

01;03

Энергетическая оценка смачивания проводящей каплей заряженной диэлектрической поверхности

© А.В. Голочалова, Э.Б. Кулумбаев[¶]

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

[¶] E-mail: kulumbaev@bsu.edu.ru

Поступило в Редакцию 27 апреля 2021 г.

В окончательной редакции 16 мая 2021 г.

Принято к публикации 16 мая 2021 г.

Выполнена энергетическая оценка смачивания проводящей каплей диэлектрической подложки, заряженной фиксированным на ней сторонним электрическим зарядом. Получено, что смачиваемость такой поверхности уменьшается, если средняя плотность индуцированного в основании капли заряда превышает пороговое значение.

Ключевые слова: смачивание, проводящая жидкость, электрический заряд, краевой угол.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.17.51379.18845

Смачивание как объект исследования представляет научный и практический интерес. В частности, актуальной остается задача управления смачиванием для различных технических приложений. В схеме электросмачивания на диэлектрике для увеличения его смачиваемости жидкостью применяется электрическое поле электродов [1]. Обратный эффект — уменьшение смачивания — наблюдается при размещении проводящей капли на предварительно заряженной диэлектрической подложке [2]. В настоящей работе закономерности смачивания в условиях эксперимента [2] изучаются на основе энергетического подхода.

Рассматривается равновесное осесимметричное состояние капли проводящей жидкости в газе, лежащей на горизонтальной твердой диэлектрической подложке, равномерно заряженной фиксированным на ее ограничивающей плоскости сторонним электрическим зарядом с известной поверхностной плотностью σ_0 (рис. 1). В электрическом поле этого заряда происходит поляризация физически однородных фаз. Поэтому индуцированные и связанные заряды появятся только на разделяющих их границах, которые рассматриваются в приближении бесконечно тонких поверхностей. Распределение суммарного (стороннего, индуцированного и связанного) заряда на этих поверхностях на основе подхода Гринберга [3] определяется системой интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\sigma_{SL} &= 2\varepsilon_0 E_{SL}(\sigma_{LG}), \\ \sigma_{SG} &= \frac{2}{\varepsilon_G + \varepsilon_S} \sigma_0 - 2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_G}{\varepsilon_S + \varepsilon_G} E_{SG}(\sigma_{LG}), \\ \sigma_{LG} &= 2\varepsilon_0 [E_{LG}(\sigma_{LG}) + E_{LG}(\sigma_{SL}) + E_{LG}(\sigma_{SG})],\end{aligned}\quad (1)$$

где σ — поверхностная плотность заряда; ε — диэлектрическая проницаемость; E — проекция на нормаль (внешнюю на поверхности капли и противоположную орту оси z на границе SG) к элементу контактной поверхности вектора напряженности электрического поля,

создаваемого всеми расположенными вне этого элемента зарядами; ε_0 — электрическая постоянная. Здесь и далее нижний одинарный индекс обозначает принадлежность величины к фазе, двойной — к межфазной границе (рис. 1).

Стационарное устойчивое состояние рассматриваемой системы реализуется в минимуме ее энергии W . Капля полагается малой настолько, что влиянием силы тяжести на ее форму пренебрегается по сравнению с действием поверхностного натяжения. Тогда W складывается из поверхностной W_s и электрической W_e энергий:

$$\begin{aligned}W_s &= \alpha_{LG} A_{LG} + \alpha_{SL} A_{SL} + \alpha_{SG} A_{SG}, \\ W_e &= 0.5 \varphi_L q_L + 0.5 \int \varphi_{SG} \sigma_{SG} dA.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения на контактной границе фаз с площадью A ; φ — скалярный потенциал в месте нахождения заряда σdA .

Суммарный заряд $q_L = \int \sigma_{LG} dA + \int \sigma_{SL} dA$ на поверхности капли с использованием формул $\sigma_{LG} = \sigma_{LG}^i / \varepsilon_G$, $\sigma_{SL} = (\sigma_0 + \sigma_{SL}^i) / \varepsilon_S$ (где σ^i — плотность индуцированного заряда проводника на границе с диэлектриком, причем $\int \sigma_{LG}^i dA + \int \sigma_{SL}^i dA = 0$) приводится к виду

$$q_L = [1/\varepsilon_S + (1/\varepsilon_G - 1/\varepsilon_S)\gamma] \sigma_0 A_{SL}.\quad (3)$$

Здесь $\gamma = - \int \sigma_{SL}^i dA / \sigma_0 A_{SL}$ — отношение средней плотности наведенного в основании SL заряда к плотности σ_0 с учетом противоположности знаков этих зарядов.

Задача нахождения формы капли, обеспечивающей минимум W с учетом (1)–(3) при заданном объеме V жидкости, может быть решена только в результате тонкого численного расчета из-за особенностей плотности заряда и электрического поля на линии контакта трех фаз. Поэтому для оценки смачивания задача упрощается. Мениск малой капли полагается сферическим. При $V = 2\pi R_0^3/3$ (R_0 — радиус полушара с объемом V)

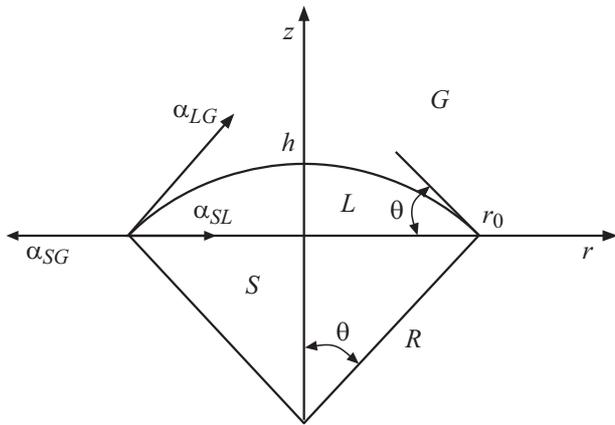


Рис. 1. Геометрия трехфазной системы. S — твердое тело, L — жидкость, G — газ.

шаровой сегмент задается краевым углом θ (рис. 1) в известных геометрических формулах для радиусов кривизны $R = R_0 f(\theta)$, основания $r_0 = R \sin \theta$, высоты $h = R(1 - \cos \theta)$ и площадей $A_{LG} = 2\pi R h$, $A_{SL} = \pi r_0^2$, где $f(\theta) = [2/(2 - 3 \cos \theta + \cos^3 \theta)]^{1/3}$. На незаряженной подложке ($\sigma_0 = 0$) минимизация W_s дает формулу Юнга [4]: $\alpha_{SG} = \alpha_{SL} + \alpha_{LG} \cos \theta_Y$. Тогда безразмерная с масштабом $2\pi R_0^2 \alpha_{LG}$ переменная часть энергии W_s из первого выражения (2) записывается следующим образом:

$$W'_s = (1 - \cos \theta - 0.5 \sin^2 \theta \cos \theta_Y) f^2(\theta). \quad (4)$$

Потенциал ϕ_L проводника находится методом среднего потенциала [5], результаты которого с приемлемой для оценки интегральных величин точностью согласуются с экспериментальными данными. Сначала рассчитывается потенциал в каждой точке поверхности капли от зарядов на всех контактных границах. Для этого полагается, что распределение индуцированного заряда равномерно и на границе LG , и на границе SL . Поскольку в основании капли средняя плотность индуцированного заряда $-\gamma \sigma_0$, имеем $\sigma_{SL} = (1 - \gamma) \sigma_0 / \epsilon_S$. Для суммарного заряда на мениске получается $\sigma_{LG} = (\gamma \sigma_0 / \epsilon_G) \cos^2(\theta/2)$. Плотность σ_{SG} вычисляется по соответствующей формуле (1). Затем вычисленный потенциал усредняется по поверхности капли, и этот средний потенциал поверхности принимается за ϕ_L . Аналитического результата такой расчет не допускает. Поэтому ϕ_L находится численно. Образующая формы капли составляется из дуги окружности радиуса R , вырезаемой центральным углом θ , и радиуса r_0 основания капли (рис. 1). Дуга разбивается на N равных частей. При вращении дуги вокруг оси симметрии образуются заряженные коаксиальные круговые пояски, потенциал каждого из которых отождествляется с известным полем кольцевого заряда $\Delta q_{LG} = \sigma_{LG} 2\pi r_n R \theta / N$, проходящего через центр пояска с координатами (r_n, z_n) : $r_n = R \sin \theta_n$, $z_n = R(\cos \theta_n - \cos \theta)$, $\theta_n = \theta(n - 0.5)/N$,

$1 \leq n \leq N$. Поверхностный заряд в основании капли аппроксимируется системой кольцевых зарядов $\Delta q_{SL} = \sigma_{SL} 2\pi r_n R [\sin(\theta n/N) - \sin(\theta(n-1)/N)]$. Аналогично на границе SG : $\Delta q_{SG} = \sigma_{SG} 2\pi r_{m+0.5} (r_{m+1} - r_m)$, $r_m = r_0 + (5R_0 - r_0)m/M$, $0 \leq m \leq M$. Поэтому в произвольной точке (r, z) потенциал имеет вид

$$2\pi^2 \epsilon_0 \phi(r, z) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{\Delta q_{LG}}{R_{1n}} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{r r_n}}{R_{1n}} \right) + \frac{\Delta q_{SL}}{R_{2n}} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{r r_n}}{R_{2n}} \right) \right] + \sum_{m=1}^M \frac{\Delta q_{SG}}{R_{2m}} \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{r r_m}}{R_{2m}} \right), \quad (5)$$

где

$$R_{1n} = \sqrt{(r + r_n)^2 + (z - z_n)^2}, \quad R_{2n} = \sqrt{(r + r_n)^2 + z^2},$$

\mathbf{K} — полный эллиптический интеграл первого рода.

Для усреднения по поверхности капли, учитывая особенность $\mathbf{K}(1) = \infty$, по формуле (5) находим ϕ в точках с координатами $r_l = R \sin \theta_l$; $z_l = R(\cos \theta_l - \cos \theta)$ (для точек основания $z_l = 0$), где $\theta_l = \theta l/N$, $0 \leq l \leq N$, а интегралы для среднего потенциала $\phi_L = (\int \phi_{LG} dA + \int \phi_{SL} dA) / (A_{LG} + A_{SL})$ капли и второго слагаемого в энергии W_e (2) вычисляются по формуле трапеций.

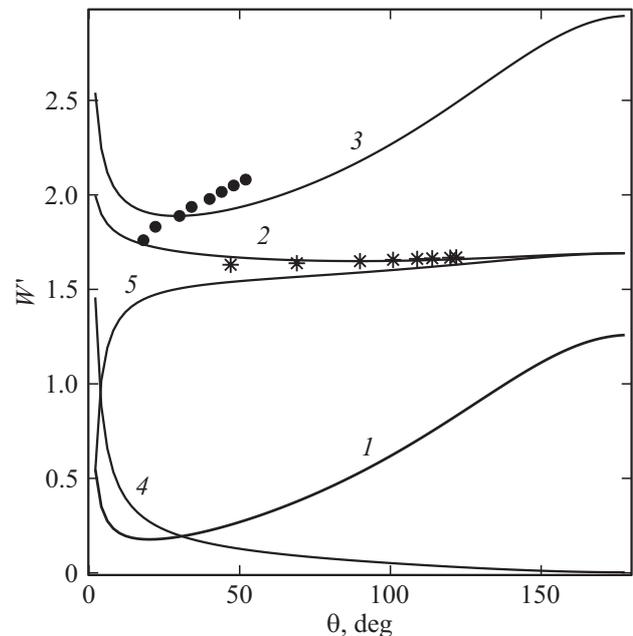


Рис. 2. Зависимости энергии W'_s (1), полной энергии W'_e (2) и ее слагаемых в формуле (6) (4, 5), а также $W'_s + W'_e$ (3) от краевого угла при $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.5$. Звездочками отмечены минимумы W'_e при $\gamma = 0.36, 0.4$ и далее с шагом 0.1 до 1, кружками обозначены минимумы $W'_s + W'_e$ при γ от 0.3 до 1 с шагом 0.1.

Электрическая энергия W_e , обезразмеренная с тем же масштабом, что и (4), записывается в виде

$$W'_e = 0.5\beta(\phi'_L q'_L + \int \phi'_{SG} \sigma'_{SG} dA'), \quad (6)$$

где $\beta = \sigma_0^2 R_0 / 4\epsilon_0 \alpha_{LG}$ — отношение характерных значений электрической (с масштабами $\sigma_0 R_0 / 2\epsilon_0$ для потенциала и $\sigma_0 \pi R_0^2$ для заряда) и поверхностной энергий.

Расчет проводится при фиксированных значениях $\epsilon_G = 1$, $\epsilon_S = 4$, $\theta_Y = 20^\circ$, близких к экспериментальным данным [2] для капли воды на аморфной пленке диоксида кремния, а параметры γ и β варьируются. Отметим, что выражение параметра γ модели может быть найдено для полусферической капли. Поскольку электрическое поле в основании равномерно заряженной полусферы однородно и равно $\sigma_{LG} / 4\epsilon_0$, из (1) следует $\sigma_{SL} = \sigma_{LG} / 2$, что дает $\gamma = 1 / (1 + 0.25\epsilon_S / \epsilon_G)$.

При фиксированном значении $\beta = 0.1$ существует пороговое значение $\gamma \approx 0.35$, ниже которого точка минимума энергии практически совпадает с заданным углом Юнга (рис. 2). При превышении порогового значения краевой угол θ увеличивается (кружки на рис. 2) и при $\gamma \rightarrow 1$ достигает величины 52° . Пороговое значение γ разделяет монотонные и немонотонные зависимости $W'_e(\theta)$, минимумы которых (звездочки на рис. 2) зависят только от γ . Сами минимумы обусловлены противоположным характером изменения слагаемых W'_e в (6) (кривые 4 и 5 на рис. 2). При фиксированном γ с ростом β по мере уменьшения вклада W'_s в профиль энергии системы краевой угол θ монотонно увеличивается и при условии $W'_e \gg W'_s$ достигает насыщения в точках минимума W'_e , не зависящих от θ_Y . На рис. 2 этому отвечает смещение любого из „кружков“ в соответствующую ему „звездочку“ при $\beta \rightarrow \infty$.

Физическое объяснение рассчитанного увеличения краевого угла следует из эквивалентности влияния электрического заряда на межфазной границе уменьшению поверхностного натяжения. В схеме электросмачивания заряд преимущественно находится на границе SL , что приводит к уменьшению α_{SL} и увеличению смачивания. В рассматриваемом случае заряд есть на всех межфазных границах. Вблизи контактной линии трех фаз, где $E_{SG}(\sigma_{LG}) \approx E_{SL}(\sigma_{LG})$, из (1) следует, что

$$\sigma_{SG} / \sigma_{SL} = [(1 + \gamma) / (1 - \gamma) + \epsilon_G / \epsilon_S] / (1 + \epsilon_G / \epsilon_S) > 1.$$

Поэтому α_{SG} уменьшается больше, чем α_{SL} . В результате баланс натяжений будет выполняться на меньшем периметре смачивания с большим краевым углом независимо от изменения α_{LG} при $\theta \leq 90^\circ$. Такая закономерность смачивания проводящей каплей заряженной диэлектрической подложки качественно согласуется с экспериментально наблюдаемой в [2].

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] F. Mugele, J. Heikenfeld, *Electrowetting: fundamental principles and practical applications* (Wiley-VCH, 2018), p. 133–136.
- [2] D. Aronov, M. Molotskii, G. Rosenman, *Appl. Phys. Lett.*, **90** (10), 104104 (2007). DOI: 10.1063/1.2711656
- [3] Г.А. Гринберг, *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений* (Изд-во АН СССР, М.–Л., 1948), с. 255–260.
- [4] Б.Д. Сумм, Ю.В. Горюнов, *Физико-химические основы смачивания и растекания* (Химия, М., 1976), с. 15–16.
- [5] Ю.Я. Иоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский, *Расчет электрической емкости* (Энергоиздат, Л., 1981), с. 24–31.