

01.5

Ламинарный хаос в связанных системах с запаздыванием© Д.Д. Кульминский^{1,2}, В.И. Пономаренко^{1,3}, М.Д. Прохоров¹¹ Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия² Научно-технологический университет „Сириус“, Сочи, Россия³ Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 1 октября 2021 г.

В окончательной редакции 3 ноября 2021 г.

Принято к публикации 4 ноября 2021 г.

Исследована возможность существования ламинарного хаоса в связанных системах с запаздывающей обратной связью. Рассмотрены случаи однонаправленной и взаимной связи систем с запаздыванием. Впервые показано, что ламинарный хаос может существовать не только в системе с переменным временем задержки, но и в системе с постоянным временем задержки, если она связана с системой, находящейся в режиме ламинарного хаоса.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, ламинарный хаос, связанные осцилляторы, синхронизация.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52077.19044

Наличие запаздывающей обратной связи типично для многих систем различной природы [1,2], что обуславливает большой интерес к исследованию систем с запаздыванием в самых разных областях науки [3,4]. При этом в большинстве работ по изучению систем с запаздыванием рассматривается случай постоянного времени задержки. Однако исследование систем с переменным временем задержки представляет не меньший интерес, поскольку на практике задержка может флуктуировать в силу самых разнообразных причин [5,6], что существенно усложняет динамику системы [7,8]. Модуляция времени задержки оказывается полезной для ряда прикладных задач. Например, использование хаотических генераторов с переменным временем задержки в системах передачи информации позволяет повысить их конфиденциальность [9,10] по сравнению с системами связи на основе хаотических генераторов с запаздывающей обратной связью, имеющих постоянное время задержки [11,12].

В системах с переменным временем задержки недавно был обнаружен новый тип хаотического поведения, который был назван ламинарным хаосом [13]. Такой тип поведения характеризуется чередованием различных ламинарных фаз, в течение которых динамическая переменная остается практически постоянной, а при переходе из одной ламинарной фазы в другую ее значение меняется хаотически. Существование ламинарного хаоса было продемонстрировано не только на численных примерах, но и в экспериментальных системах: оптоэлектронном генераторе с изменяющимся во времени запаздыванием [14], электронном генераторе с переменной задержкой [15] и радиотехническом генераторе с запаздывающей обратной связью, время задержки которого модулируется внешним гармоническим сигналом [16].

До сих пор явление ламинарного хаоса наблюдалось только в одиночных автоколебательных системах с запаздыванием при определенных условиях изменения

времени задержки [13–17]. В настоящей работе мы впервые показали, что ламинарный хаос может существовать не только в системе с переменным временем задержки, но и в системе с постоянным временем задержки, если она связана с системой, находящейся в режиме ламинарного хаоса.

Рассмотрим систему с запаздыванием, которую в отсутствие связи с другими системами можно представить в виде кольца, состоящего из трех элементов (нелинейного, инерционного и задержки), и описать следующим дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (1)$$

где ε — параметр, характеризующий инерционные свойства системы, τ — время задержки, f — нелинейная функция. В системе (1) время задержки является постоянным. При соответствующем выборе нелинейной функции (например, квадратичной или синусоидальной) система (1) демонстрирует при $\tau \gg \varepsilon$ хаотические колебания динамической переменной $x(t)$ [1]. Поскольку во временной реализации $x(t)$ при этом отсутствуют ламинарные участки, на которых $x(t)$ остается постоянной, такие хаотические колебания были названы в [13] турбулентным хаосом.

При периодически изменяющемся времени задержки

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_m \sin(2\pi\nu t), \quad (2)$$

где τ_0 — среднее значение времени задержки, τ_m — глубина модуляции времени задержки, а ν — частота модуляции, система будет описываться уравнением

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau(t))) \quad (3)$$

и может демонстрировать качественно другой тип хаотической динамики, названный ламинарным хаосом [13,14],

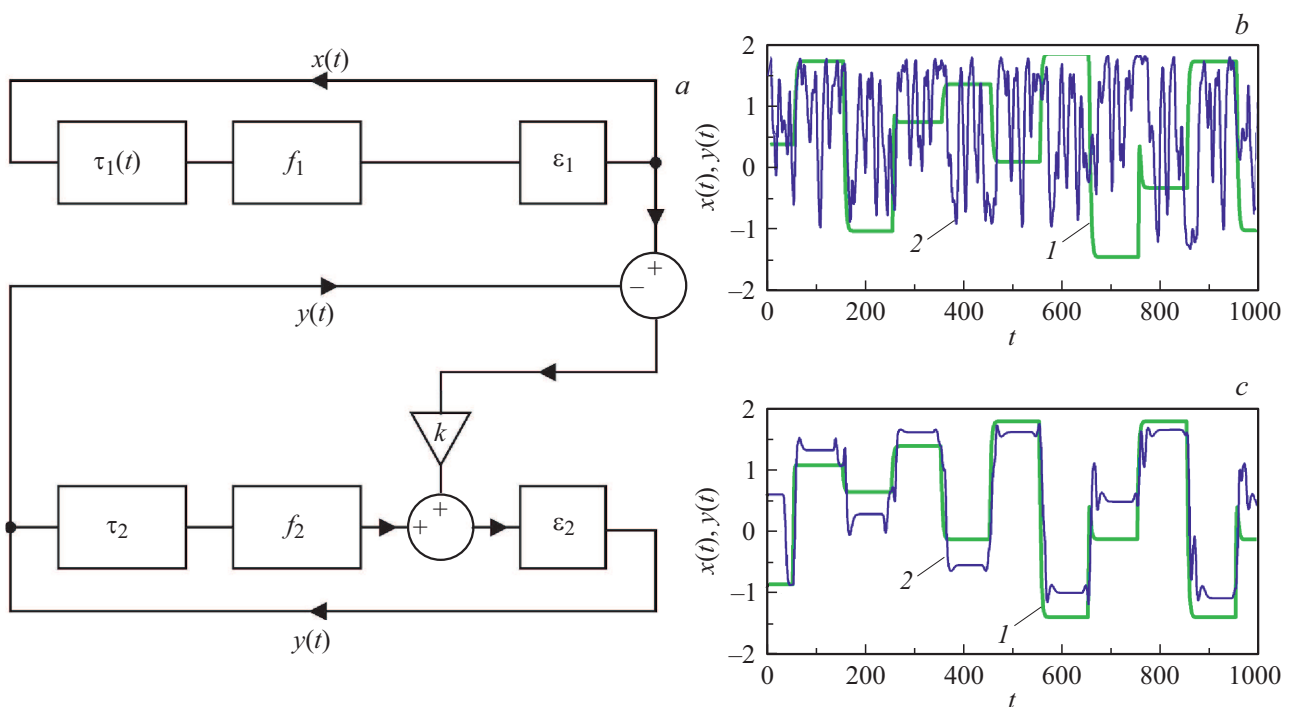


Рис. 1. *a* — блок-схема двух однонаправленно связанных систем с запаздыванием. Элементы, обозначенные $\tau_1(t)$ и τ_2 , f_1 и f_2 , ϵ_1 и ϵ_2 , обеспечивают соответственно задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний, а элемент k определяет величину однонаправленной связи. *b* и *c* — временные реализации колебаний $x(t)$ (1) и $y(t)$ (2) при $k = 0$ и 0.55 соответственно.

при котором реализация $x(t)$ имеет горизонтальные плато.

Рассмотрим теперь две системы с запаздыванием, из которых одна имеет постоянное время задержки и находится в режиме турбулентного хаоса, а другая имеет переменное время задержки и находится в режиме ламинарного хаоса, и свяжем эти системы между собой. Системы с запаздыванием могут быть связаны между собой различными способами, которые отличаются не только типом связи (линейная, диффузионная, запаздывающая), но и тем, в какую точку кольцевой системы с запаздыванием подается сигнал от другой системы [18]. Так, в систему, описываемую уравнением (1), сигнал связи можно подать между инерционным элементом (фильтром) и линией задержки, между линией задержки и нелинейным элементом, между нелинейным элементом и фильтром. Каждый из этих случаев будет описываться своим уравнением [18].

На рис. 1, *a* приведена блок-схема двух однонаправленно связанных систем с запаздыванием (1) и (3) для случая, когда сигнал диффузионной связи подается на ведомую систему между нелинейным элементом и фильтром. При таком способе связи ведущая система описывается уравнением $\epsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f_1(x(t - \tau_1(t)))$, а ведомая система — уравнением

$$\epsilon_2 \dot{y}(t) = -y(t) + f_2(y(t - \tau_2)) + k(x(t) - y(t)), \quad (4)$$

где k — коэффициент связи.

Параметры ведущей и ведомой систем были выбраны следующими: $\tau_1(t) = 1 + 0.2 \sin(2\pi t)$, $\tau_2 = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.03$, $f_1 = \lambda_1 - x^2$, $f_2 = \lambda_2 - y^2$, где $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.82$ — параметры нелинейности, шаг интегрирования $\Delta t = 0.01$. На рис. 1, *b* приведены временные реализации колебаний $x(t)$, соответствующие режиму ламинарного хаоса, и колебаний $y(t)$ при $k = 0$, соответствующие режиму турбулентного хаоса. С увеличением силы связи режим турбулентного хаоса в ведомой системе начинает разрушаться. Во временной реализации $y(t)$ появляются участки ламинарного хаоса, длительность которых растет с ростом k . На рис. 1, *c* приведены временные реализации колебаний $x(t)$ и $y(t)$ при $k = 0.55$. Видно, что горизонтальные участки в реализации $y(t)$ короче, чем в реализации $x(t)$. Кроме того, в ведомой системе при $k = 0.55$ участки ламинарного хаоса во временной реализации $y(t)$ перемежаются с участками турбулентного хаоса, которые не показаны на рис. 1, *c*. Коэффициент корреляции R между ведущей и ведомой системами равен 0.82 при $k = 0.55$. При дальнейшем увеличении силы связи колебания $x(t)$ и $y(t)$ становятся все более схожими между собой, и при $k > 1$ они становятся практически идентичными, т.е. происходит полная синхронизация ведущей и ведомой систем. Коэффициент корреляции R при этом близок к единице.

Рассмотрим более сложный случай взаимной связи систем с запаздыванием. На рис. 2, *a* приведена блок-схема двух взаимно связанных систем с запаздыванием

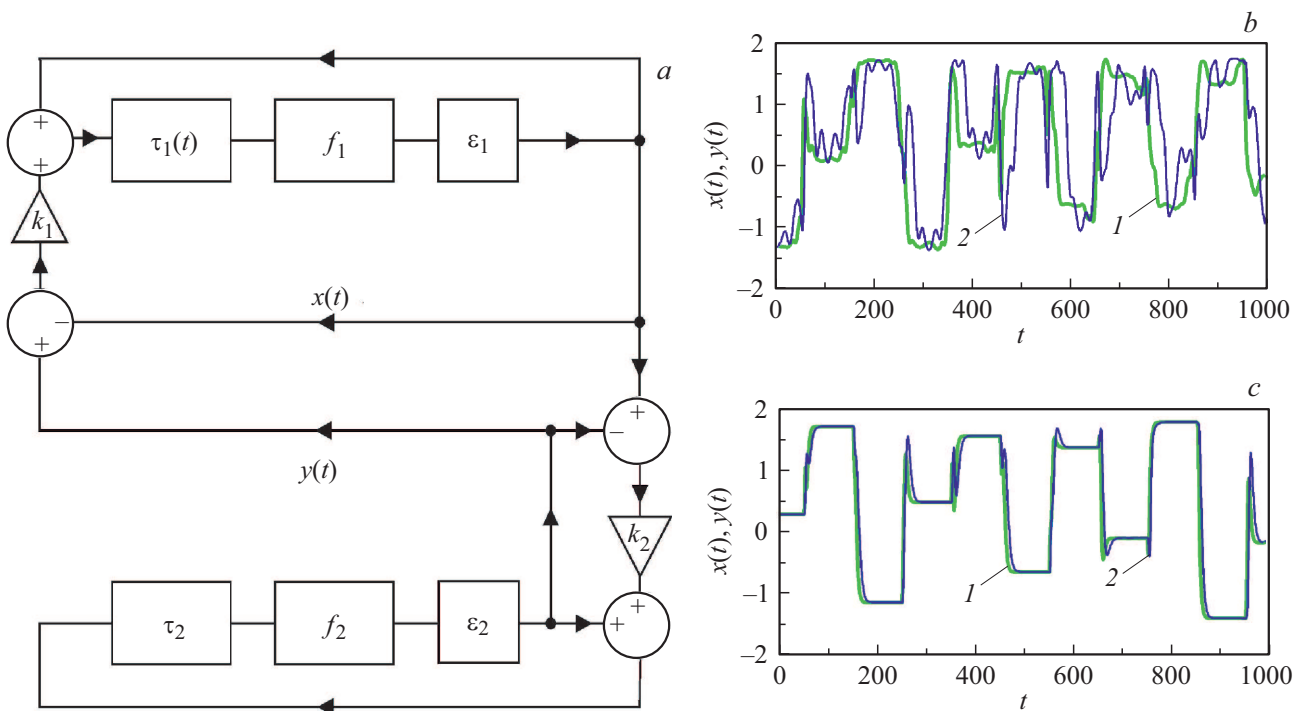


Рис. 2. *a* — блок-схема двух взаимно связанных систем с запаздыванием. Элементы, обозначенные $\tau_1(t)$ и τ_2 , f_1 и f_2 , ε_1 и ε_2 , обеспечивают соответственно задержку, нелинейное и инерционное преобразование колебаний, а элементы k_1 и k_2 определяют величину связи между системами. *b* и *c* — временные реализации колебаний $x(t)$ (1) и $y(t)$ (2) при $k_1 = k_2 = 0.1$ и 0.8 соответственно.

(1) и (3) для случая, когда сигнал диффузионной связи подается на обе системы между фильтром и линией задержки. При таком способе связи системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \dot{x}(t) &= -x(t) + f_1(x(t - \tau_1(t))) \\ &\quad + k_1 [y(t - \tau_1(t)) - x(t - \tau_1(t))], \\ \varepsilon_2 \dot{y}(t) &= -y(t) + f_2(y(t - \tau_2)) \\ &\quad + k_2 [x(t - \tau_2) - y(t - \tau_2)], \end{aligned} \quad (5)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты связи. Параметры обеих систем выбраны такими же, как в рассмотренном выше случае однонаправленной связи, поэтому при $k_1 = k_2 = 0$, временные реализации колебаний $x(t)$ и $y(t)$ имеют такой же вид, как на рис. 1, *b*, т.е. первая система находится в режиме ламинарного хаоса, а вторая — в режиме турбулентного хаоса. На рис. 2, *b* приведены временные реализации колебаний $x(t)$ и $y(t)$ при $k_1 = k_2 = 0.1$. При такой силе связи наблюдается заметное изменение колебательных режимов в обеих системах по сравнению со случаем отсутствия связи. Случай сильной связи ($k_1 = k_2 = 0.8$) представлен на рис. 2, *c*, на котором обе системы демонстрируют ламинарный хаос и синхронизованы между собой.

Итак, нами впервые показано, что ламинарный хаос может существовать в системе с постоянным временем

задержки, если она связана с системой, находящейся в режиме ламинарного хаоса. Таким образом, ламинарный хаос можно получить не только с помощью модуляции времени задержки, но и за счет введения связи между системами с запаздыванием.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-02-00071).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, А.С. Караваев, Б.П. Безручко, *Системы с запаздыванием (реконструкция моделей и их приложение)* (Изд-во Саратов. ун-та, Саратов, 2016).
- [2] G.A. Bocharov, F.A. Rihan, *J. Comput. Appl. Math.*, **125**, 183 (2000). DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00468-4
- [3] Y. Kuang, *Delay differential equations with applications in population dynamics* (Academic Press, Boston, 1993).
- [4] T. Erneux, *Applied delay differential equations* (Springer-Verlag, N.Y., 2009).

- [5] J. Martínez-Llinás, X. Porte, M.C. Soriano, P. Colet, I. Fischer, *Nature Commun.*, **6**, 7425 (2015). DOI: 0.1038/ncomms8425
- [6] D. Müller, A. Otto, G. Radons, *Phys. Rev. E*, **95**, 062214 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.95.062214
- [7] D.V. Senthilkumar, M. Lakshmanan, *Chaos*, **17**, 013112 (2007). DOI: 10.1063/1.2437651
- [8] L. Lazarus, M. Davidow, R. Rand, *Int. J. Nonlinear Mech.*, **78**, 66 (2016). DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.005
- [9] D. Ghosh, S. Banerjee, A.R. Chowdhury, *Europhys. Lett.*, **80**, 30006 (2007). DOI: 10.1209/0295-5075/80/30006
- [10] A.S. Karavaev, D.D. Kulminskiy, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.*, **25**, 1550134 (2015). DOI: 10.1142/S0218127415501345
- [11] V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, *Phys. Rev. E*, **66**, 026215 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevE.66.026215
- [12] V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, A.S. Karavaev, D.D. Kulminskiy, *Nonlinear Dyn.*, **74**, 1013 (2013). DOI: 10.1007/s11071-013-1019-0
- [13] D. Müller, A. Otto, G. Radons, *Phys. Rev. Lett.*, **120**, 084102 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.084102
- [14] J.D. Hart, R. Roy, D. Müller-Bender, A. Otto, G. Radons, *Phys. Rev. Lett.*, **123**, 154101 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.154101
- [15] T. Jüngling, T. Stemler, M. Small, *Phys. Rev. E*, **101**, 012215 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.101.012215
- [16] Д.Д. Кульминский, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров, *Письма в ЖТФ*, **46** (9), 16 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.09.49366.18218 [D.D. Kul'minskii, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, *Tech. Phys. Lett.*, **46** (5), 423 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020050090].
- [17] D. Müller-Bender, A. Otto, G. Radons, J.D. Hart, R. Roy, *Phys. Rev. E*, **101**, 032213 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.101.032213
- [18] M.D. Prokhorov, V.I. Ponomarenko, *Phys. Rev. E*, **72**, 016210 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016210