

15
Зондирование частотной дисперсии магнитной проницаемости образца при динамическом взаимодействии с намагниченным зондом

© Г.В. Дедков

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004 Нальчик, Россия
e-mail: gv_dedkov@mail.ru

Поступило в Редакцию 5 февраля 2022 г.
В окончательной редакции 25 февраля 2022 г.
Принято к публикации 25 февраля 2022 г.

Рассмотрены силы, действующие на магнитную частицу при нерелятивистском движении параллельно поверхности однородной среды с частотной дисперсией магнитной проницаемости. Получены общие выражения для нормальной (притягивающей) и латеральной (тормозящей) сил, действующих на малую дипольную частицу и протяженный зонд. Показано, что при произвольной ориентации вектора дипольного магнитного момента частицы, наряду с силой притяжения и силой торможения, появляется также зависящая от скорости боковая сила, перпендикулярная вектору скорости. Обсуждена возможность применения полученных результатов для исследования частотно-зависящей магнитной проницаемости наноструктурных материалов и пленок в динамическом режиме сканирования магнитно-силовой микроскопии с магнитными зондами. Приведены численные оценки величины ожидаемых сил, коэффициентов трения и изменения добротности осцилляторов магнитно-силовой микроскопии в случае частотной дисперсии магнитной проницаемости релаксационного типа.

Ключевые слова: наноструктурные магнитные материалы, частотная дисперсия магнитной проницаемости, магнитно-силовая микроскопия.

DOI: 10.21883/JTF.2022.05.52383.25-22

Введение

Исследование взаимодействия электромагнитных волн СВЧ диапазона с магнитными материалами представляет большой интерес для разработки технологии их изготовления и применений в качестве концентраторов или поглотителей СВЧ поля [1–6]. В частности, электромагнитное волновое оборудование и устройства, работающие на частотах 0.5–8 GHz, широко используются в беспроводной связи, системах передачи данных, локальных сетях и т.д. Поскольку многие наноструктурные материалы имеют сложную зависимость магнитной проницаемости (МП) от частоты, имеется необходимость управления частотной дисперсией МП для получения высоких значений магнитной проницаемости, малых потерь или сильной частотной зависимости в заданном диапазоне [7,8]. Стандартными методами изучения частотной дисперсии МП являются метод Никольсона–Росса–Уира в коаксиальной линии или в свободном пространстве, а также метод измерения МП тонких ферромагнитных пленок с использованием закороченной ячейки [8]. Однако эти макроскопические методы не позволяют проводить локальное зондирование дисперсии МП. Стандартные методики сканирующей магнитно-силовой микроскопии (МСМ) [9,10] и магнитно-резонансной силовой микроскопии [11,12] дают возможность исследовать доменную структуру, пространственное распределение резонансных свойств

и спектры собственных магнитных колебаний образца. При этом магнитный зонд служит либо источником внешнего поля, действующим на него, либо детектором магнитных моментов. Но в обоих случаях измеряется квазистатическая консервативная сила магнитного взаимодействия зонда с образцом, для которой электродинамический отклик почти не содержит информации о частотной дисперсии МП материала поверхности.

Целью настоящей работы является обсуждение возможности локального МСМ зондирования частотной дисперсии МП материалов путем измерения диссипативной силы взаимодействия (силы трения) между намагниченным зондом и образцом в бесконтактном режиме взаимодействия. Величина этой силы (коэффициент „вязкого“ трения) непосредственно зависит от формы частотной зависимости МП материала образца. С этой целью в разд. 1,2 получены общие выражения для нормальной (консервативной) и латеральной (диссипативной) сил взаимодействия с поверхностью точечной магнитной дипольной частицы и протяженного зонда в форме параболоида вращения (сферы) при нерелятивистском движении параллельно поверхности, характеризующейся магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$. В разд. 3 приведены численные расчеты величины ожидаемых сил, коэффициентов трения и добротности осциллятора МСМ при дисперсии МП релаксационного вида [5].

При записи всех величин, если не указано, используется гауссова система единиц.

1. Взаимодействие малой дипольной частицы с поверхностью

Сначала рассмотрим взаимодействие малой частицы, обладающей постоянным дипольным магнитным моментом $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$, с поверхностью однородной и изотропной среды, характеризующейся магнитной проницаемостью общего вида $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$. Будем считать, что частица движется с постоянной скоростью V в направлении оси x декартовой системы координат на расстоянии z_0 от поверхности (рис. 1, а).

В отсутствие внешнего магнитного поля сила, действующая на частицу, определяется выражением классической электродинамики [13]

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{m}\mathbf{H}), \quad (1)$$

где \mathbf{H} — вектор магнитного поля, индуцированного поляризационным током частицы $\mathbf{j} = c \text{rot} \mathbf{M}$ (c — скорость света в вакууме, \mathbf{M} — вектор поляризации). Для точечного магнитного диполя запишем \mathbf{M} в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}\delta(x - Vt)\delta(y)\delta(z - z_0). \quad (2)$$

Вектор \mathbf{H} находится из соотношения $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$, где \mathbf{A} — векторный потенциал, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3)$$

с условием кулоновской калибровки $\text{div} \mathbf{A} = 0$. Уравнение (3) распадается на три уравнения Пуассона для проекций векторного потенциала A_x, A_y, A_z , аналогичных уравнению для скалярного электрического потенциала диполя в конфигурации, показанной на рис. 1, а. Метод решения этой и аналогичных задач подробно изложен в [14]. Разложим векторные функции \mathbf{A} и \mathbf{M} в трехмерные интегралы Фурье по компонентам двумерного волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ и по частоте ω :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega}(z) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad (4)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{M}_{\mathbf{k}\omega}(z) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)), \quad (5)$$

где $\mathbf{r} = (\rho, z) = (x, y, z)$. Используя (2), находим $\mathbf{M}_{\mathbf{k}\omega}$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathbf{k}\omega}(z) &= \int dx dy dt \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t)) \\ &= 2\pi \mathbf{m} \delta(\omega - k_x V) \delta(z - z_0). \end{aligned} \quad (6)$$

По аналогии с (6) с учетом связи $\mathbf{j} = c \text{rot} \mathbf{M}$, для проекций фурье-трансформант плотности тока $\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}(z)$ будем иметь

$$j_{\mathbf{k}\omega,x}(z) = 2\pi c \delta(\omega - k_x V) [ik_y m_z \delta(z - z_0) - m_y \delta'(z - z_0)], \quad (7)$$

$$j_{\mathbf{k}\omega,y}(z) = 2\pi c \delta(\omega - k_x V) [m_x \delta'(z - z_0) - ik_x m_z \delta(z - z_0)], \quad (8)$$

$$j_{\mathbf{k}\omega,z}(z) = 2\pi c \delta(\omega - k_x V) [ik_x m_y \delta(z - z_0) - ik_y m_x \delta(z - z_0)]. \quad (9)$$

Переходя в (3) к фурье-компонентам, получим систему уравнений

$$(i = x, y, z, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}),$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) A_{\mathbf{k}\omega,i}(z) = -\frac{4\pi}{c} j_{\mathbf{k}\omega,i}(z). \quad (10)$$

Решение уравнений (10) удобно находить по частям, рассматривая отдельно случаи с разной ориентацией вектора дипольного момента: $\mathbf{m} = (0, 0, m_z)$, $\mathbf{m} = (m_x, 0, 0)$ и $\mathbf{m} = (0, m_y, 0)$, а затем суммируя полученные решения. В случае $\mathbf{m} = (0, 0, m_z)$, например, полагая $A_{\mathbf{k}\omega,z}(z) = 0$, уравнения (10) сводятся к системе двух уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) A_{\mathbf{k}\omega,x}(z) = -i8\pi^2 k_y m_z \delta(\omega - k_x V) \delta(z - z_0), \quad (11)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right) A_{\mathbf{k}\omega,y}(z) = i8\pi^2 k_x m_z \delta(\omega - k_x V) \delta(z - z_0). \quad (12)$$

Общее решение уравнений (11), (12) в областях $z > 0$ и $z \leq 0$ включает четыре константы интегрирования. Одним из условий для определения этих констант является калибровочное соотношение $\text{div} \mathbf{A} = 0$, а три других вытекают из условий непрерывности тангенциальных проекций магнитного поля H_x, H_y и нормальной проекции магнитной индукции B_z на границе $z = 0$. Процедура решения уравнений (11), (12) описана в Приложении. В результате получаются следующие выражения для фурье-компонент векторного потенциала в вакуумной области $z > 0$, необходимые для вычисления силы (1):

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}\omega,x}(z) &= i \frac{(2\pi)^2}{k} k_y m_z \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \exp(-k(z + z_0)) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-k|z - z_0|) \right] \delta(\omega - k_x V), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{k}\omega,y}(z) &= -i \frac{(2\pi)^2}{k} k_x m_z \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \exp(-k(z + z_0)) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-k|z - z_0|) \right] \delta(\omega - k_x V). \end{aligned} \quad (14)$$

В формулах (13) и (14) первые слагаемые в скобках соответствуют индуцированному полю поверхности,

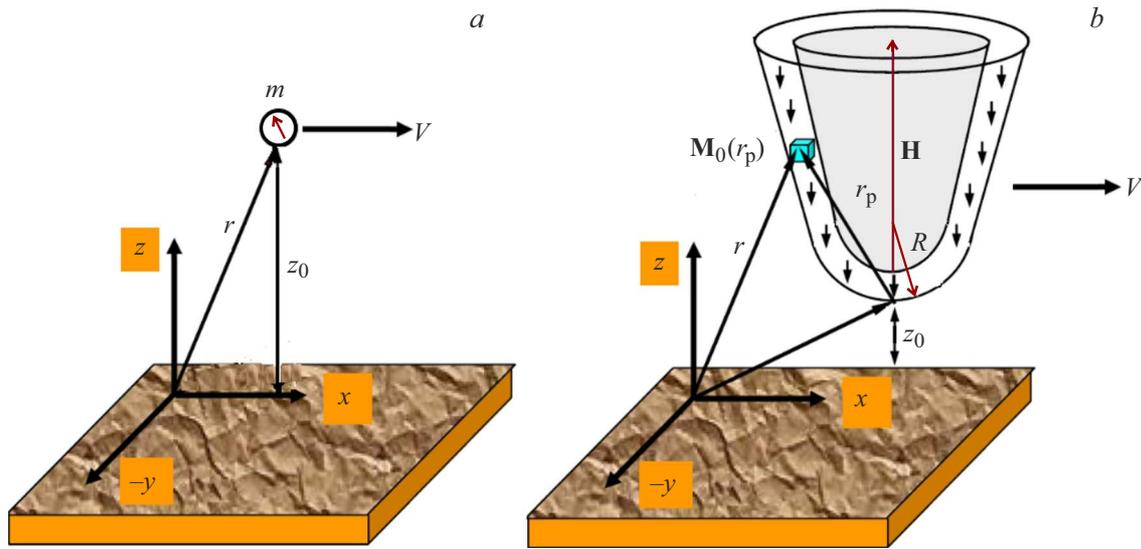


Рис. 1. Схема взаимодействия дипольной магнитной частицы (а) и протяженного зонда (b) с магнитной поверхностью.

а вторые — собственному полю частицы в вакууме. Аналогично находятся решения уравнений (10) для других проекций дипольного момента (см. Приложение). В общем случае $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$, после суммирования соответствующих индуцированных фурье-компонент векторного потенциала, описываемых выражениями (13), (14) и (П8)–(П11), будем иметь

$$A_{\mathbf{k}\omega,x}(z) = \frac{(2\pi)^2}{k} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) (im_z k_y - m_y k) \times \exp(-k(z + z_0)) \delta(\omega - k_x V), \quad (15)$$

$$A_{\mathbf{k}\omega,y}(z) = \frac{(2\pi)^2}{k} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) (-im_z k_x + m_x k) \times \exp(-k(z + z_0)) \delta(\omega - k_x V), \quad (16)$$

$$A_{\mathbf{k}\omega,z}(z) = \frac{(2\pi)^2}{k} \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right) (im_x k_y - im_y k_x) \times \exp(-k(z + z_0)) \delta(\omega - k_x V). \quad (17)$$

Функция $\Delta(\omega) = (\mu(\omega) - 1)/(\mu(\omega) + 1)$ в (15)–(17) аналогична функции диэлектрического отклика поверхности при взаимодействии с электрическим диполем \mathbf{d} (а также с зарядами и частицами с другими мультипольными моментами) с заменой $\mu(\omega) \rightarrow \varepsilon(\omega)$ [14]. Подставляя (15)–(17) в (4), получим величину магнитного поля, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. При этом в интегральных выражениях для проекций вектора \mathbf{H} появляются производные по координатам x, y, z , действие которых сводится к умножению соответствующих фурье-компонент на ik_x, ik_y и $-k$. Результирующие выражения для проекций фурье-трансформант индуцированного магнитного поля име-

ют вид

$$H_{\mathbf{k}\omega,x}(z) = kA_{\mathbf{k}\omega,y}(z) + ik_y A_{\mathbf{k}\omega,z}(z) = A(m_x k_x^2 + m_y k_x k_y - im_z k_x k), \quad (18)$$

$$H_{\mathbf{k}\omega,y}(z) = -ik_x A_{\mathbf{k}\omega,z}(z) - kA_{\mathbf{k}\omega,x}(z) = A(m_y k_y^2 + m_x k_x k_y - im_z k_y k), \quad (19)$$

$$H_{\mathbf{k}\omega,z}(z) = ik_x A_{\mathbf{k}\omega,y}(z) - ik_y A_{\mathbf{k}\omega,x}(z) = A(m_z k^2 + im_x k_x k + im_y k_y k), \quad (20)$$

где

$$A = \frac{(2\pi)^2}{k} \Delta(\omega) \exp(-k(z + z_0)) \delta(\omega - k_x V). \quad (21)$$

Подставляя (18)–(20) в разложение Фурье для \mathbf{H} и затем в (1), после несложных преобразований формула (1) принимает вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2\pi} \text{grad} \int d^2 k k^{-1} (m_x^2 k_x^2 + m_y^2 k_y^2 + m_z^2 k^2 + 2m_x m_y k_x k_y) \times \Delta(k_x V) \exp(-k(z + z_0)) \exp(ik_x(x - Vt) + ik_y y), \quad (22)$$

$$x = Vt, \quad y = 0, \quad z = z_0.$$

Отметим, что для нахождения различных проекций вектора \mathbf{F} в (22) сначала производится дифференцирование по координатам x, y, z , а затем подставляются координаты частицы $x = Vt, y = 0, z = z_0$. В результате с учетом аналитических свойств функции $\Delta(\omega)$ (четность вещественной части и нечетность мнимой) из (22) следует

$$F_z = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Delta'(k_x V) (m_x^2 k_x^2 + m_y^2 k_y^2 + m_z^2 k^2) \times \exp(-2kz_0), \quad (23)$$

$$F_x = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Delta''(k_x V) k_x k^{-1} \times (m_x^2 k_x^2 + m_y^2 k_y^2 + m_z^2 k^2) \exp(-2kz_0), \quad (24)$$

$$F_y = -\frac{m_x m_y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Delta''(k_x V) k_x k_y^2 k^{-1} \exp(-2kz_0). \quad (25)$$

Формулы (23) и (24) полностью совпадают с аналогичными выражениями для силы взаимодействия движущегося электрического диполя \mathbf{d} с диэлектрической поверхностью (при замене $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{d}$, $\mu(\omega) \rightarrow \epsilon(\omega)$). При этом (23) описывает силу притяжения диполя к поверхности, а (24) — диссипативную (тормозящую) силу. В линейном разложении по скорости (24) сводится к силе трения вязкого характера, пропорциональной скорости $F_x \propto V$. Далее диссипативную силу F_x всегда будем называть силой трения. Компонента силы F_y не имеет электрического аналога и также пропорциональна скорости в линейном разложении по V , но для ее существования необходимо отличие от нуля проекций m_x и m_y магнитного момента. В итоге, как следует из (23)–(25), направления всех трех составляющих магнитной силы противоположны направлениям осей координат на рис. 1 (при положительных значениях интегралов).

2. Взаимодействие протяженного зонда с поверхностью

Приближение точечного диполя теряет силу при размерах частицы, сравнимых с величиной расстояния от поверхности. Однако теорию, развитую в разд. 1, легко обобщить, разбивая объем однородно намагниченной частицы на элементарные составляющие ΔV_n и используя принцип суперпозиции для нахождения результирующей силы (рис. 1, *b*). При этой модификации вместо выражения (2) будем иметь

$$\mathbf{M}(x, y, z, t) = \sum_n \mathbf{m}_n \delta(x - x_n - Vt) \delta(y - y_n) \delta(z - z_n), \quad (26)$$

где \mathbf{m}_n — магнитный момент, а x_n, y_n, z_n — координаты элементарного объема ΔV_n . Учитывая (26), для фурье-компоненты вектора магнитной поляризации получим (ср. с (6))

$$\mathbf{M}_{\mathbf{k}\omega}(z) = 2\pi \delta(\omega - k_x V) \sum_n \mathbf{m}_n \exp(-i\mathbf{k}\rho_n) \delta(z - z_n), \quad (27)$$

где $\rho = (x_n, y_n)$ — двумерный вектор координат объема ΔV_n в плоскости (x, y) . Дальнейшая процедура вычисления индуцированного магнитного поля полностью

повторяет разд. 1. В частности, формула (18) для фурье-трансформанты $H_{\mathbf{k}\omega, x}(z)$ принимает вид

$$H_{\mathbf{k}\omega, x}(z) = \frac{(2\pi)^2}{k} \Delta(\omega) \exp(-k(z + z_0)) \delta(\omega - k_x V) \times \sum_n (m_{x,n} k_x^2 + m_{y,n} k_x k_y - i m_{z,n} k_x k) \times \exp(-k(z + z_0)) \exp(-i\mathbf{k}\rho_n) \quad (28)$$

и аналогично для остальных компонент (ср. с (18)–(20)). В (28) использованы обозначения проекций $m_{j,n}$ вектора \mathbf{m}_n при $j = x, y, z$. С учетом (28) и аналогичных выражений для остальных фурье-компонент магнитного поля формулы для проекций силы, аналогичные (23)–(25), принимают вид

$$F_z = -\frac{1}{2\pi} \sum_n \sum_{n'} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Delta'(k_x V) \times \exp(-k(z_n + z_{n'})) \exp(-\mathbf{k}(\rho_n - \rho_{n'})) \times (m_{x,n} m_{x,n'} k_x^2 + m_{y,n} m_{y,n'} k_y^2 + m_{z,n} m_{z,n'} k^2), \quad (29)$$

$$F_x = -\frac{1}{2\pi} \sum_n \sum_{n'} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Delta''(k_x V) k_x k^{-1} \times \exp(-k(z_n + z_{n'})) \exp(-\mathbf{k}(\rho_n - \rho_{n'})) \times (m_{x,n} m_{x,n'} k_x^2 + m_{y,n} m_{y,n'} k_y^2 + m_{z,n} m_{z,n'} k^2), \quad (30)$$

$$F_y = -\frac{1}{\pi} \sum_n \sum_{n'} m_{x,n} m_{y,n} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \Delta''(k_x V) k_x k_y^2 k^{-1} \times \exp(-k(z_n + z_{n'})) \exp(-\mathbf{k}(\rho_n - \rho_{n'})). \quad (31)$$

В практически важных случаях для зондов, обладающих цилиндрической симметрией, выражения (29)–(31) можно дополнительно упростить. Рассмотрим два наиболее важных.

2.1. Зонд в форме параболоида вращения

Рассмотрим однородно-намагниченный зонд с вертикальным направлением вектора намагниченности по всему объему ($\mathbf{M}_0 \parallel z$), имеющий форму параболоида вращения: $z = z_0 + \rho^2/2R$, $z_0 \leq z < z_0 + H$, $H \gg R$ (рис. 1, *b*). Записывая \mathbf{m}_n и $\mathbf{m}_{n'}$ в виде

$$\mathbf{m}_n = \mathbf{M}_0 \Delta V_n = \mathbf{M}_0 \rho d\rho dz d\phi,$$

$$\mathbf{m}_{n'} = \mathbf{M}_0 \Delta V_{n'} = \mathbf{M}_0 \rho' d\rho' dz' d\phi'$$

и переходя в (30) от суммирования по n и n' к интегралам по объему зонда, после интегрирования по

углам ϕ , ϕ' и по координатам ρ , ρ' , получим

$$F_x = -2\pi M_0^2 \int dk_x dk_y k^{-1} k_x \Delta''(k_x V) \int_{z_0}^{H+z_0} dz \sqrt{2R(z-z_0)} \times J_1(k\sqrt{2R(z-z_0)}) \exp(-kz) \int_{z_0}^{H+z_0} dz' \sqrt{2R(z'-z_0)} \times J_1(k\sqrt{2R(z'-z_0)}) \exp(-kz'). \quad (32)$$

При выводе формулы (32) учтено определение функции Бесселя

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\pm i x \cos y) dy \quad (33)$$

и интегральное соотношение $\int dx x J_0(x) = x J_1(x)$ [15]. Совершенно аналогично преобразуется и (29). Боковая сила (31) при такой ориентации вектора намагниченности отсутствует. Поскольку внутренние интегралы в (32) идентичны, после замены переменных $u = k\sqrt{2R(z-z_0)}$ и $u' = k\sqrt{2R(z'-z_0)}$, учитывая аналитические свойства функции $\Delta(k_x V)$, формула (32) принимает вид

$$F_x = -2\pi R^{-2} M_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_x k^{-7} \Delta''(k_x V) \times \exp(-2kz_0) f_1(2kR, \sqrt{H/2R})^2, \quad (34)$$

где функция $f_1(x, y)$ определяется выражением

$$f_1(x, y) = \int_0^{xy} du u^2 J_1(u) \exp(-u^2/x). \quad (35)$$

Аналогично для F_z будем иметь

$$F_z = -2\pi R^{-2} M_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^{-6} \Delta'(k_x V) \times \exp(-2kz_0) f_1(2kR, \sqrt{H/2R})^2. \quad (36)$$

Для практического применения этих общих результатов необходимо использовать конкретные выражения для функции магнитного отклика $\Delta(\omega)$. Стандартным приближением для магнитной проницаемости $\mu(\omega)$ является [5]

$$\mu(\omega) = 1 + \frac{\mu_s - 1}{1 - i\omega\tau - (\omega/\omega_0)^2}, \quad (37)$$

где τ и ω_0 — время релаксации и частота ферромагнитного резонанса, $\mu_s = \mu(0)$. Типичные значения ω_0 составляют $10^9 - 10^{10} \text{ с}^{-1}$. На частотах

$\omega \ll \omega_0$ резонансный член в знаменателе (37) можно опустить. Тогда, учитывая (37), выражение для $\Delta(\omega) = (\mu(\omega) - 1)/(\mu(\omega) + 1)$ принимает вид

$$\Delta(\omega) = \frac{\mu_s^2 - 1}{(\mu_s + 1)^2 + 4\omega^2\tau^2} + i \frac{2\omega\tau(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)^2 + 4\omega^2\tau^2}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (34), (36), после перехода к полярным координатам для волнового вектора (k_x, k_y) и интегрирования по углам с учетом табличного интеграла

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi / (1 + x^2 \cos^2 \phi) = 2\pi x^{-2} (1 - (1 + x^2)^{-1/2}),$$

получим

$$F_x = -32\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)} M_0^2 R^2 \frac{1}{a} \int_0^\infty dt t^{-6} \times e^{-pt} (1 - (1 + a^2 t^2)^{-1/2}) f_1(t, q)^2, \quad (39)$$

$$F_z = -64\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)} M_0^2 R^2 \int_0^\infty dt t^{-5} \times e^{-pt} (1 + a^2 t^2)^{-1/2} f_1(t, q)^2, \quad (40)$$

где $a = 2V\tau/R(\mu_s + 1)$, $p = z_0/R$, $q = \sqrt{2H/R}$. При $a \ll 1$ выражения (39) и (40) сводятся к

$$F_x = -32\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)^2} M_0^2 R V \tau \int_0^\infty dt t^{-4} e^{-pt} f_1(t, q)^2, \quad (41)$$

$$F_z = -64\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)} M_0^2 R^2 \left[\int_0^\infty dt t^{-5} e^{-pt} f_1(t, q)^2 - \frac{a^2}{2} \int_0^\infty dt t^{-3} e^{-pt} f_1(t, q)^2 \right]. \quad (42)$$

При $a \ll 1$, очевидно, второе слагаемое в (42) представляет лишь малую поправку, пропорциональную квадрату скорости. Если параболический зонд не является сплошным, а покрыт намагниченным слоем толщины h , причем параметры R и H характеризуют зонд с покрытием, то формулы (38)–(42) легко модифицировать, вычитая из правых частей аналогичные выражения с модифицированными параметрами $R \rightarrow R - h$, $z_0 \rightarrow z_0 + h$.

2.2. Зонд в форме сферы

Для сферического зонда с радиусом R и уравнением поверхности $(z - R - z_0)^2 + \rho^2 = R^2$, центр которого находится на расстоянии $R + z_0$ от поверхности образца,

в результате вычислений, аналогичных предыдущему случаю, получим

$$F_x = -16\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)} M_s^2 R^2 a^{-1} \int_0^\infty dt (1 - (1 + a^2 t^2)^{-1/2}) \times \exp(-2t(1+p)) f_2(t)^2, \quad (43)$$

$$F_z = -16\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)} M_s^2 R^2 \int_0^\infty dt t (1 + a^2 t^2)^{-1/2} \times \exp(-2t(1+p)) f_2(t)^2, \quad (44)$$

где, по-прежнему, $p = z_0/R$, $a = 2V\tau/R(\mu_s + 1)$ и

$$f_2(x) = \int_0^1 dt t J_1(xt) \sinh(x\sqrt{1-t^2}). \quad (45)$$

При $a \ll 1$ соответственно из (43), (44) следует

$$F_x = -16\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)^2} M_s^2 R V \tau \int_0^\infty dt t^2 \exp(-2t(1+p)) f_2(t)^2, \quad (46)$$

$$F_z = -16\pi^2 \frac{(\mu_s - 1)}{(\mu_s + 1)^2} M_s^2 R^2 \left[\int_0^\infty dt t \exp(-2t(1+p)) f_2(t)^2 - \frac{a^2}{2} \int_0^\infty dt t^3 \exp(-2t(1+p)) f_2(t)^2 \right]. \quad (47)$$

Для сферы, покрытой магнитным слоем толщиной h , из правых частей (43) и (44) следует вычесть аналогичные выражения, взятые при $R \rightarrow R-h$, $z_0 \rightarrow z_0+h$. Для магнитной проницаемости общего вида (37) сохраняют силу общие выражения (34), (36).

3. Численные результаты и обсуждение

Сначала кратко рассмотрим влияние движения зонда на величину сил F_x, F_z вблизи резонанса $\omega = \omega_0$ зависимости МП (37). В соответствии с (34) и (36) резонанс может проявляться при условии $kV = \omega_0$. Величина волнового вектора k принимает характерные значения $k = 1/2z_0$, поэтому соответствующая скорость зонда составит $V_{res} \approx 2\omega_0 z_0$. Тогда при типичном расстоянии зонда от поверхности 10 нм и частоте ферромагнитного резонанса $10^9 - 10^{11} \text{ s}^{-1}$ получим оценку скорости $V_{res} = 20 - 10^3 \text{ m/s}$. Между тем, даже при амплитуде колебаний $A = 1 \mu\text{m}$, весьма значительной для динамической моды МСМ, и типичной частоте механических колебаний $f = 300 \text{ kHz}$, величина максимальной скорости зонда оказывается гораздо меньше: $V_{max} = 2\pi f A \approx 1 \text{ m/s} \ll V_{res}$. Поэтому для

МСМ более реалистичным является случай релаксационной зависимости МП вида (38), когда справедливы формулы (39)–(47). Такой вид дисперсии, например, имеют ферриты $\text{Zn}_{1-x}\text{Ni}_x\text{Fe}_2\text{O}_4$ [16]. После нормировки на величину $F_0 = 32\pi^2 \frac{\mu_s - 1}{\mu_s + 1} M_0^2 R^2$ зависимости $f_x = F_x/F_0$ и $f_z = F_z/F_0$ будут являться функциями параметров p, q, a в случае параболического зонда и параметров p, a в случае сферического. Заметим, что при $\mu_s \gg 1$, $F = 10 \text{ nm}$ и $M_0 = 1740 \text{ G}$ (намагниченность насыщения железа [17]) величина F_0 составит 9.13 нН.

На рис. 2, 3 сравниваются зависимости f_x, f_z от параметра $a = 2V\tau/(\mu_s + 1)R$ при нескольких значениях приведенного расстояния $p = z_0/R$ для параболического (рис. 2, а, 3, а) и сферического (рис. 2, б, 3, б) зондов. Наличие экстремума у зависимостей силы трения f_s от a (рис. 2) приводит далее к немонотонным зависимостям добротности Q осциллятора МСМ, которая непосредственно измеряется в экспериментах. При $a \ll 1$ можно использовать стандартное определение добротности $Q = 2\pi f/\gamma$, где $\gamma = F_x/m_{\text{eff}}V$, m_{eff} — эффективная масса осциллятора, а сила трения определяется формулами (41) и (46). Для прямоугольного кантилевера с магнитным зондом на конце величина m_{eff} и собственная резонансная частота первой гармоники колебаний равны $m_{\text{eff}} \approx 0.24lwh\rho$ и $f = (3.516/2\pi)h/l^2\sqrt{E/12\rho}$ [9], где l, w, h — длина, ширина и толщина прямоугольной балки, а ρ и E — плотность и модуль Юнга материала. Поэтому, учитывая (41), для кантилевера с параболическим зондом на конце получим

$$Q = 0.77 \cdot 10^{-3} \frac{h}{l} \frac{w}{R} \frac{(\mu_s + 1)^2 \sqrt{E\rho}}{(\mu_s - 1) M_0^2 \tau} \frac{h}{\varphi_1(p, q)}, \quad (48)$$

где функция $\varphi_1(p, q) = F_x/F_0$ соответствует интегральному множителю в (41). Во всех расчетах далее используем следующие значения параметров кантилевера из кремния: $l = 100 \mu\text{m}$, $w = 20 \mu\text{m}$, $h = 5 \mu\text{m}$, $E = 150 \text{ GPa}$ и $\rho = 2.3 \text{ g/cm}^3$, $M_0 = 1740 \text{ G}$. Как следует из (48), добротность Q монотонно убывает с возрастанием времени релаксации τ . Для сферического зонда численный коэффициент в (48) нужно увеличить в два раза, а вместо $\varphi_1(p, q)$ подставить аналогичный интегральный множитель из (46).

При возрастании параметра a силы трения (39) и (43) нелинейно зависят от скорости зонда, поэтому для определения добротности используем соотношение $Q = E_0/\Delta E$, где $E_0 = 2\pi^2 f^2 A^2 m_{\text{eff}}$ — энергия осциллятора при гармонических колебаниях с амплитудой A (в расчетах далее будем использовать величину $A = 50 \text{ nm}$) и частотой f , а $\Delta E = \int_0^{1/f} F_x V dt$ — энергия диссипации за период. В случае параболического зонда

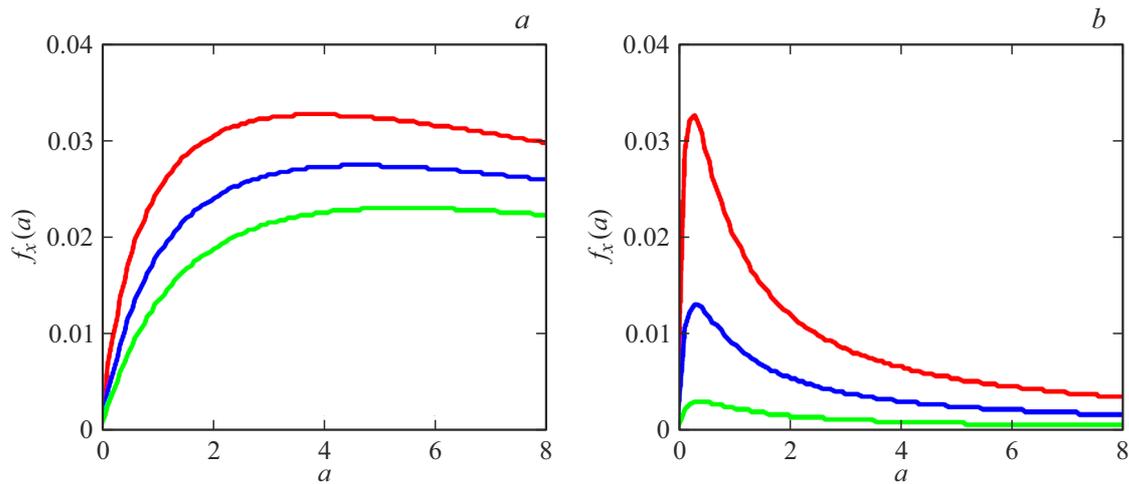


Рис. 2. Зависимость приведенной силы трения от параметра $a = 2V\tau/(\mu_s + 1)R$ в случае параболического (a) и сферического (b) зондов. Последовательность кривых сверху-вниз соответствует приведенным расстояниям $p = z_0/R = 0.1, 0.5, 1$ в случае (a) и $p = 0.1, 0.2, 0.4$ в случае (b). $q = 5$ в случае (a).

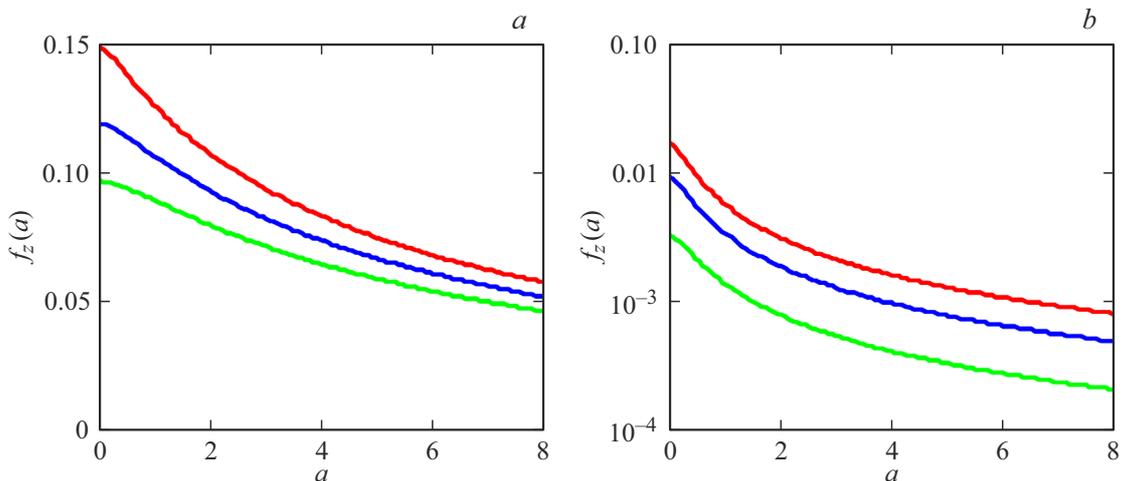


Рис. 3. Приведенная сила притяжения параболического (a) и сферического (b) зондов к поверхности. Параметры те же, что на рис. 2.

при указанной форме кантилевера МСМ получим

$$Q = 0.98 \cdot 10^{-4} \left(\frac{h}{l}\right)^3 \frac{A}{R} \frac{w}{R} \frac{(\mu_s + 1)}{(\mu_s - 1)} \frac{E}{M_0^2} \frac{1}{\varphi_2(p, q, a_1)}, \quad (49)$$

$$\varphi_2(p, q, a_1) = \int_0^1 dy y(1 - y^2)^{-1/2} f_x(p, q, a_1 y), \quad (50)$$

где $a_1 = 4\pi A f \tau / (\mu_s + 1)R$, а $f_x(p, q, a_1)y = F_x/F_0$ — нормированная сила трения в (39), зависящая от параметров $a \equiv a_1 y, p, q$. Для сферического зонда численный коэффициент в (49) нужно увеличить в два раза, а вместо $\varphi_2(p, q, a_1)$ взять аналогичную функцию, получаемую при подстановке в (50) нормированной силы трения, соответствующей (43). Величина Q в (49)

теперь является функцией от $\tau/(\mu_s + 1)$ и имеет более сложный вид.

На рис. 4 показаны зависимости Q от τ для двух типов зондов при значениях $\mu_s = 3, 10, 100$. Увеличение добротности Q с ростом τ на этих графиках обусловлено уменьшением силы трения (39) и (43) при $a \gg 1$ (рис. 2). На рис. 5 приведены также зависимости Q от приведенного расстояния $p = z_0/R$.

Зависимости сил трения и притяжения от расстояния являются монотонно убывающими. Это следует из сравнения кривых на рис. 2, 3, соответствующих разным значениям p , и из рис. 5.

Интересно отметить тот факт, что на малых расстояниях зондов от поверхности ($p = z_0/R = 0.1$) абсолютные величины сил притяжения для сферического зонда на порядок меньше, чем для параболического (при одинаковой величине R), в то же время величины сил

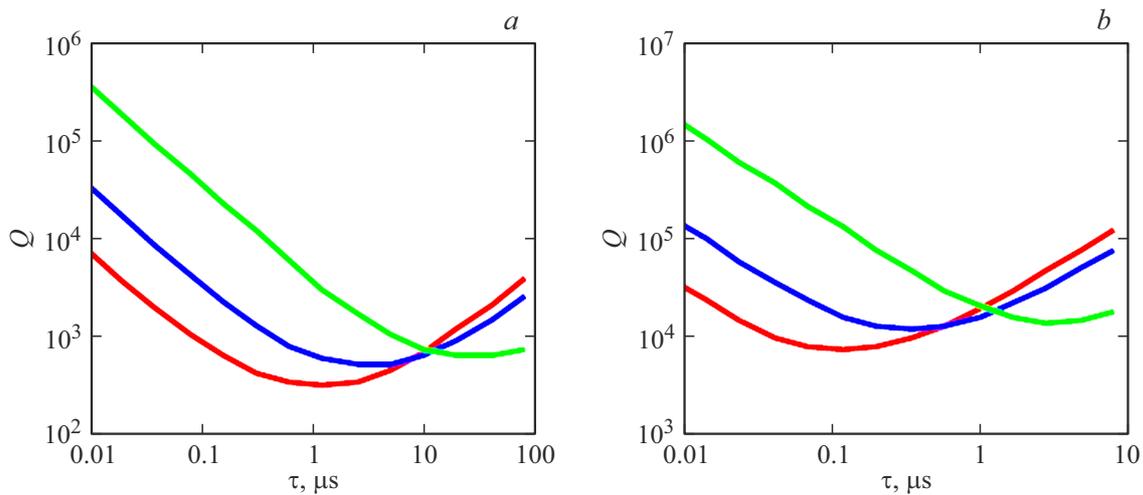


Рис. 4. Зависимость добротности осциллятора МСМ в случае параболического (а) и сферического (б) зондов от времени релаксации намагниченности образца. Последовательность кривых сверху-вниз соответствует значениям статической магнитной проницаемости $\mu_s = 3, 10, 100$. В случае (а) приняты значения $p = z_0/R = 0.5, q = 5$; в случае (б) $p = z_0/R = 0.2$.

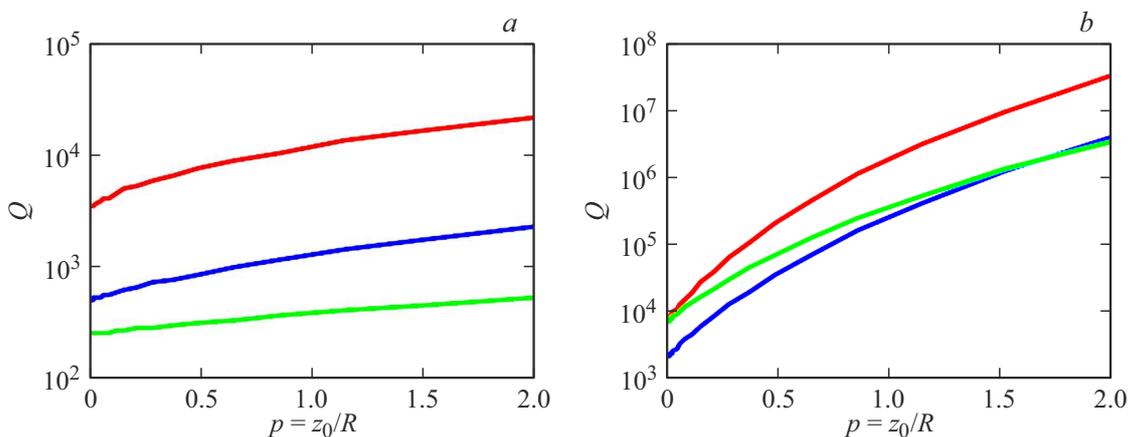


Рис. 5. Зависимость добротности осциллятора МСМ от приведенного расстояния апекса параболического (а) и сферического (б) зондов от поверхности. Последовательность кривых сверху-вниз соответствует времени релаксации намагниченности 0.01, 0.1 и 1 μs . В обоих случаях $\mu_s = 3$ и $q = 5$ в случае (а).

трения близки между собой (ср. рис. 2 и 3). Кроме того, из рис. 2 следует, что для сферического зонда силы трения могут превышать в несколько раз силы притяжения в области максимума зависимости $f_x(a)$. Для параболического зонда всегда имеет место обратное соотношение.

На рис. 6 приведены зависимости f_x и f_x/f_z от параметра $q = (H/2R)^{1/2}$, характеризующего длину параболического зонда. Из рис. 6 следует, что при $q > 5$ увеличение длины зонда слабо влияет на величину силы f_x , но при этом она значительно уменьшается по сравнению с силой притяжения f_z (рис. 6, б). Использование параболических зондов, вероятно, более целесообразно для достаточно больших расстояний зонда от поверхности ($z_0 \geq R$) вследствие более медленного убывания сил взаимодействия с расстоянием, что может быть важно при сканировании поверхностей с сильно

развитым рельефом. С другой стороны, как следует из рис. 4, 5, особенности поведения добротности для зондов разного типа проявляются при различном соотношении параметров τ и μ_s , поэтому выбор формы зонда должен определяться конкретными характеристиками МП поверхности образцов.

Для зондов с магнитным покрытием величина сил f_x и f_z несколько снижается по модулю по сравнению с зондами из однородного материала. Например, для сплошного вертикально намагниченного сферического зонда с радиусом 20 нм и зонда с радиусом 15 нм, имеющего магнитную оболочку с толщиной 5 нм, находящихся на минимальном расстоянии 10 нм от поверхности, различие в силах притяжения в статическом случае составит 16%.

Случай вертикального движения зонда по отношению к образцу требует отдельного рассмотрения, но ввиду

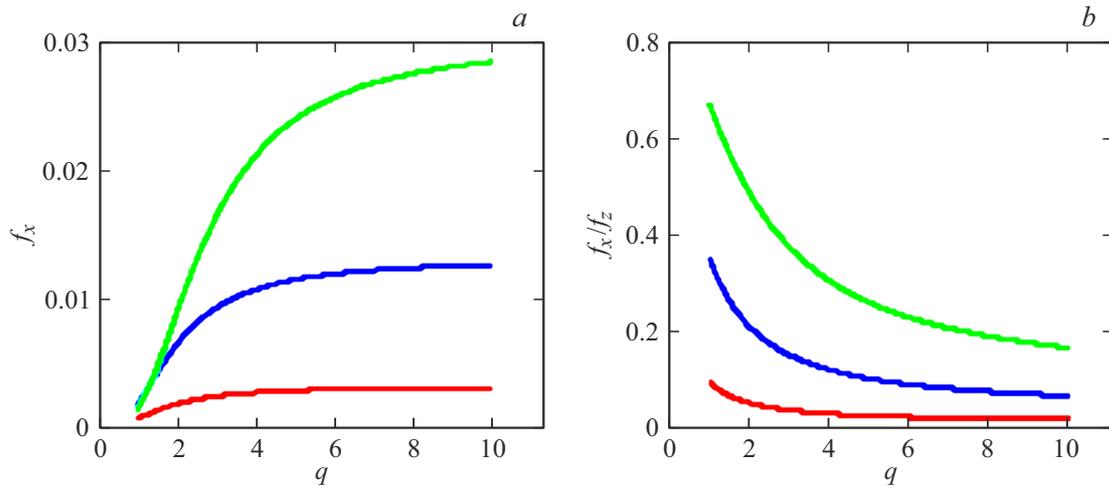


Рис. 6. Зависимость силы трения от приведенной высоты $q = \sqrt{H/2R}$ параболического зонда (a) и отношение f_x/f_z силы трения к силе притяжения (b) при $z_0/R = 0.5$. Последовательность кривых сверху-вниз соответствует параметрам $a = 0.1, 0.5, 2$.

близкой аналогии со случаем движения электрического диполя [14], можно ожидать, что численные коэффициенты в формулах для сил трения окажутся примерно в два раза выше.

Выводы

Получены интегральные выражения для силы взаимодействия движущегося намагниченного зонда МСМ с поверхностью наноструктурированного магнитного материала с частотной зависимостью магнитной проницаемости общего вида. Рассмотрены случаи малой дипольной частицы и протяженных зондов в форме параболоида вращения и сферы. Выполнены численные расчеты сил притяжения и трения зонда при нерелятивистском движении параллельно поверхности для МП релаксационного типа. Величина сил притяжения и трения имеет одинаковый порядок, а в случае зонда сферической формы сила трения может превышать силу притяжения в несколько раз при некоторых значениях параметров.

Вычислены коэффициенты добротности осциллятора МСМ в динамическом режиме. Показано, что зависимость добротности от времени магнитной релаксации образца имеет характерный минимум, характеристики которого зависят от формы зонда и величины статической МП образца. Результаты работы могут быть использованы для разработки нового метода исследования частотной дисперсии магнитной проницаемости материалов с применением МСМ.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Приложение

В соответствии с общим методом решения дифференциальных уравнений типа (11), (12) необходимо найти сумму решений соответствующих однородных уравнений и частных решений неоднородных. В областях $z > 0$ и $z \leq 0$ решением однородного уравнения $(d^2/dz^2 - k^2)y(z) = 0$ являются функции $y(z) = C_1 \exp(-kz)$ и $y(z) = C_2 \exp(kz)$, где C_1 и C_2 — произвольные константы. Частное решение неоднородного уравнения $(d^2/dz^2 - k^2)y(z) = f(z)$ (где $f(z)$ — известная функция) находится сверткой $\int_{-\infty}^{+\infty} G(z, z') f(z') dz'$ функции Грина $G(z, z')$ с $f(z)$.

Функция Грина $G(z, z')$ является решением уравнения

$$(d^2/dz^2 - k^2)G(z, z') = \delta(z - z') \quad (\text{П1})$$

в области $-\infty < z < \infty$ и имеет вид

$$G(z, z') = -\frac{1}{2k} \exp(-k|z - z'|). \quad (\text{П2})$$

Частные решения уравнений (11), (12), очевидно, находятся простым умножением (П2) на соответствующие коэффициенты в правой части этих уравнений. Учитывая это, решение уравнений (11) и (12) записывается в виде

$$A_x = \begin{cases} A_1 \exp(-kz) + i \frac{(2\pi)^2}{k} k_y m_z \delta(\omega - k_x V) \\ \quad \times \exp(-k|z - z_0|), & z > 0, \\ B_1 \exp(kz), & z \leq 0, \end{cases} \quad (\text{П3})$$

$$A_y = \begin{cases} A_2 \exp(-kz) - i \frac{(2\pi)^2}{k} k_y m_z \delta(\omega - k_x V) \\ \quad \times \exp(-k|z - z_0|), & z > 0, \\ B_2 \exp(kz), & z \leq 0. \end{cases} \quad (\text{П4})$$

В выражениях (П3), (П4) опущены для простоты индексы \mathbf{k}, ω фурье-компонент векторного потенциала A_x, A_y . Следует отметить, что фурье-компонентам индуцированного векторного потенциала в области $z > 0$ в (П3) и (П4) отвечают слагаемые, пропорциональные A_1, A_2 . Так как в рассматриваемом случае $A_z = 0$, условие калибровки $\text{div } \mathbf{A} = 0$ приводит к соотношениям $ik_x A_1 + ik_y A_2 = 0$ и $ik_x B_1 + ik_y B_2 = 0$, откуда

$$A_2 = -\frac{k_x}{k_y} A_1, \quad B_2 = -\frac{k_x}{k_y} B_1. \quad (\text{П5})$$

С учетом связи $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ условия непрерывности компонент напряженности H_x, H_y , и B_z индукции магнитного поля на границе $z = 0$ сводятся к требованию непрерывности величин $\partial A_y / \partial z, \partial A_x / \partial z$ и $\mu(\partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y)$. Принимая во внимание эти условия и (П3)–(П5), получим выражения (13), (14) для фурье-компонент индуцированного векторного потенциала. Для коэффициентов B_1, B_2 в (П3) и (П4) соответственно будем иметь

$$B_1 = -A_1 + i \frac{(2\pi)^2}{k} k_y m_z \exp(-kz_0), \quad (\text{П6})$$

$$B_2 = A_1 \frac{k_x}{k_y} - i \frac{(2\pi)^2}{k} k_x m_z \exp(-kz_0), \quad (\text{П7})$$

но они в дальнейшем не нужны, поскольку при вычислении силы (1) используется только векторный потенциал в области $z > 0$.

При вычислении вкладов в векторный потенциал от компонент m_x, m_y магнитного момента частицы заметим, что производные $\delta'(z - z')$, которые присутствуют в (7), (8), можно заменить на $k\delta(z - z')$, после чего уравнения для компонент векторного потенциала становятся полностью аналогичны уравнениям (11), (12). В результате при $m_x \neq 0, m_y = m_z = 0$ и $A_{\mathbf{k}\omega, x} = 0$ для остальных фурье-компонент векторного потенциала получим

$$A_{\mathbf{k}\omega, y}(z) = (2\pi)^2 m_x \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \exp(-k(z + z_0)) + \exp(-k|z - z_0|) \right] \delta(\omega - k_x V), \quad (\text{П8})$$

$$A_{\mathbf{k}\omega, z}(z) = i \frac{(2\pi)^2}{k} k_y m_x \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \exp(-k(z + z_0)) - \exp(-k|z - z_0|) \right] \delta(\omega - k_x V). \quad (\text{П9})$$

В случае $m_y \neq 0, m_x = m_z = 0$ и $A_{\mathbf{k}\omega, y} = 0$ соответственно будем иметь

$$A_{\mathbf{k}\omega, x}(z) = -(2\pi)^2 m_y \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \exp(-k(z + z_0)) + \exp(-k|z - z_0|) \right] \delta(\omega - k_x V), \quad (\text{П10})$$

$$A_{\mathbf{k}\omega, z}(z) = -i \frac{(2\pi)^2}{k} k_y m_x \left[\frac{\mu - 1}{\mu + 1} \exp(-k(z + z_0)) - \exp(-k|z - z_0|) \right] \delta(\omega - k_x V). \quad (\text{П11})$$

Список литературы

- [1] A.N. Lagarkov, K.N. Rozanov. *J. Magn. Magn. Mater.*, **321**, 2082 (2009). DOI: 10.1016/j.jmmm.2008.08.099
- [2] X.G. Chen, Y. Ye, J.P. Cheng, *J. Inorg. Mater.*, **26**, 449 (2011). DOI: 10.3724/sp.j.1077.2011.00449
- [3] F.M. Idris, M. Hashim, Z. Abbas, I. Ismail, R. Nazlan, I.R. Ibrahim. *J. Magn. Magn. Mater.*, **405**, 197 (2016). DOI: 10.1016/J.JMMM.2015.12.070
- [4] Zirui Jia, Di Lan, Kejun Lin, Ming Qin, Kaichang Kou, Guanglei Wu, Hongjing Wu, *J. Mat. Sci.: Mater. Electron.*, **29**, 17122 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10854-018-9909-z>
- [5] S.Y. Bobrovskii, V.A. Garanov, A.S. Naboko, A.V. Osipov, K.N. Rozanov, *EPJ Web of Conf.* **185**, 02002 (2018). <https://doi.org/10.1051/epjconf/201818502002>
- [6] S.S. Maklakov, A.N. Lagarkov, S.A. Maklakov, Y.A. Adamovich, D.A. Petrov, K.N. Rozanov, I.A. Ryzhikov, A.Y. Zarubina, K.V. Pokholok, D.S. Filimonov. *J. Alloys Compoun.*, **706**, 267 (2017). <https://doi.org/10.1051/epjconf/201818502002>
- [7] T. Nakamura, T. Tsutaoka, K. Hatakeyama. *J. Magn. Magn. Mater.*, **138**, 319 (1994). DOI: 10.1016/0304-8853(94)90054-X
- [8] К.А. Розанов. Автореф. дис. доктора физ.-мат. наук (Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН, М., 2018), <https://istina.msu.ru/dissertations/106198705>
- [9] J.A. Sidles, J.L. Garbini, K.J. Bruland, D. Rugar, O. Zuger, S. Hoen, C.S. Yannoni. *Rev. Mod. Phys.*, **67**, 249 (1995). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.67.249>
- [10] M.R. Koblischka, U. Hartmann. *Ultramicroscopy*, **97**, 103 (2003). DOI: 10.1109/TMAG.2009.2021985
- [11] D. Rugar, R. Budakian, H.J. Mamin. *Nature*, **403**, 329 (2004). DOI: 10.1038/nature02658
- [12] C.L. Degen, M. Poggio, H.J. Mamin, C.T. Rettner, D. Rugar, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **106**, 1313 (2009). DOI: 10.1073/pnas.0812068106
- [13] Дж. Джексон. *Классическая электродинамика* (Мир, М., 1965) [J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (J. Wiley & Sons, NY.–London, 1962)]
- [14] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. *Phys. Low-Dim. Struct.*, **1/2**, 1 (2003).
- [15] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений* (Гос. изд. физ. мат. лит., М., 1962) [I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. *Tables of Integrals, Series and Products* (Acad. NY., 2000)]
- [16] D.A. Vinnik, V.E. Zhivulin, D.P. Sherstyuk, A.Yu. Starikov, P.A. Zezyulina, S.A. Gudkova, D.A. Zherebtsov, K.N. Rozanov, S.V. Trukhanov, K.A. Astapovich, S.B. Sombra, D. Zhou, R.B. Jotania, C. Singh, A.V. Trukhanov. *J. Mater. Sci. C*, **9**, 5425 (2021). DOI: 10.1039/d0tc05692h
- [17] Ch. Kittel. *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, 1996)