше способами. При проведении эксперимента был выбран диапазон значений силы тока в катушке от 6 до 12 А, что связано с ограниченной точностью использовавшегося в эксперименте безмена (шкала 0.01 kg).

Как видно из таблицы, разница между расчетами любым из способов и практическими измерениями для всего диапазона токов не превышает 5%, что в принципе сопоставимо с погрешностью эксперимента. Таким образом, все рассмотренные методы позволяют получить довольно точные результаты. Интегрирование

имеет небольшую погрешность относительно остальных методов, что объясняется как погрешностью дополнительного сглаживания поля для вычислений (5), так и погрешностью вычисления касательных компонент напряженности поля на поверхности ферромагнетика в (6). Кроме того, рассмотренные методы не являются эквивалентными по вычислительным затратам, наиболее вычислительно трудоемким является расчет полной энергии поля. Поэтому для геометрически сложных электромагнитов наиболее эффективным является способ вычисления силы через тензор Максвелла.

Благодарности

Авторы благодарят В.П. Шадрину (ИЯФ СО РАН) за существенную помощь в проведении физического эксперимента.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Z. Ren, IEEE Trans. Magn., **30** (5), 3471 (1994). DOI: 10.1109/20.312686
- [2] Z. Ren, A. Razek, IEEE Trans. Magn., **26** (5), 2774 (1990). DOI: 10.1109/20.104869
- [3] C.J. Carpenter, Proc. of the IEE — Part C: Monographs, **107** (11), 19 (1960). DOI: 10.1049/pi-c.1960.0005
- [4] W. Boughanmi, F. Henrotte, A. Benabou, Y. Le Menach, IEEE Trans. Magn., **52** (3), 7402604 (2015). DOI: 10.1109/TMAG.2015.2492018
- [5] A. Bermúdez, A.L. Rodríguez, I. Villar, IEEE Trans. Magn., **53** (4), 7200409 (2016). DOI: 10.1109/TMAG.2016.2633316
- [6] И.Е. Тамм, *Основы теории электричества* (Физматлит, М., 2003).
- [7] F. Freschi, M. Repetto, IEEE Trans. Magn., **49** (5), 1717 (2013). DOI: 10.1109/TMAG.2013.2240668
- [8] M. Li, D. Lowther, IEEE Trans. Magn., **45** (3), 1344 (2009). DOI: 10.1109/TMAG.2009.2012621
- [9] M.E. Royak, I.M. Stupakov, N.S. Kondratyeva, in *13th Int. Scientific-Technical Conf. on actual problems of electronics instrument engineering (APEIE)* (IEEE, 2016), vol. 2, p. 330. DOI: 10.1109/APEIE.2016.7806481
- [10] R. Beatson, L. Greengard, in *Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs* (Clarendon Press, 1997), vol. 1, p. 1–37.

- [11] I.M. Stupakov, M.E. Royak, P.A. Bublely, in *XIV Int. Scientific-Technical Conf. on actual problems of electronics instrument engineering (APEIE)* (IEEE, 2018), p. 307. DOI: 10.1109/APEIE.2018.8545530
- [12] J. Simkin, C.W. Trowbridge, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **14** (3), 423 (1979). DOI: 10.1002/NME. 1620140308
- [13] J. Simkin, C.W. Trowbridge, *IEE Proc. B (Electric Power Applications)*, **127** (6), 368 (1980). DOI: 10.1049/ip-b.1980.0052
- [14] I.M. Stupakov, M.E. Royak, N.S. Kondratyeva, in *13th Int. Scientific-Technical Conf. on actual problems of electronics instrument engineering (APEIE)* (IEEE, 2016), vol. 2, p. 347. DOI: 10.1109/APEIE.2016.7806485