01

Обобщенное приближение эффективного поля для неоднородной среды с включениями в многослойной оболочке

© И.В. Лавров, В.В. Бардушкин, В.Б. Яковлев

Институт нанотехнологий микроэлектроники РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: iglavr@mail.ru

Поступило в Редакцию 14 мая 2022 г.
В окончательной редакции 28 июля 2022 г.
Принято к публикации 29 августа 2022 г.

Предложен подход для вычисления эффективных физических характеристик неоднородной среды с несколькими уровнями вложенности ее микроструктуры — обобщенное приближение эффективного поля. С помощью данного подхода получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной среды с эллипсоидальными включениями в многослойной оболочке, границы всех слоев которой являются эллипсоидами. Предложенный подход позволяет учитывать вероятностные распределения ориентаций и форм включений, а также наличие нескольких типов включений. Рассмотрены два случая матричных композитов: 1) со сферическими изотропными включениями с многослойной оболочкой; 2) с эллипсоидальными анизотропными включениями с многослойной оболочкой. Показано, что для неоднородной среды с однородными включениями данное приближение дает такой же результат, как обобщенное сингулярное приближение.

Ключевые слова: неоднородная среда, композит, матрица, включение, многослойная оболочка, обобщенное приближение эффективного поля, обобщенное сингулярное приближение, эффективная диэлектрическая проницаемость.

DOI: 10.21883/JTF.2022.11.53435.133-22

Введение

Значительная часть неоднородных материалов характеризуется вложенностью их структуры, т. е. таким взаимным расположением однородных компонентов, когда частицы некоторых из них полностью погружены в области, заполненные другими компонентами. В частности, структурой с одним уровнем вложенности обладают поликристаллы, поскольку кристаллические компоненты, присутствующие в материале в форме кристаллитов, отделены друг от друга межзеренным пространством, фактически составляющим в материале отдельный компонент с иным, по отношению к кристаллу, структурным состоянием атомов [1]. Также структурами с одним уровнем вложенности являются композиты матричного типа с однородными включениями. В этом случае непрерывный компонент, называемый матрицей, полностью окружает частицы других компонентов (включения) [2,3].

Если же включения в композите являются неоднородными, например, представляют собой однородное ядро в одно- или многослойной оболочке, то структура материала имеет несколько уровней вложенности. Задача прогнозирования свойств таких материалов является, с одной стороны, более сложной по сравнению с аналогичной задачей для материалов с одним уровнем вложенности, но, с другой стороны, использование неоднородных включений дает возможность улучшить желаемые характеристики материалов. Наличие оболочки может существенно влиять на физические свойства отдельных включений, а следовательно, и на соответствующие физические свойства самого композита. Например, по сравнению со сплошными металлическими включения с диэлектрическим ядром и металлической оболочкой имеют дополнительные плазмонные резонансы, причем частотное положение их зависит как от материала, так и от формы оболочки, в частности, от ее толщины [4–8]. Это дает дополнительные возможности управления частотным расположением плазмонных резонансов, а значит, и свойствами матричного композита, содержащего такие включения.

Однако даже для описания свойств реальных матричных композитов с однородными включениями может потребоваться модель с более чем одним уровнем вложенности. Как показывают исследования [9–11], контакт между включениями и матрицей в матричных композитах, а также между различными включениями не является идеальным. В частности, при наличии теплового потока наблюдается скачок температуры на границе между различными компонентами неоднородной среды, что свидетельствует о наличии контактного теплосопротивления на границе компонентов. Для учета контактного теплосопротивления можно использовать модель композита с включениями с оболочкой. При этом наличие контактного теплосопротивления моделируется однослойной оболочкой включения со специально подобранными толщиной и теплопроводностью [12]. Если же рассматривается композит с неоднородными включениями, состоящими из ядра с одно- или многослойной оболочкой, то для учета неидеальности контакта между включениями и матрицей нужно вводить дополнительный слой в оболочку, который будет моделировать контактное сопротивление.

Также к усложнению моделей для расчетов характеристик композитов приводит наличие в них примесей, связанных с особенностями технологических процессов производства. Так, например, синтактическая пена на основе кремнийорганического связующего и стеклянных микросфер содержит некоторое количество воды, что в результате ухудшает диэлектрические характеристики материала [13]. Часть содержащейся в композите воды может присутствовать в виде сплошных пленок на поверхности микросфер, для учета влияния которых на характеристики материала требуется вводить дополнительный слой оболочки включений.

Таким образом, представляется актуальной разработка методов прогнозирования эффективных характеристик неоднородных материалов, имеющих микроструктуру с несколькими уровнями вложенности, т.е. содержащих включения с многослойной оболочкой. На настоящий момент имеется ряд работ, посвященных прогнозированию эффективных свойств неоднородных сред с включениями в оболочке. Например, в [14] было предложено обобщение приближения Максвелла–Гарнетта на матричную среду с однотипными сферическими включениями в однослойной сферической оболочке. В [15] приведена общая схема обобщения приближения эффективной среды на случаи сред с неоднородными включениями и рассмотрен пример среды со сферическими включениями в однослойной оболочке. В [16] получены двусторонние вариационные оценки эффективной диэлектрической проницаемости сферопластика со сферическими включениями в однослойной оболочке. В [17] получены обобщения приближения Максвелла–Гарнетта на матричные композиты со сферическими включениями с многослойной оболочкой. В [18] предложено обобщенное приближение эффективного поля для вычисления эффективных характеристик неоднородных сред с эллипсоидальными включениями с однослойной оболочкой. Специально следует отметить работу [19], в которой предложен подход для вычисления эффективной теплопроводности композита с однонаправленными эллипсоидальными включениями в многослойной оболочке.

В настоящей работе обобщенное приближение эффективного поля [18] распространяется на случай неоднородных сред с включениями с однородным ядром и многослойной оболочкой с однородными слоями, при этом границы ядер и оболочек включений предполагаются эллипсоидальными. Предложенный подход обладает большой степенью общности и может быть применен и для многокомпонентных композитов, и для поликристаллов, он также способен естественным образом учитывать вероятностное распределение ориентаций и форм включений. Показано, что при отсутствии оболочки у включений данный подход дает такой же результат, как обобщенное сингулярное приближение [20]. Рассмотрены частные случаи матричного композита с однотипными изотропными сферическими включениями с многослойной оболочкой, а также матричного композита с изотропной матрицей и анизотропными эллипсоидальными включениями с многослойной оболочкой.

1. Постановка задачи. Формализм с использованием тела сравнения и метода функций Грина. Эффективное поле

Рассмотрим образец объемом V с границей S статистически однородной гетерогенной среды, состоящей из включений вложенной структуры; пусть N — количество всех включений в образце. Конкретное включение с номером k считается состоящим из однородного ядра $V_n^{(k)}$, которое окружено оболочкой, имеющей однородные слои $V_{n-1}^{(k)}, \ldots, V_1^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$, где $V_{n-1}^{(k)}$ — ближайший к ядру слой, $V_1^{(k)}$ — самый внешний слой оболочки k-го включения. Максимальное количество однородных областей, составляющих конкретное включение среды, будем считать равным n. Если включение содержит меньше однородных областей, будем считать, что объемы отсутствующих областей равны нулю. Область, занимаемую всем k-м включением, обозначим как $V^{(k)}$:

$$V^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{n} V_i^{(k)}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Введем также обозначение $\tilde{V}_j^{(k)}$ для области, состоящей из слоя $V_j^{(k)}$ и всех более внутренних слоев оболочки k-го включения, включая ядро:

$$\tilde{V}_j^{(k)} = \bigcup_{i=j}^{n} V_i^{(k)}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{1}$$

Объемы всех областей будем обозначать так же, как и сами области. Диэлектрические характеристики ядра и каждого слоя оболочки каждого включения будем считать известными, тензоры диэлектрической проницаемости областей $V_i^{(k)}$ будем обозначать как $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}$, $i = \overline{1, n}$; $k = \overline{1, N}$. Будем также считать, что в среде отсутствуют свободные заряды и двойные электрические слои.

Пусть к границе данного образца гетерогенной среды приложено постоянное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Тензор диэлектрической проницаемости данной среды $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$ является случайной кусочно-постоянной функцией координат:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}, \ \mathbf{r} \in V_i^{(k)}, \ i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, N}.$$

Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ эффективной диэлектрической проницаемости образца данной среды определяется как оператор, связывающий средние по объему образца значения векторов электрической индукции и напряженности электрического поля:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^* \langle \mathbf{E} \rangle. \tag{2}$$

Чтобы вычислить $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, рассмотрим краевую задачу для скалярного электрического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ в данной среде ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \varphi\big|_S = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}). \tag{3}$$

Для решения задачи (3) целесообразно рассмотреть аналогичную задачу для однородного тела сравнения, имеющего такие же размеры и форму, как и у образца неоднородной среды [18,21]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^c\, \nabla\varphi^c(\mathbf{r}) = 0, \quad \varphi^c\big|_S = -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}), \tag{4}$$

где индексом „c“ отмечены величины, относящиеся к телу сравнения. Введем обозначения для разностей величин, относящихся к задачам (3) и (4):

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi^c(\mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c,$$

тогда, вычитая (4) из (3), получим краевую задачу

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^c\nabla\varphi'(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r})\nabla\varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi'\big|_S = 0. \tag{5}$$

Вводя функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ условиями

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^c\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\big|_{\mathbf{r}_1\in S} = 0,$$

решение задачи (5) можем записать в виде интеграла [18]

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int\limits_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)\big(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1)\nabla\varphi(\mathbf{r}_1)\big)d\mathbf{r}_1. \tag{6}$$

Если образец считать неограниченным, то $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$, и (6) примет вид

$$\varphi'(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\big(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1)\nabla\varphi(\mathbf{r}_1)\big)d\mathbf{r}_1. \tag{7}$$

Преобразовав (7) по частям и взяв градиент от левой и правой частей, получим

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \int \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{r}_1)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1, \tag{8}$$

где $\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ — тензор вторых производных функции Грина, верхний индекс 1 у дифференциального оператора Гамильтона означает дифференцирование по $\mathbf{r}_1$. Поскольку $\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^c$, где $\mathbf{E}^c = \mathrm{const}$ — напряженность электрического поля в теле сравнения, из (8) получим уравнение для напряженности электрического поля в образце неоднородной среды, которое можно записать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^c + \mathbf{Q}(\mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \tag{9}$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ — тензорный интегральный оператор, действие которого определяется формулой

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1.$$

В силу гетерогенной структуры образец можно считать состоящим из конечного числа включений. Отметим, что если неоднородная среда представляет собой композит матричного типа с включениями, то матрицу можно также считать состоящей из отдельных зерен без оболочки. Форма частиц матрицы в дальнейшем изложении предполагается эллипсоидальной с фиксированными аспектным отношением и ориентацией (частный случай формы указанных частиц — сферическая). Следует заметить, что область, занимаемую матрицей, можно с любой наперед заданной точностью покрыть неперекрывающимися частицами данной формы и ориентации, используя частицы разного размера. При этом более мелкие частицы будут заполнять пространство, оставшееся между более крупными. Материальные характеристики всех этих воображаемых модельных частиц должны совпадать с материальными характеристиками матрицы независимо от их размера, в отличие от материальных характеристик реальных включений, которые могут зависеть от размеров последних.

Итак, пусть текущая точка $\mathbf{r}$ лежит внутри k-го включения. Разложим оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ на внешнюю и внутреннюю составляющие по отношению к k-му включению:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{int}}(\mathbf{r}),$$

тогда (9) примет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^c + \mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{int}}(\mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{r} \in V^{(k)}. \tag{10}$$

Выпишем подробнее слагаемые в (10), соответствующие внешней и внутренней составляющим оператора $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \int\limits_{V^{(i)}} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1,$$

$$\mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{int}}(\mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{V^{(k)}_j} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_j - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1, \tag{11}$$

Первые два члена в (10) можно назвать напряженностью эффективного поля в данной точке k-го включения, которое формируется в результате приложения к образцу композита внешнего поля и наличия в образце других включений:

$$\mathbf{E}^{(k)}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^c + \mathbf{Q}^{(k)}_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r})\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}^c\big)\mathbf{E}(\mathbf{r}), \ \ \mathbf{r} \in V^{(k)}. \tag{12}$$

Перепишем (10) с учетом (11), (12):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{(k)}_{\text{eff}}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{V_j^{(k)}} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$$

$$\times \left(\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r} \in V^{(k)}.$$

2. Решение задачи в обобщенном приближении эффективного поля для случая эллипсоидальных границ ядер и слоев оболочек включений

Вычислим средние напряженности $\langle \mathbf{E}\rangle_j^{(k)}$ $(j = \overline{1, n})$ электрического поля во всех слоях оболочки и ядре k-го включения:

$$\langle \mathbf{E}\rangle_j^{(k)} = \langle \mathbf{E}_{\text{eff}}\rangle_j^{(k)} + \frac{1}{V_j^{(k)}} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{V_i^{(k)}} \left(\int\limits_{V_j^{(k)}} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_{1i} - \mathbf{r})d\mathbf{r} \right)$$

$$\times \left(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}_{1i})d\mathbf{r}_{1i}, \ \ j = \overline{1, n}, \tag{13}$$

где

$$\langle \mathbf{E}_{\text{eff}}\rangle_j^{(k)} = \frac{1}{V_j^{(k)}} \int\limits_{V_j^{(k)}} \mathbf{E}^{(k)}_{\text{eff}}(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad j = \overline{1, n}$$

— средние напряженности эффективного поля в слоях оболочки и ядре k-го включения. В (13) при усреднении произведена смена порядка интегрирования по $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_{1i}$ $(i = \overline{1, n})$; это оправданно вследствие непрерывности или равномерной сходимости соответствующих интегралов по $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_{1i}$ в указанных областях [22].

Далее будем считать, что границы ядер и всех слоев оболочек всех включений являются эллипсоидами. Тогда области $\tilde{V}_j^{(k)}$ $(j = \overline{1, n})$, определенные выражением (1), являются внутренностями соответствующих эллипсоидов. Введем обозначения:

$$\tilde{\mathbf{g}}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \int\limits_{V_j^{(k)}} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_1 \in V_i^{(k)},$$

$$\mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \int\limits_{\tilde{V}_j^{(k)}} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_1 \in V_i^{(k)},$$

$$j = \overline{1, n}; \quad i = \overline{1, n};$$

$$\mathbf{g}_j^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \int\limits_{\tilde{V}_j^{(k)}} \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})d\mathbf{r} = \int\limits_{\tilde{V}_j^{(k)}} \nabla \otimes \nabla G(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

$$\mathbf{r}_1 \in \tilde{V}_j^{(k)}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Все тензоры $\mathbf{g}_j^{(k)}$ не зависят от выбора точки $\mathbf{r}_1$ внутри соответствующей эллипсоидальной области $\tilde{V}_j^{(k)}$ [23]. Для тензоров $\mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1)$ имеем

$$\mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{g}_j^{(k)}, \quad i \geq j. \tag{15}$$

Для тензоров $\tilde{\mathbf{g}}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1)$ имеем

$$\tilde{\mathbf{g}}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{g}_j^{(k)} - \mathbf{g}_{j+1}^{(k)}, \quad i = \overline{j+1, n}, \tag{16}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{j,j}^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{g}_j^{(k)} - \mathbf{g}_{j+1,j}^{(k)}(\mathbf{r}_1), \tag{17}$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{g}_{j+1,i}^{(k)}(\mathbf{r}_1), \ \ i \leq j-1. \tag{18}$$

С учетом (14)–(18) выражения (13) примут вид

$$\langle \mathbf{E}\rangle_j^{(k)} = \langle \mathbf{E}_{\text{eff}}\rangle_j^{(k)} + \frac{1}{V_j^{(k)}} \Bigg[\sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{V_i^{(k)}} \left(\mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i}) - \mathbf{g}_{j+1,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i})\right)$$

$$\times (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)\mathbf{E}(\mathbf{r}_{1i})d\mathbf{r}_{1i} + \int\limits_{V_j^{(k)}} \left(\mathbf{g}_j^{(k)} - \mathbf{g}_{j+1,j}^{(k)}(\mathbf{r}_{1j})\right)(\boldsymbol{\varepsilon}_j^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)$$

$$\times \mathbf{E}(\mathbf{r}_{1j})d\mathbf{r}_{1j} + \sum_{i=j+1}^{n} (\mathbf{g}_j^{(k)} - \mathbf{g}_{j+1}^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)V_i^{(k)}\langle \mathbf{E}\rangle_i^{(k)} \Bigg],$$

$$j = \overline{1, n},$$

или

$$\langle \mathbf{E}\rangle_j^{(k)} = \langle \mathbf{E}_{\text{eff}}\rangle_j^{(k)} + \frac{1}{V_j^{(k)}} \Bigg[\sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{V_i^{(k)}} \mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i})(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)\mathbf{E}(\mathbf{r}_{1i})d\mathbf{r}_{1i}$$

$$- \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{V_i^{(k)}} \mathbf{g}_{j+1,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i})(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)\mathbf{E}(\mathbf{r}_{1i})d\mathbf{r}_{1i} + \sum_{i=j}^{n} \mathbf{g}_j^{(k)}$$

$$\times (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)V_i^{(k)}\langle \mathbf{E}\rangle_i^{(k)} - \sum_{i=j+1}^{n} \mathbf{g}_{j+1}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)V_i^{(k)}\langle \mathbf{E}\rangle_i^{(k)} \Bigg], \tag{19}$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Используя (19), найдем выражение для средней напряженности поля в k-м включении

$$\langle \mathbf{E}\rangle^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)} \langle \mathbf{E}\rangle_j^{(k)} = \langle \mathbf{E}_{\text{eff}}\rangle^{(k)}$$

$$+ \frac{1}{V^{(k)}} \Bigg[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \int\limits_{V_i^{(k)}} \mathbf{g}_{j,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i})(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)\mathbf{E}(\mathbf{r}_{1i})d\mathbf{r}_{1i}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \int\limits_{V_i^{(k)}} \mathbf{g}_{j+1,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i})(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)\mathbf{E}(\mathbf{r}_{1i})d\mathbf{r}_{1i}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}_j^{(k)} \sum_{i=j}^{n} (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)V_i^{(k)}\langle \mathbf{E}\rangle_i^{(k)}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \mathbf{g}_{j+1}^{(k)} \sum_{i=j+1}^{n} (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c)V_i^{(k)}\langle \mathbf{E}\rangle_i^{(k)} \Bigg], \tag{20}$$

где $\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)}$ — средняя напряженность эффективного поля в k-м включении:

$$\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)} \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle_j^{(k)},$$

$f_j^{(k)}$ — относительные объемные доли слоев оболочки и ядра в k-м включении:

$$f_j^{(k)} = \frac{V_j^{(k)}}{V^{(k)}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Естественным образом в (20) следует считать, что

$$\mathbf{g}_{n+1,i}^{(k)}(\mathbf{r}_{1i}) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad \mathbf{g}_{n+1}^{(k)} = 0. \tag{21}$$

Заметим, что в (20) в первой двойной сумме внутренняя сумма при $j = 1$ равна нулю. Также во второй и четвертой двойных суммах, в силу (21), внешнее суммирование можно вести до $(n-1)$. Далее несложно проверить, что первые две двойные суммы полностью взаимно компенсируют друг друга, в третьей и четвертой двойных суммах большинство слагаемых также взаимно „уничтожаются“, в результате для средней напряженности поля в k-м включении получим следующее выражение:

$$\langle \mathbf{E} \rangle^{(k)} = \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)} + \mathbf{g}_1^{(k)} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c) \langle \mathbf{E} \rangle_i^{(k)}. \tag{22}$$

Средняя напряженность поля в каждом конкретном слое оболочки k-го включения связана со средней напряженностью поля в ядре этого же включения линейным соотношением

$$\langle \mathbf{E} \rangle_j^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{jn}^{(k)} \langle \mathbf{E} \rangle_n^{(k)}, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{jn}^{(k)}$ — тензорный оператор, зависящий от геометрических и материальных характеристик данного включения, тела сравнения, а также от характеристик и расположения остальных включений в образце. Подставив (23) в уравнение, полученное приравниванием правой части (22) и средней части (20), выразим $\langle \mathbf{E} \rangle_n^{(k)}$ через $\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)}$:

$$\langle \mathbf{E} \rangle_n^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)}, \tag{24}$$

где

$$\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} = \left[\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}_1^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^c) \right) \boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)} \right]^{-1}, \tag{25}$$

причем, очевидно, $\boldsymbol{\lambda}_{nn}^{(k)} = \mathbf{I}$.

Используя (22) и (24), свяжем среднюю напряженность поля в k-м включении со средней напряженностью эффективного поля в нем:

$$\langle \mathbf{E} \rangle^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} \boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)}.$$

Для средней напряженности поля в образце получим

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \sum_{k=1}^{N} \frac{V^{(k)}}{V} \langle \mathbf{E} \rangle^{(k)} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N} V^{(k)} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} \boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)} \right) \times \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)}.$$

Введем оператор $\boldsymbol{\Lambda}^{(k)}$, связывающий средние напряженности эффективного поля в k-м включении и во всем образце:

$$\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)} = \boldsymbol{\Lambda}^{(k)} \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle, \quad k = \overline{1, N}, \tag{26}$$

причем $\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle$ вычисляется аналогично $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle = \sum_{k=1}^{N} \frac{V^{(k)}}{V} \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle^{(k)}.$$

Тогда выражение для $\langle \mathbf{E} \rangle$ можно записать в виде

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle \langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle, \tag{27}$$

где

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{N} V^{(k)} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} \boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} \boldsymbol{\Lambda}^{(k)}.$$

Из (27) выразим среднюю напряженность эффективного поля в образце через среднюю напряженность поля в нем

$$\langle \mathbf{E}_{\mathrm{eff}} \rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle^{-1} \langle \mathbf{E} \rangle. \tag{28}$$

Используя (23), (24), (26), (28), выразим средние напряженности поля в слоях оболочки и ядре k-го включения через среднюю напряженность поля в образце

$$\langle \mathbf{E} \rangle_j^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{jn}^{(k)} \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} \boldsymbol{\Lambda}^{(k)} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle^{-1} \langle \mathbf{E} \rangle,$$
$$j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Для среднего значения электрической индукции в k-м включении имеем

$$\langle \mathbf{D} \rangle^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} \langle \mathbf{E} \rangle_i^{(k)} = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)} \boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)} \boldsymbol{\Lambda}^{(k)} \times \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle^{-1} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad k = \overline{1, N}. \tag{29}$$

Используя (29), вычислим среднюю индукцию в образце

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \sum_{k=1}^{N} \frac{V^{(k)}}{V} \langle \mathbf{D} \rangle^{(k)} = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle \times \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in} \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \boldsymbol{\Lambda} \right\rangle^{-1} \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{30}$$

где

$$\left\langle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\lambda}_{in}\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\boldsymbol{\Lambda}\right\rangle = \frac{1}{V}\sum_{k=1}^{N} V^{(k)}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)}\right) \times \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)}\boldsymbol{\Lambda}^{(k)}.$$

Из (2) и (30) вытекает выражение для тензора эффективных диэлектрических характеристик данного образца неоднородного материала

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left\langle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\lambda}_{in}\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\boldsymbol{\Lambda}\right\rangle \left\langle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in}\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\boldsymbol{\Lambda}\right\rangle^{-1}. \tag{31}$$

Формула (31) является точной, однако для практического вычисления $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ по ней требуется знание вида операторов $\boldsymbol{\lambda}_{in}$ $(i=\overline{1,n})$ и $\boldsymbol{\Lambda}$ для каждого из включений образца, что представляет собой гигантскую сложность ввиду огромного количества включений и их взаимного влияния друг на друга. Статистическая однородность материала и малость каждого включения в сравнении со всем образцом материала оправдывает представление оператора $\boldsymbol{\Lambda}$ в виде

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{I} + \delta\boldsymbol{\Lambda},$$

где $\delta\boldsymbol{\Lambda}$ — флуктуационная добавка, являющаяся следствием нерегулярного распределения включений по объему образца, различия их по размерам, форме, материальным характеристикам и ориентации кристаллографических осей. В свою очередь, операторы $\boldsymbol{\lambda}_{in}$ могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{\lambda}_{in} = \boldsymbol{\lambda}_{in}^0 + \delta\boldsymbol{\lambda}_{in}, \quad i=\overline{1,n},$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{in}^0$ — тензор, связывающий средние напряженности поля в слоях оболочки и ядре включения, идентичного данному, но находящемуся в уединении в среде сравнения с однородным приложенным полем; $\delta\boldsymbol{\lambda}_{in}$ — поправка вследствие влияния других включений.

В качестве первого упрощающего предположения примем, что

$$\boldsymbol{\Lambda} \approx \mathbf{I},$$

т. е. пренебрежем флуктуацией эффективного поля. В этом случае для тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ получим выражение

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left\langle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\lambda}_{in}\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\right\rangle \left\langle\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in}\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\right\rangle^{-1}, \tag{32}$$

которое можно назвать обобщенным приближением эффективного поля для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ среды, состоящей из включений с многослойными оболочками.

В качестве второго упрощающего предположения можно принять, что средние напряженности поля в оболочке и ядре каждого включения связаны между собой так же, как и у одиночного включения с такими же параметрами, помещенного в бесконечную среду сравнения с однородным приложенным полем, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda}_{in} \approx \boldsymbol{\lambda}_{in}^0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{33}$$

Заметим, что компоненты тензора $\mathbf{g}_1^{(k)}$, входящие в выражение (25) для вычисления $\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)}$ $(k=\overline{1,N})$, в системе координат, связанной с осями k-го включения, могут быть вычислены по формуле [20]:

$$g_{ij}^{(k)} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_s \varepsilon_{sl}^c n_l}\,\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \tag{34}$$

где ε_{sl}^c, $s,l=1,2,3$ — компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ в данной системе координат; $n_1=(a_1^{(k)})^{-1}\cos\varphi\sin\vartheta$, $n_2=(a_2^{(k)})^{-1}\sin\varphi\sin\vartheta$, $n_3=(a_3^{(k)})^{-1}\cos\vartheta$ — компоненты нормали (не единичной) к поверхности-эллипсоиду, являющейся границей k-го включения; $a_1^{(k)}$, $a_2^{(k)}$, $a_3^{(k)}$ — ее полуоси.

Усреднение в (32) производится по всем включениям образца. Если все включения в образце — однотипные с точки зрения их материальных характеристик и различаются только формами и ориентациями в пространстве, то угловые скобки в (32) следует интерпретировать как усреднение соответствующих тензорных величин, связанных с включениями, по формам и ориентациям включений с учетом их вероятностных распределений.

Следует заметить, что приближенное значение для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, получаемое с помощью выражения (32), зависит от параметра среды сравнения — тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ ее диэлектрической проницаемости, а в случае неоднородной среды матричного типа еще и от векторного параметра, характеризующего форму и ориентацию зерен, составляющих матрицу. Варьируя значения этих параметров, можно получать различные типы приближений для тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, причем выбор их конкретных значений следует производить, исходя из особенностей структуры неоднородной среды. Например, для матричной среды с объемной долей включений, не превышающей 0.4, целесообразно выбирать в качестве среды сравнения матрицу, для неоднородной среды типа статистической смеси — саму среду с эффективной диэлектрической проницаемостью, т. е. использовать идею самосогласования [20].

Что касается выбора формы частиц матрицы, то для макроскопически изотропной неоднородной среды матричного типа следует, по-видимому, считать их форму сферической. В случаях анизотропных сред выбор формы частиц матрицы требует отдельного рассмотрения и не обсуждается в настоящей работе. Следует, однако, заметить, что принятие матрицы в качестве среды сравнения автоматически снимает вопрос выбора формы ее частиц в силу структуры полученного выражения (25) для тензора $\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)}$, что полностью согласуется с физическим смыслом данной ситуации, когда частицы матрицы „сливаются“ со средой сравнения.

3. Некоторые частные случаи применения обобщенного приближения эффективного поля

3.1. Гетерогенная среда, состоящая из однородных включений

Рассмотрим вначале некоторые из предельных случаев, когда гетерогенная среда состоит из однородных включений.

3.1.1. Присутствует ядро, но отсутствуют все слои оболочки

Пусть у всех включений присутствует ядро, но отсутствуют все слои оболочки, т.е. $f_n^{(k)}=1$, $f_i^{(k)}=0$, $i=\overline{1,n-1}$. Тогда по формуле (25) с учетом того, что $\boldsymbol{\lambda}_{nn}^{(k)}=\mathbf{I}$, имеем

$$\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1},\quad k=\overline{1,N},$$

причем, поскольку ядро занимает весь объем включения, $\mathbf{g}_1^{(k)}=\mathbf{g}_n^{(k)}=\mathbf{g}^{(k)}$ — тензор, связанный с данным k-м включением и используемый в обобщенном сингулярном приближении [20], и (32) принимает вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*=\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}_n\left[\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right]^{-1}\right\rangle\left\langle\left[\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}_n-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right]^{-1}\right\rangle^{-1},$$

совпадающий с формулой для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в обобщенном сингулярном приближении [20].

3.1.2. У всех включений отсутствуют ядро и все слои оболочки, кроме одного слоя

Пусть, например, для k-го включения имеется только j_k-й слой, т.е. $f_{j_k}^{(k)}=1$, $f_i^{(k)}=0$, $i\neq j_k$. В этом случае $V^{(k)}=\tilde V_{j_k}^{(k)}$, $\mathbf{g}_1^{(k)}=\mathbf{g}_{j_k}^{(k)}=\mathbf{g}^{(k)}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)}&=\left[\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)\boldsymbol{\lambda}_{j_kn}^{(k)}\right]^{-1}\\&=(\boldsymbol{\lambda}_{j_kn}^{(k)})^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1},\end{aligned}$$

и для тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^*&=\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{j_kn}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}_{j_kn}^{(k)})^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle\\&\times\left\langle\boldsymbol{\lambda}_{j_kn}^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}_{j_kn}^{(k)})^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle^{-1}\\&=\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle\left\langle\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle^{-1},\quad(35)\end{aligned}$$

где

$$\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle=\frac{1}{V}\sum_{k=1}^{N}V^{(k)}\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1},$$

$$\left\langle\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle=\frac{1}{V}\sum_{k=1}^{N}V^{(k)}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_k}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}.$$

Выражение (35) также совпадает с формулой для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в обобщенном сингулярном приближении.

3.1.3. У каждого конкретного включения материальные характеристики всех слоев оболочки и ядра одинаковы

Рассмотрим случай, когда у каждого конкретного включения материальные характеристики всех слоев оболочки и ядра одинаковы, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}=\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}=\ldots=\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(k)}=\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$. Тогда $\mathbf{g}_1^{(k)}=\mathbf{g}^{(k)}$

$$\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(k)}=\left[\sum_{i=1}^{n}f_i^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)}\right]^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1},$$

для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ имеем в итоге также выражение в обобщенном сингулярном приближении:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^*&=\Bigg\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\left(\sum_{i=1}^{n}f_i^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}f_i^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)}\right]^{-1}\\&\times\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\Bigg\rangle\\&\times\Bigg\langle\left(\sum_{i=1}^{n}f_i^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}f_i^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_{in}^{(k)}\right]^{-1}\\&\times\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\Bigg\rangle^{-1}\\&=\left\langle\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle\left\langle\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^c)\right)^{-1}\right\rangle^{-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, в предельных случаях однородных включений выражение (32) совпадает с выражением для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в обобщенном сингулярном приближении [20]. Заметим, что во всех рассмотренных предельных случаях не делалось никаких упрощающих предположений о виде операторов $\boldsymbol{\lambda}_{in}$, $i=\overline{1,n}$.

3.2. Композит, состоящий из изотропной матрицы и погруженных в нее одинаковых включений с изотропным шарообразным ядром и оболочкой с изотропными сферическими слоями

Пусть ε_m — диэлектрическая проницаемость матрицы, ε_i, $i=\overline{1,n}$ — диэлектрические проницаемости слоев оболочки, включая ядро, каждого включения; $a_1>a_2>\ldots>a_n$ — радиусы сфер, являющихся границами оболочек и ядра. Пусть f — полная объемная доля всех включений в среде. Среду сравнения возьмем изотропной: $\boldsymbol{\varepsilon}^c=\varepsilon^c\mathbf{I}$. Непосредственным вычислением по формуле (34) получаем, что

$$\mathbf{g}_1^{(k)}=-(3\varepsilon^c)^{-1}\mathbf{I},\quad k=\overline{1,N}.\qquad(36)$$

Тензорные операторы $\boldsymbol{\lambda}_{in}$, $i=\overline{1,n}$ будем брать в приближении (33), для нахождения вида тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{in}^0$ вычислим средние значения напряженности электрического поля во всех слоях оболочки изолированного включения в бесконечной среде сравнения с однородным приложенным полем $\mathbf{E}_0$.

Пусть $\mathbf{k}$ — орт в направлении $\mathbf{E}_0$, тогда потенциал поля в i-м слое оболочки будет иметь вид [24]:

$$\varphi_i(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + B_i\,\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{r^3}, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{37}$$

где A_i, B_i — константы, которые вычисляются с использованием граничных условий. Поле в ядре включения однородно, его потенциал

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = A_n(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \quad A_n = \text{const}. \tag{38}$$

Для средней напряженности поля в i-м слое оболочки изолированного включения по определению имеем (V_i — объем, занимаемый i-м слоем оболочки включения):

$$\langle\mathbf{E}_i\rangle = (V_i)^{-1}\iiint\limits_{V_i}\mathbf{E}_i dV = (V_i)^{-1}\iiint\limits_{V_i}(-\nabla\varphi_i)dV. \tag{39}$$

Перейдем в (39) от объемного интеграла к интегралу по полной поверхности i-го слоя оболочки с помощью теоремы о градиенте [25]:

$$\langle\mathbf{E}_i\rangle = (V_i)^{-1}\left[-\oiint\limits_{S_i}\varphi_i\mathbf{n}_i dS + \oiint\limits_{S_{i+1}}\varphi_i\mathbf{n}_{i+1}dS\right], \tag{40}$$

где S_i, S_{i+1} — сферы, являющиеся внешней и внутренней границами i-го слоя оболочки соответственно, $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_{i+1}$ — внешние единичные нормали к ним. С учетом (37) и того, что на сфере $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, для первого из интегралов в (40) имеем выражение

$$\oiint\limits_{S_i}\varphi_i\mathbf{n}_i dS = \oiint\limits_{S_i}\left(A_i + B_i\,\frac{1}{r^3}\right)\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{r}\,\mathbf{r}dS. \tag{41}$$

Параметризуем S_i сферическими углами θ, ψ (θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{r}\big|_{S_i} = \begin{pmatrix} a_i\sin\theta\cos\psi \\ a_i\sin\theta\sin\psi \\ a_i\cos\theta \end{pmatrix},\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\psi<2\pi,\ r\big|_{S_i} = a_i,$$

тогда

$$\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{r} = \cos\theta, \quad dS = a_i^2\sin\theta d\theta d\psi.$$

Подставим данные выражения в (41):

$$\oiint\limits_{S_i}\varphi_i\mathbf{n}_i dS = \int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\psi\left(A_i + B_i\,\frac{1}{a_i^3}\right)a_i^3\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi \\ \cos\theta\end{pmatrix} \times \sin\theta\cos\theta.$$

Очевидно, что первые две компоненты интеграла равны нулю, а для третьей имеем (ось z направлена вдоль $\mathbf{k}$):

$$\left(\oiint\limits_{S_i}\varphi_i\mathbf{n}_i dS\right)_z = \frac{4\pi}{3}\,(A_i a_i^3 + B_i).$$

Аналогично у второго интеграла в (40) первые две компоненты также равны нулю, а для третьей получим

$$\left(\oiint\limits_{S_{i+1}}\varphi_i\mathbf{n}_{i+1}dS\right)_z = \frac{4\pi}{3}\,(A_i a_{i+1}^3 + B_i).$$

С учетом того что

$$V_i = \frac{4\pi}{3}\,(a_i^3 - a_{i+1}^3),$$

в итоге для средней напряженности электрического поля в i-м слое оболочки имеем следующее значение:

$$\langle\mathbf{E}_i\rangle = -A_i\mathbf{k}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{42}$$

Из (38) очевидным образом вытекает выражение для средней напряженности электрического поля в ядре

$$\langle\mathbf{E}_n\rangle = -A_n\mathbf{k}. \tag{43}$$

Из (42), (43) имеем выражение для тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{in}^0$:

$$\boldsymbol{\lambda}_{in}^0 = \frac{A_i}{A_n}\,\mathbf{I}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{44}$$

Подставляя (36) и (44) в (25), найдем

$$\boldsymbol{\lambda}_{n0} = \frac{3\varepsilon^c A_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(2\varepsilon^c + \varepsilon_i)A_i}\,\mathbf{I}. \tag{45}$$

Частицы матрицы будем считать сферическими без оболочки, для них

$$f_i^{(m)} = 0,\ i = \overline{1, n-1};\quad f_n^{(m)} = 1;\quad \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(m)} = \frac{3\varepsilon^c}{(2\varepsilon^c + \varepsilon_m)}\,\mathbf{I}. \tag{46}$$

С учетом состава рассматриваемой среды усреднение в (32) сводится к среднему арифметическому с весами, равными объемным долям компонентов среды:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1-f)\varepsilon_m\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(m)} + f\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\varepsilon_i\boldsymbol{\lambda}_{in}^0\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\right] \times \left[(1-f)\boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(m)} + f\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\boldsymbol{\lambda}_{in}^0\right)\boldsymbol{\lambda}_{n0}\right]^{-1}. \tag{47}$$

Очевидно, что в данном случае эффективная диэлектрическая проницаемость неоднородной среды будет скалярной величиной, выражение для которой получается после подстановки (44)–(46) в (47) и элементарных алгебраических преобразований:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_m\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i[(1-f)2\varepsilon^c\varepsilon_m + f(2\varepsilon^c + \varepsilon_m)\varepsilon_i]A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i[(1-f)(2\varepsilon^c + \varepsilon_i) + f(2\varepsilon^c + \varepsilon_m)\varepsilon_i]A_i}. \tag{48}$$

Если в качестве среды сравнения взять матрицу, т. е. $\varepsilon^c = \varepsilon_m$, то (48) примет вид

$$\varepsilon^* = \varepsilon_m \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i[2\varepsilon_m(1-f)+\varepsilon_i(1+2f)]A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i[\varepsilon_m(2+f)+\varepsilon_i(1-f)]A_i}. \qquad (49)$$

В случае шаров без оболочки $(n = 1,\ f_1 = 1)$ из формулы (49) получается классическая формула Максвелла–Гарнетта:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_m \frac{2\varepsilon_m + \varepsilon_1 + 2f(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_m + \varepsilon_1 - f(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)}.$$

3.3. Композит, состоящий из изотропной матрицы и погруженных в нее одинаковых включений с анизотропным эллипсоидальным ядром и многослойной оболочкой с анизотропными эллипсоидальными слоями

Пусть ε_m — диэлектрическая проницаемость матрицы, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i = \overline{1,n}$ — тензоры диэлектрической проницаемости слоев оболочки, включая ядро, каждого включения; $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}$, $i = \overline{1,n}$ — полуоси поверхностей-эллипсоидов $S_i^{(k)}$, являющихся границами слоев оболочки и ядра k-го включения. Пусть f — полная объемная доля всех включений в среде. Все включения будем считать одинаково ориентированными в пространстве.

Будем предполагать, что размеры и ориентации геометрических осей поверхностей-эллипсоидов $S_i^{(k)}$, $i = \overline{1,n}$ согласованы с тензорами $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i = \overline{1,n}$ определенным образом. В частности, для i-го слоя оболочки образы его внутренней $S_{i+1}^{(k)}$ и внешней $S_i^{(k)}$ границ при линейном преобразовании T_i, устраняющем анизотропию его диэлектрических свойств, являются софокусными эллипсоидами. Исходную декартову систему координат, в которой заданы геометрические параметры включений, обозначим как $x^1x^2x^3$. Преобразование координат, связанное с преобразованием T_i, имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_i\mathbf{r}'_i,$$

где $\mathbf{r} = (x^1x^2x^3)^T$, $\mathbf{r}'_i = (x_i^{1'}x_i^{2'}x_i^{3'})^T$ — вектор-столбцы координат текущей точки в исходной $x^1x^2x^3$ и новой $x_i^{1'}x_i^{2'}x_i^{3'}$ системах координат; $\mathbf{T}_i$ — матрица данного преобразования. Образы поверхностей-эллипсоидов $S_i^{(k)}$ и $S_{i+1}^{(k)}$ при преобразовании T_i обозначим как $S_i^{\prime(k)}$ и $S_{i+1}^{\prime(k)}$; их полуоси обозначим как $a_{i,1'}, a_{i,2'}, a_{i,3'}$ и $a_{i+1,1'}, a_{i+1,2'}, a_{i+1,3'}$. Матрица $\mathbf{T}_i$ данного преобразования связана с тензором диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ i-го слоя оболочки соотношением [26]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{T}_i\mathbf{T}_i^T. \qquad (50)$$

Условие (50) неоднозначно определяет преобразование T_i (с точностью до произвольного поворота вокруг начала координат), поэтому в дополнение к (50) будем считать, что оси системы $x_i^{1'}x_i^{2'}x_i^{3'}$ направлены вдоль осей поверхностей-эллипсоидов $S_i^{\prime(k)}$, $S_{i+1}^{\prime(k)}$. Софокусность $S_i^{\prime(k)}$ и $S_{i+1}^{\prime(k)}$ означает, что существует такой параметр $t'_i > 0$, что

$$t'_i = a_{i,i'}^2 - a_{i+1,i'}^2, \quad i' = 1', 2', 3'.$$

Среду сравнения возьмем изотропной: $\boldsymbol{\varepsilon}^c = \varepsilon^c\mathbf{I}$. Тензорные операторы $\boldsymbol{\lambda}_{in}$, $i = \overline{1,n}$ будем брать в приближении (33), для нахождения вида тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{in}^0$ вычислим средние значения напряженности электрического поля во всех слоях оболочки изолированного включения в бесконечной среде сравнения с однородным приложенным полем $\mathbf{E}_0$.

Рассмотрим i-й слой k-го включения, которое будем считать изолированным в бесконечной среде сравнения. Потенциал электрического поля в нем имеет вид (верхний индекс, обозначающий номер включения, везде опущен, поскольку для всех включений зависимость будет одинаковой) [26]

$$\varphi_i = \big((\boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{N}'_{i,0}(\xi'_i)\boldsymbol{\alpha}_i)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big),\ \ \mathbf{r} \in V_i,\ \ 0 \le \xi'_i \le t'_i,$$

где $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_i$ — постоянные тензоры 2-го ранга; $\mathbf{N}'_{i,0}(\xi'_i)$ — тензорная функция, в системе координат $x^1x^2x^3$ вычисляемая по формуле

$$\mathbf{N}'_{i,0}(\xi'_i) = (\mathbf{T}_i^{-1})^T\mathbf{N}'_i(\xi'_i)\mathbf{T}_i^{-1}, \qquad (51)$$

$\mathbf{N}'_i(\xi'_i)$ — эта же тензорная функция в системе координат $x_i^{1'}x_i^{2'}x_i^{3'}$, имеющая в ней диагональный вид с главными компонентами:

$$N'_{i,i'}(\xi'_i) = \frac{a_{i+1,1'}a_{i+1,2'}a_{i+1,3'}}{2}\int\limits_{\xi'_i}^{+\infty}\frac{du}{[u + a_{i+1,i'}^2]\tilde{R}_u},$$

$$i' = 1', 2', 3'; \quad 0 \le \xi'_i \le t'_i;$$

$$\tilde{R}_u = \left[(u + a_{i+1,1'}^2)(u + a_{i+1,2'}^2)(u + a_{i+1,3'}^2)\right]^{1/2}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{N}'_{i,0}(0) = \mathbf{L}_{i+1,0}^{\prime(ext)}, \quad \mathbf{N}'_{i,0}(t'_i) = \tilde{v}_{i+1}\mathbf{L}_{i,0}^{\prime(int)},$$

где $\tilde{v}_{i+1}$ — относительная объемная доля объема внутри поверхности $S_{i+1}^{(k)}$ в объеме внутри поверхности $S_i^{(k)}$, т. е.

$$\tilde{v}_{i+1} = \frac{a_{i+1,1}a_{i+1,2}a_{i+1,3}}{a_{i,1}a_{i,2}a_{i,3}},$$

$\mathbf{L}_{i,0}^{\prime(int)}$ — тензор обобщенных геометрических факторов эллипсоида $S_i^{(k)}$ с учетом анизотропии диэлектрических свойств в ближайшем слое оболочки внутри $S_i^{(k)}$ в системе координат $x^1x^2x^3$; $\mathbf{L}_{i+1,0}^{\prime(ext)}$ — тензор обобщенных геометрических факторов эллипсоида $S_{i+1}^{(k)}$ с учетом анизотропии диэлектрических свойств в ближайшем слое оболочки вне $S_{i+1}^{(k)}$ в системе координат $x^1x^2x^3$ [26].

Аналогично (51), имеет место связь данных тензоров с ними же в системе координат $x_i^{1'} x_i^{2'} x_i^{3'}$:

$$\mathbf{L}_{i,0}^{\prime(int)} = (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{L}_i^{\prime(int)} \mathbf{T}_i^{-1}, \quad \mathbf{L}_{i+1,0}^{\prime(ext)} = (\mathbf{T}_i^{-1})^T \mathbf{L}_{i+1}^{\prime(ext)} \mathbf{T}_i^{-1}.$$

С помощью процедуры, аналогичной вычислению средней напряженности поля в однослойной оболочке [27], получается следующее выражение для средней напряженности поля в i-м слое оболочки:

$$\langle \mathbf{E}_i \rangle = \left[-\boldsymbol{\beta}_i + \frac{\tilde{v}_{i+1}}{1-\tilde{v}_{i+1}} \left(\mathbf{L}_{i+1,0}^{\prime(ext)} - \mathbf{L}_{i,0}^{\prime(int)} \right) \boldsymbol{\alpha}_i \right] \mathbf{E}_0. \qquad (52)$$

Поле внутри ядра однородно, его напряженность может быть записана как $\mathbf{E}_n = -\boldsymbol{\beta}_n \mathbf{E}_0$, где $\boldsymbol{\beta}_n$ — постоянный тензор 2-го ранга, поэтому средняя напряженность поля в ядре

$$\langle \mathbf{E}_n \rangle = -\boldsymbol{\beta}_n \mathbf{E}_0. \qquad (53)$$

Из (52), (53) вытекает вид тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{in}^0$:

$$\boldsymbol{\lambda}_{in}^0 = \left[\boldsymbol{\beta}_i - \frac{\tilde{v}_{i+1}}{1-\tilde{v}_{i+1}} \left(\mathbf{L}_{i+1,0}^{\prime(ext)} - \mathbf{L}_{i,0}^{\prime(int)} \right) \boldsymbol{\alpha}_i \right] \boldsymbol{\beta}_n^{-1}, \ \ i = \overline{1, n}, \qquad (54)$$

при этом естественным образом следует считать, что $\tilde{v}_{n+1} = 0$. Подставляя (54) в (25), получим

$$\boldsymbol{\lambda}_{n0} = \boldsymbol{\beta}_n \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}_1 (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}^c) \right) \right.$$
$$\left. \times \left[f_i \boldsymbol{\beta}_i - v_{i+1}' \left(\mathbf{L}_{i+1,0}^{\prime(ext)} - \mathbf{L}_{i,0}^{\prime(int)} \right) \boldsymbol{\alpha}_i \right] \right]^{-1}, \qquad (55)$$

где v_{i+1}' — объемная доля объема внутри поверхности $S_{i+1}^{(k)}$ к объему всего включения, т.е.

$$v_{i+1}' = \frac{a_{i+1,1} a_{i+1,2} a_{i+1,3}}{a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3}}, \ \ i = \overline{0, n-1}; \ \ v_{n+1}' = 0.$$

Здесь было учтено, что

$$f_i = \frac{a_{i,1} a_{i,2} a_{i,3} - a_{i+1,1} a_{i+1,2} a_{i+1,3}}{a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3}} = (1 - \tilde{v}_{i+1}) v_i',$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Как и в рассмотренном примере 3.2, матрицу можно считать состоящей из сферических частиц без оболочки, для них (см. (46))

$$f_i^{(m)} = 0, \ \ i = \overline{1, n-1}; \quad f_n^{(m)} = 1; \quad \boldsymbol{\lambda}_{n0}^{(m)} = \frac{3\varepsilon^c}{(2\varepsilon^c + \varepsilon_m)} \mathbf{I}.$$

С учетом идентичности всех включений и одинаковой их ориентации в пространстве, усреднение в (32) сведется к вычислению среднего арифметического с весами, равными объемным долям компонентов, т.е. для вычисления $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ будем использовать формулу, аналогичную (47), подставляя в которую (46), получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1-f)\varepsilon_m \frac{3\varepsilon^c}{(2\varepsilon^c + \varepsilon_m)} \mathbf{I} + f \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\lambda}_{in}^0 \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \right]$$
$$\times \left[(1-f) \frac{3\varepsilon^c}{(2\varepsilon^c + \varepsilon_m)} \mathbf{I} + f \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{\lambda}_{in}^0 \right) \boldsymbol{\lambda}_{n0} \right]^{-1},$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{in}^0$, $i = \overline{1, n}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{n0}$ вычисляются по формулам (54), (55) соответственно.

Заключение

Основными результатами настоящей работы являются предложенное в ней обобщенное приближение эффективного поля для вычисления эффективных характеристик неоднородной среды, состоящей из включений с многослойной оболочкой, а также полученное с его помощью выражение (32) для тензора эффективной диэлектрической проницаемости такой среды. Данное приближение обладает большой степенью общности и может быть применено к многокомпонентным средам, позволяет учитывать текстуру и вероятностное распределение форм включений. Показано, что в предельных случаях сред с однородными включениями предложенное в работе приближение дает такие же результаты, что и обобщенное сингулярное приближение [20].

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках Государственного задания по теме № 122040800154-7.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] H. Gleiter. Acta Mater., **48** (1), 1 (2000). DOI: 10.1016/S1359-6454(99)00285-2
[2] Н.Н. Трофимов, М.З. Канович, Э.М. Карташов, В.И. Натрусов, А.Т. Пономаренко, В.Г. Шевченко, В.И. Соколов, И.Д. Симонов-Емельянов. *Физика композиционных материалов* (Мир, М., 2005), т. 1.
[3] Н.Н. Трофимов, М.З. Канович, Э.М. Карташов, В.И. Натрусов, А.Т. Пономаренко, В.Г. Шевченко, В.И. Соколов, И.Д. Симонов-Емельянов. *Физика композиционных материалов* (Мир, М., 2005), т. 2.
[4] R.D. Averitt, D. Sarkar, N.J. Halas. Phys. Rev. Lett., **78** (22), 4217 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4217
[5] J.B. Jackson, N.J. Halas. J. Phys. Chem. B, **105** (14), 2743 (2001). DOI: 10.1021/jp003868k
[6] A. Sihvola. PIER, **62**, 317 (2006). DOI: 10.2528/PIER06042801

[7] Д.В. Гузатов, А.А. Ораевский, А.Н. Ораевский. Квантовая электроника, **33** (9), 817 (2003). [D.V. Guzatov, A.A. Oraevsky, A.N. Oraevsky. Quant. Electron., **33** (9), 817 (2003). DOI: 10.1070/QE2003v033n09ABEH002505]

[8] D.C. Tzarouchis, A. Sihvola. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, **66** (1), 323 (2018). DOI: 10.1109/TAP.2017.2769688

[9] A.G. Every, Y. Tzou, D.P.H. Hasselman, R. Raj. Acta Metall. Mater., **40** (1), 123 (1992). DOI: 10.1016/0956-7151(92)90205-S

[10] S.V. Kidalov, F.M. Shakhov. Materials, **2** (4), 2467 (2009). DOI: 10.3390/ma2042467

[11] K. Pietrak, M. Kubiś, M. Langowski, M. Kropielnicki, P. Wultański. Composites Theory and Practice, **17** (4), 183 (2017). DOI: 10.5281/zenodo.1188082

[12] И.В. Лавров, А.А. Кочетыгов, В.В. Бардушкин, В.Б. Яковлев. Тепловые процессы в технике, **12** (2), 78 (2020). DOI: 10.34759/tpt-2020-12-1-78-86

[13] В.Ю. Чухланов, О.Г. Селиванов. Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований, **8** (1), 26 (2014).

[14] E.H. Kerner. Proc. Phys. Soc. B, **69** (8), 802 (1956).

[15] Л.А. Апресян, Д.В. Власов, Д.А. Задорин, В.И. Красовский. ЖТФ, **87** (1), 10 (2017). DOI: 10.21883/JTF.2017.01.44011.1841 [L.A. Apresyan, D.V. Vlasov, D.A. Zadorin, V.I. Krasovskii. Tech. Phys., **62** (1), 6 (2017). DOI: 10.1134/S1063784217010029]

[16] В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева. Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн., **3**, 29 (2016). DOI: 10.7463/rdopt.0316.0846170

[17] A. Sihvola. *Electromagnetic Mixing Formulas and Applications* (The Institution of Electrical Engineers, London, 1999)

[18] В.И. Колесников, В.В. Бардушкин, И.В. Лавров, А.П. Сычев, В.Б. Яковлев. ДАН, **476** (3), 280 (2017). DOI: 10.7868/S0869565217270081 [V.I. Kolesnikov, V.V. Bardushkin, I.V. Lavrov, A.P. Sychev, V.B. Yakovlev. Dokl. Phys., **62** (9), 415 (2017). DOI: 10.1134/S1028335817090087]

[19] N. Bonfoh, F. Dinzart, H. Sabar. Appl. Mathem. Modell., **87**, 584 (2020). DOI: 10.1016/j.apm.2020.06.005

[20] В.И. Колесников, В.Б. Яковлев, В.В. Бардушкин, И.В. Лавров, А.П. Сычев, Е.Н. Яковлева. ДАН, **452** (1), 27 (2013). DOI: 10.7868/S0869565213260083 [V.I. Kolesnikov, V.B. Yakovlev, V.V. Bardushkin, I.V. Lavrov, A.P. Sychev, E.N. Yakovleva. Dokl. Phys., **58** (9), 379 (2013). DOI: 10.1134/S1028335813090012]

[21] А.Г. Фокин. ЖТФ, **41** (6), 1073 (1971). [A.G. Fokin. Sov. Phys. Tech. Phys., **16**, 849 (1971).]

[22] С.М. Никольский. *Курс математического анализа* (Наука, М., 1991), т. 2.

[23] С.Р. де Гроот, Л.Г. Сатторп. *Электродинамика* (Наука, М., 1982), [Пер. с англ. S.R. de Groot, L.G. Suttorp. *Foundations of Electrodynamics* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972)]

[24] A. Sihvola, I.V. Lindell. IEEE/URSI Symposium, Syracuse, July 1988. 23.5. P. 388–391.

[25] Я.С. Дубнов. *Основы векторного исчисления* (ГИТТЛ, М., 1952), т. 2.

[26] И.В. Лавров, В.Б. Яковлев. ЖТФ, **87** (7), 963 (2017). DOI: 10.21883/JTF.2017.07.44663.1964 [I.V. Lavrov, V.B. Yakovlev. Tech. Phys., **62** (7), 979 (2017). DOI: 10.1134/S106378421707009X]

[27] В.И. Колесников, И.В. Лавров, В.В. Бардушкин, А.П. Сычев, В.Б. Яковлев. Докл. РАН. Физика, технические науки, **498** (1), 11 (2021). DOI: 10.31857/S268674002103010X [V.I. Kolesnikov, I.V. Lavrov, V.V. Bardushkin, A.P. Sychev, V.B. Yakovlev. Dokl. Phys., **66** (5), 123 (2021). DOI: 10.1134/S1028335821050049]