

## Диссипативное туннелирование электронов в вертикально связанных двойных асимметричных квантовых точках InAs/GaAs(001)

© М.Б. Семенов,<sup>1</sup> В.Д. Кревчик,<sup>1</sup> Д.О. Филатов,<sup>3</sup> А.В. Шорохов,<sup>1,2,7,8</sup> А.П. Шкуринов,<sup>1,4</sup> И.А. Ожередов,<sup>1,4</sup> П.В. Кревчик,<sup>1</sup> Y.H. Wang,<sup>5</sup> T.R. Li,<sup>5</sup> A.K. Malik,<sup>6</sup> М.О. Марычев,<sup>3</sup> Н.В. Байдусь,<sup>3</sup> И.М. Семенов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Пензенский государственный университет,  
440026 Пенза, Россия

<sup>2</sup> University of Jyväskylä, Seminaarinkatu,  
15, PO BOX 35, FI-40014, Finland

<sup>3</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, Россия

<sup>4</sup> Институт проблем лазерных и информационных технологий РАН,  
140700 Шатура, Московская обл., Россия

<sup>5</sup> Key Laboratory for Special Function Materials, School of Physical Science and Technology, Lanzhou University,  
730000 Lanzhou, China

<sup>6</sup> Department of Physics, Multanial Modi College Modinagar,  
201204 Uttar Pradesh, India

<sup>7</sup> Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,  
430005 Саранск, Россия

<sup>8</sup> International Research Centre Mag Top, Institute of Physics, Polish Academy of Sciences,  
Aleja Lotnikow 32/46, PL-02668 Warsaw, Poland  
e-mail: Misha29.02.1@gmail.com

Поступило в Редакцию 18 марта 2021 г.

В окончательной редакции 18 марта 2021 г.

Принято к публикации 18 марта 2021 г.

Приведены результаты экспериментальных исследований фотоэлектрических свойств GaAs  $p-i-n$ -фотодиода с двойными асимметричными квантовыми точками (ДАКТ) InAs, полученными методом самоформирования в процессе МОС-гидридной эпитаксии. В зависимости фототока от напряжения обратного смещения при монохроматическом фотовозбуждении ДАКТ на длине волны, соответствующей энергии межзонных оптических переходов между основными состояниями дырок и электронов в квантовых точках (КТ) большего размера, обнаружены 3 пика, связанные с туннелированием фотовозбужденных электронов между КТ, в том числе — диссипативным (с поглощением и испусканием оптических фононов). Результаты эксперимента качественно согласуются с теоретической полевой зависимостью вероятности  $1D$ -диссипативного туннелирования между КТ.

**Ключевые слова:** вертикально-совмещенные двойные асимметричные квантовые точки, InAs, GaAs, туннельные оптические переходы, фотопроводимость, диссипативное туннелирование.

DOI: 10.21883/JTF.2021.10.51354.66-21

### Введение

Экспериментальное наблюдение теоретически предсказываемых макроскопических эффектов диссипативного туннелирования [1–12] является одной из важнейших задач в указанной предметной области [1,7,11]. В последнее десятилетие авторами настоящей работы экспериментально наблюдались эффекты, обусловленные диссипативным туннелированием электронов в ряде искусственных наноразмерных систем. Достигнутые на сегодняшний день результаты обобщены в табл. 1. В настоящей работе экспериментально исследована зависимость фоточувствительности (ФЧ)  $p-i-n$ -фотодиода на основе GaAs с двуслойным массивом самоорганизующихся двойных асимметричных квантовых точек (ДАКТ) InAs при резонансном фотовозбуждении межзонных оптических переходов между основным элект-

ронным и дырочным состояниями в более крупных квантовых точках (КТ) с последующим диссипативным туннелированием электронов на основное состояние в КТ меньшего размера. Результаты экспериментов интерпретированы на основе теории одномерного диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод матрицы GaAs (рассматриваемой как термостат) [11,12].

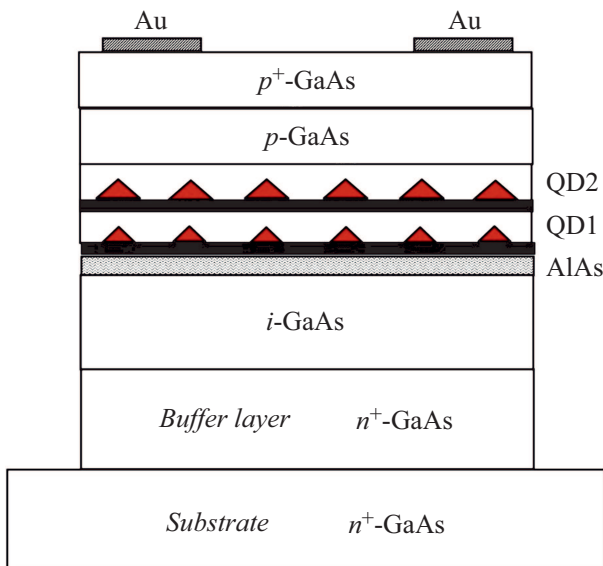
### 1. Экспериментальная часть

#### 1.1. Формирование $p-i-n$ -структур с массивами ДАКТ InAs/GaAs(001) и меза-фотодиодов на их основе

Диодная GaAs  $p-i-n$ -структура со встроенными массивами ДАКТ InAs была выращена на подложке

Таблица 1. Экспериментально наблюдаемые эффекты диссипативного туннелирования

1D	1D	2D	2D
Предел слабой диссипации	Предел сильной диссипации	Предел слабой диссипации	Предел сильной диссипации
Максимум на туннельных ВАХ для наночастиц Au в пленках SiO <sub>2</sub> [11]	Серия неэквидистантных пиков на туннельных ВАХ КТ InAs/GaAs(001) [12]	2D-бифуркации на туннельных ВАХ массивов наночастиц Au в пленках SiO <sub>2</sub> [11]	2D-бифуркации на полевой зависимости ФЧ <i>p-i-n</i> -структур с ДАКТ InAs/GaAs(001)

Рис. 1. Схема меза-фотодиода на базе GaAs *p-i-n*-структуры с массивом вертикально-сдвоенных ДАКТ InAs/GaAs(001).

*n*<sup>+</sup>-GaAs(001) фирмы „MeGa SM“, разориентированной на 2° по направлению (011), методом МОС-гидридной эпитаксии при пониженном давлении (100 mbar) на установке Aixtron AIX 200RF. В качестве прекурсоров основных компонентов структур использовались Ga(CH<sub>3</sub>)<sub>3</sub>, In(CH<sub>3</sub>)<sub>3</sub> и AsH<sub>3</sub>. Схема *p-i-n*-структуры показана на рис. 1. На поверхности подложки *n*<sup>+</sup>-GaAs(001) выращивался буферный слой *n*<sup>+</sup>-Ga толщиной 300 nm, легированный Si из SiH<sub>4</sub>. Затем выращивался слой специально не легированного *i*-GaAs (фоновая концентрация электронов  $n_0 \sim 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ) толщиной  $\approx 350 \text{ nm}$ . На поверхности слоя *i*-GaAs методом самоформирования по механизму Странски–Крастанова [13] при температуре роста  $T_g \approx 490^\circ\text{C}$  формировался массив КТ InAs (КТ1) высотой  $h \approx 4 \text{ nm}$  и латеральными размерами  $D = 12\text{--}14 \text{ nm}$ . Предварительно с целью стимуляции самоформирования КТ InAs на поверхность слоя *i*-GaAs осаждался подслей AlAs толщиной  $\approx 0.8 \text{ nm}$ . Квантовые точки InAs зарацивались спейсором *i*-GaAs толщиной 8 nm, на поверхности которого при  $T_g \approx 505^\circ\text{C}$  формировался второй слой КТ InAs (КТ2) с  $D = 16\text{--}18 \text{ nm}$  и  $h \approx 6 \text{ nm}$ . Поверх слоя

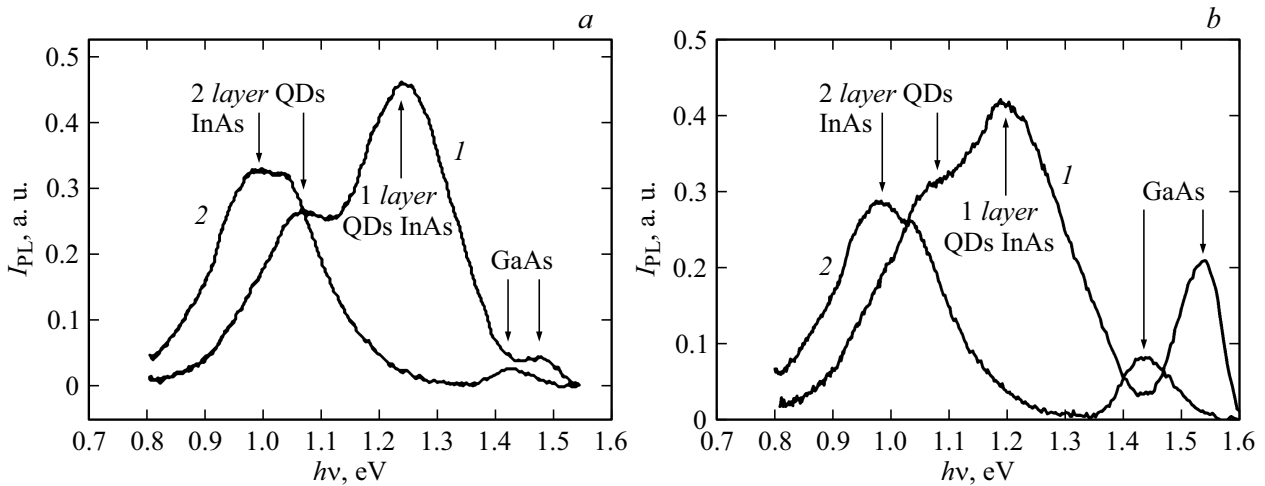
КТ2 выращивался слой *i*-GaAs толщиной  $\approx 7 \text{ nm}$ , а затем — слой *p*-GaAs толщиной  $\approx 190 \text{ nm}$ . На поверхность *p*-GaAs наносился подконтактный слой *p*<sup>+</sup>-GaAs:С толщиной  $\approx 60 \text{ nm}$ . Кроме *p-i-n*-структуры с ДАКТ InAs/GaAs(001), был выращен образец-спутник на подложке полуизолирующего GaAs(001), содержащий массив ДАКТ, выращенных в тех же условиях, встроенных в толщу слоя *i*-GaAs (толщина буферного слоя была 500 nm, покровного слоя — 200 nm). Данный образец предназначался для исследования энергетического спектра ДАКТ методом спектроскопии фотолюминесценции (ФЛ).

На базе *p-i-n*-структуры с массивом ДАКТ InAs/GaAs(001) методом фотолитографии с жидкостным химическим травлением были сформированы меза-фотодиоды с мезами цилиндрической формы диаметром 500 μm с кольцевым верхним омическим контактом.

## 1.2. Исследование энергетического спектра ДАКТ InAs/GaAs(001)

Энергетический спектр ДАКТ InAs/GaAs(001) определялся методом спектроскопии ФЛ. Измерения ФЛ проводились при 77 и 300 К при помощи монохроматора МДР-23 с возбуждением He–Ne-лазера с длиной волны излучения  $\lambda 632.8 \text{ nm}$  и мощностью 30 mW и Ge фотодетектора с синхронным детектированием.

На рис. 2 представлены спектры ФЛ *p-i-n*-структуры с ДАКТ InAs/GaAs(001) и образца-спутника при 77 и 300 К. В спектрах ФЛ кроме пика краевой ФЛ GaAs (энергия максимума  $h\nu_m \approx 1.42$  и  $\approx 1.51 \text{ eV}$  при 300 и 77 К соответственно) наблюдались пики в области  $0.9 \text{ eV} < h\nu < 1.4 \text{ eV}$ , связанные с межзонными рекомбинационными излучательными оптическими переходами в КТ InAs. Пики с  $h\nu_m \approx 1.05\text{--}1.1 \text{ eV}$  и  $\approx 1.2\text{--}1.25 \text{ eV}$  при 77 К связаны с межзонными переходами между основными размерно-квантованными состояниями электронов и дырок в КТ2 и КТ1 соответственно. На основе расчетов энергий размерно-квантованных состояний в КТ InAs/GaAs(001), имеющих форму пирамиды, ограниченной плоскостями (101) [14], из значений  $h\nu_m$  были оценены геометрические параметры КТ, а также энергии основных состояний электронов и дырок в КТ  $E_{e000}$  и  $E_{h000}$  соответственно (табл. 2).



**Рис. 2.** Спектры ФЛ  $p-i-n$ -структуры с ДАКТ InAs/GaAs(001) (a) и образца-спутника на полуизолирующей подложке (b) при 77 К (1) и 300 К (2).

**Таблица 2.** Параметры ДАКТ InAs/GaAs(001), определенные из спектров ФЛ

Параметр	Единицы измерения	КТ1	КТ2
$D$	nm	12–14	16–18
$h$	nm	$4 \pm 1$	$6 \pm 1$
$h\nu_m$ (77 К)	eV	1.203	1.047
$h\nu_m$ (300 К)	eV	1.18	0.95
$\lambda_m$ (77 К)	$\mu\text{m}$	1.031	1.184
$\lambda_m$ (300 К)	$\mu\text{m}$	1.05	1.31
$\Delta E_{e000}$	meV	161	266
$E_{e000}$ (77 К)	meV	439	334
$\Delta E_{h000}$ (77 К)	meV	137	189
$E_{h000}$ (77 К)	meV	263	211

Там же приведены длина волны излучения, соответствующего межзонному переходу между основными состояниями электронов и дырок  $\lambda_m$ , а также высота эмиссионного барьера для электронов и дырок в КТ  $\Delta E_{e000}$  и  $\Delta E_{h000}$  соответственно. На основании этих данных были рассчитаны равновесные зонные диаграммы исследуемой  $p-i-n$ -структуры с массивом ДАКТ при различных значениях обратного смещения на диоде  $V_b$  (рис. 3). Как следует из рис. 3, a, при  $V_b = 0$  основное состояние электронов в КТ2  $E_{e000}$  лежит ниже по энергии, чем в КТ1. При  $V_b = 1.1$  В (рис. 3, b) энергии основных состояний в КТ1 и КТ2 сравниваются, и становятся возможным туннелирование электронов, возбужденных в основное состояние электронов в КТ2 из состояний валентной зоны в КТ2 излучением с соответствующей длиной волны  $\lambda_m$ , в основное состояние электронов в КТ1 с последующей эмиссией (туннельной и/или термоактивированной) в матрицу GaAs, что приводит к увеличению фототока.

### 1.3. Исследование спектров фоточувствительности $p-i-n$ -фотодиода с ДАКТ InAs/GaAs(001)

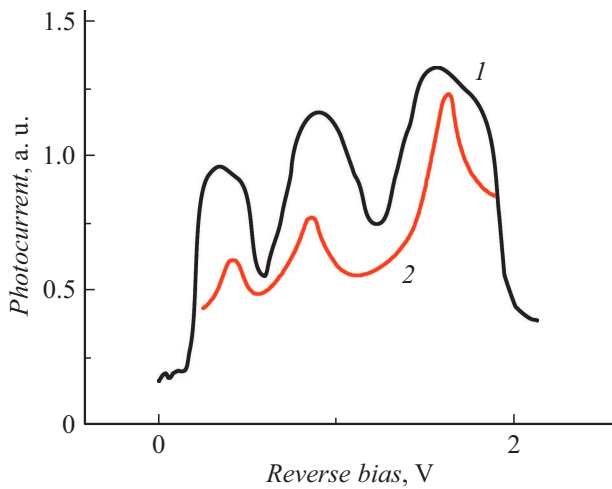
Измерения спектров ФЧ  $p-i-n$ -фотодиодов с ДАКТ InAs/GaAs(001) проводились при 300 К при помощи решеточного монохроматора ЛОМО МДР-2 с галогеновой лампой мощностью 100 W с синхронным детектированием при помощи синхронного детектора Stanford Research SR-530. Измеренные спектры фотоЭДС  $V_{ph}(h\nu)$  нормировались на спектральное распределение интенсивности фотовозбуждения  $L_{ph}(h\nu)$ , получая, тем самым, спектр ФЧ  $S_{ph}(h\nu) = V_{ph}(h\nu)/L_{ph}(h\nu)$ .

На рис. 4 представлен спектр ФЧ  $p-i-n$ -фотодиода с массивом ДАКТ InAs/GaAs(001). Фотовозбуждение в спектральной области  $h\nu < 1.5 \mu\text{m}$  осуществлялось через подложку  $n^+$ -GaAs. В спектре ФЧ наблюдается порог при  $h\nu \approx 1.41$  eV, связанный с краем собственной ФЧ GaAs.

Кроме того, в спектре ФЧ наблюдаются пики в области  $0.9 \text{ eV} < h\nu < 1.4 \text{ eV}$ , связанные с межзонными оптическими переходами в ДАКТ InAs. Пики с  $h\nu_m \approx 1.18$  и  $\approx 0.95$  eV связаны с межзонными оптическими переходами между основными состояниями дырок и электронов в КТ1 и КТ2 соответственно. Пики с  $h\nu_m \approx 1.05$  и  $1.3 \text{ eV}$  могут быть связаны с межзонными переходами между основными состояниями дырок и возбужденными электронными состояниями в КТ2 (предположительно |200>). Полоса ФЧ с краем при  $h\nu 1.35 \text{ eV}$  связана с межзонными оптическими переходами между основными двумерными состояниями дырок и электронов смачивающего слоя (WL) InAs.

На рис. 5 приведена зависимость фототока (300 К)  $p-i-n$ -фотодиода с ДАКТ InAs/GaAs(001) от напряжения обратного смещения  $V_b$  при монохроматическом фотовозбуждении с  $\lambda \approx 1.3 \mu\text{m}$ , соответствующей энергии возбуждения электрона из основного состояния в





**Рис. 6.** Сравнение экспериментальной зависимости  $S_{ph}(V_b)$  для  $p-i-n$ -фотодиода с ДАКТ InAs/GaAs(001) (1) с теоретической полевой зависимостью вероятности 1D-диссипативного туннелирования [12] (2).

(туннельный) перенос электрона из КТ2-InAs большего размера в КТ1-InAs меньшего размера с учетом взаимодействия с матрицей GaAs при конечной температуре во внешнем электрическом поле. Такой процесс электронного переноса в квантовой молекуле (КМ), состоящей из двух туннельно-связанных квантовых точек (КТ-InAs) разного размера, моделируется диссипативным туннелированием в двухъямном осцилляторном асимметричном потенциале вдоль координаты туннелирования. Теоретическая модель рассматривается в квазиклассическом одноинстантонном приближении, точнее приближении разреженного „газа инстантон–антиинстантонных пар“. В этом случае вероятность туннелирования удастся определить аналитически с точностью до предэкспоненциального фактора  $\Gamma = B \exp(-S)$  (вывод см. в Приложении), где  $S$  — квазиклассическое инстантонное действие, определяемое вкладом экстремальной (инстантонной) траектории;  $B$  — предэкспоненциальный фактор, определяемый вкладом пучка подбарьерных траекторий, близких к экстремальной. Соответствующий формализм был подробно описан в коллективной монографии под редакцией Нобелевского лауреата 2003 года профессора Э.Дж. Леггета с участием соавторов настоящей работы [11]. Преимущество используемой модели, как было показано в [12], состоит не только в возможности получить ответ для вероятности туннелирования в аналитическом виде, но и в случае учета влияния на процесс туннельного переноса двух локальных фононных мод, что соответствует рассматриваемому эксперименту, удастся получить качественное совпадение экспериментальной туннельной ВАХ для единичной КТ-InAs в системе совмещенного АСМ/СТМ с теоретической полевой зависимостью вероятности 1D-диссипативного туннелирования [12].

В стандартной модели для определения вероятности одномерного диссипативного туннелирования в ДАКТ, мы будем использовать следующие обозначения для перенормированного двухъямного колебательного (осцилляторного) потенциала во внешнем электрическом поле:  $q_1 = b^* = b + \frac{|e|E}{\omega_0^2}$ ,  $q_0 = a^* = a - \frac{|e|E}{\omega_0^2}$ , где константы  $a$  и  $b$  соответствуют „высотам“ КТ1-InAs и КТ2-InAs,  $|e|$  — модуль заряда электрона,  $E$  — напряженность электрического поля,  $\omega_0$  — частота модельного двухъямного осцилляторного потенциала вдоль координаты туннелирования, связывающей КТ1-InAs и КТ2-InAs. Тогда модельный перенормированный одномерный потенциал можно представить в стандартном виде [11,12]. С учетом ранее полученных результатов [11,12] модельный гамильтониан системы можно записать в виде

$$\hat{H} = \frac{p_1^2}{2} + V_1(y_1) + y_1 \sum_{\alpha=2}^N C_{\alpha} y_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^N (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 y_{\alpha}^2), \quad (1)$$

где

$$V_1(y_1) = \left( \frac{1}{2} \omega_1^2 y_1^2 + \lambda y_1 \right) \theta \left( -\frac{\Delta I}{2\lambda} - y_1 \right) + \left( \frac{1}{2} \omega_1^2 y_1^2 - \lambda y_1 - \Delta I \right) \theta \left( \frac{\Delta I}{2\lambda} + y_1 \right). \quad (2)$$

Здесь  $V_1(y_1)$  — двухъямный модельный осцилляторный потенциал,  $y_1$  — координата туннелирования, связывающая КТ1-InAs и КТ2-InAs,  $C_{\alpha}$  — константа электрон-фононного взаимодействия,  $\omega_{\alpha}$  — частоты локальных фононных мод матрицы GaAs,  $y_{\alpha}$  — „координаты“ локальных фононных мод, „ортонормированные“ по отношению к координате туннелирования,  $\Delta I$  — параметр асимметрии двухъямного осцилляторного потенциала, линейно зависящий от напряженности внешнего электрического поля,  $\theta$  — единичная функция Хевисайда,  $\lambda$  — „нормировочный“ параметр, не входящий в окончательное выражение для вероятности туннелирования.

Как упоминалось выше, вероятность туннелирования частицы в единицу времени может быть найдена в квазиклассическом приближении. Для этого распад должен быть квазистационарным, т.е. ширина уровня  $\Gamma$ , с которого туннелируют частицы, должна быть много меньше энергии основного состояния. Указанное условие выполняется для КТ InAs/GaAs(001), составляющих квантовую молекулу [13].

Найдем одномерное квазиклассическое действие в одноинстантонном приближении с учетом влияния матрицы (среды-термостата, of the „heat-bath“):

$$S_B = 2\omega_0^2(q_0 + q_1)q_0\tau_0 - \frac{2\omega_0^2(q_0 + q_1)^2\tau_0^2}{\beta} - \frac{4\omega_0^4(q_0 + q_1)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{v_n^2(v_n^2 + \omega_0^2 + \xi_n)}. \quad (3)$$

Здесь  $\tau_0$  — „центр“ инстантона, отвечающий моменту „много“ времени проскока туннелирующим электроном под верхушкой потенциального барьера модельного двухъямного осцилляторного потенциала,  $\beta = \frac{\hbar\omega_0}{k_B T}$  — обезразмеренная обратная температура,  $\nu_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  — „мацубаровская частота“,  $\xi_n = \nu_n^2 \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_\alpha^2}{\omega_\alpha^2(\omega_\alpha^2 + \nu_n^2)}$  — фурье-компонента „вязкого“ ядра интегрального квазиклассического уравнения Эйлера–Лагранжа.

Предэкспоненциальный множитель определяется вкладом траекторий, близких к инстантону. Для этого мы должны разложить действие до квадратичного члена по отклонениям  $q - q_B$  и выполнить интегрирование в функциональном пространстве. В результате вероятность туннелирования в единицу времени записывается как

$$\Gamma = B \exp(-S_B), \quad (4)$$

$$B = \left[ \frac{S_0}{2\pi} \frac{\det \left( \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right)_{q=-q_0}}{\det' \left( \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right)_{q=q_B(\tau)}} \right]^{-1/2}, \quad (5)$$

$$S_0 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \dot{q}_B^2(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где  $\det'$  — означает, что нулевое собственное значение, соответствующее нулевой инстантонной моде, необходимо отбросить. Следует отметить, что вывод этой формулы предполагает приближение идеального инстантонного газа (точнее приближение разреженного „газа инстантон–антиинстантонных пар“)

$$\Gamma \ll (\Delta\tau)^{-1}, \quad (7)$$

где  $\Delta\tau$  — ширина перехода от положительного значения инстантонной траектории к отрицательному значению. Расчет предэкспоненциального множителя в рассматриваемой модели приводит к следующему ответу:

$$B = \frac{2\omega_0^2(q_0 + q_1)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \times \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\nu_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right)^{-1/2}. \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_{0n} = \nu_n^2 + \omega_0^2 + \xi_n$ .

Расчет квазиклассического действия и предэкспоненциального фактора с учетом взаимодействия с двумя локальными фононными модами рассмотрен в Приложении (см. (П7), (П11)).

Проведенный аналитический расчет позволяет также учесть роль влияния локальных фононных мод среды-термостата на зависимость (см. вывод (П12)),  $\Gamma = B \exp(-S)$  [7,11,12].

Полученные аналитические результаты были использованы для проведения численных оценок и сравнения с данными эксперимента. На рис. 6 показано сравнение экспериментальной зависимости  $S_{ph}(V_b)$  исследуемого фотодиода (рис. 5) с теоретической полевой зависимостью для вероятности 1D-диссипативного туннелирования электрона в квантовой молекуле в широкозонной матрице, рассчитанной с учетом влияния двух локальных фононных мод (ТО- и ЛО-фононов) [7,11,12]. Максимумы на теоретической кривой обусловлены обменом энергии туннелирующего электрона с фононами [12]. Наблюдается качественное согласие теоретической и экспериментальной кривых.

## Заключение

В работе получены и исследованы GaAs *p-i-n*-фотодиоды с ДАКТ InAs, исследованы их оптические и фотоэлектрические свойства. В зависимости ФЧ диодов от напряжения обратного смещения при фотовозбуждении КТ на длине волны  $\approx 1.3 \mu\text{m}$ , соответствующей возбуждению межзонного оптического перехода между основными состояниями электронов и дырок в КТ большего размера, обнаружены 3 максимума, связанных с туннелированием фотовозбужденных электронов между ДАКТ, в том числе с поглощением и испусканием оптических фононов. Результаты эксперимента согласуются с теоретической полевой зависимостью вероятности 1D-диссипативного туннелирования в ДАКТ InAs/GaAs(001). Результаты работы показывают, что развитие нанотехнологии сделали возможным экспериментальное наблюдение эффектов диссипативного туннелирования электронов в искусственных размерно-квантованных наноструктурах.

## Приложение

Рассмотрим (3) с учетом взаимодействия с двумя локальными фононными модами ( $\omega_{L1} = \omega_2$  и  $\omega_{L2} = \omega_3$ ). Для упрощения будем предполагать это взаимодействие достаточно малым, т. е.  $\frac{C}{\omega_0^2} \ll 1$  и  $\frac{C}{\omega_L^2} \ll 1$ . В этом случае

$$\xi_n = \nu_n^2 \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_\alpha^2}{\omega_\alpha^2(\omega_\alpha^2 + \nu_n^2)}, \quad \text{где } \nu_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \beta = \frac{\hbar}{kT}.$$

$$\xi_n = \nu_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + \nu_n^2)} + \nu_n^2 \frac{C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + \nu_n^2)};$$

$$\sin^2 \nu_n \tau_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\nu_n \tau_0).$$

В результате сумма в последнем слагаемом выражения (3) перепишется в виде  $U = U_1 - U_2$ , где

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n^2 \left( v_n^2 + \omega_0^2 + v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} v_n^2 + \frac{C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)} \right)},$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{v_n^2 \left( v_n^2 + \omega_0^2 + v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} v_n^2 + \frac{C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)} \right)}. \quad (\text{П1})$$

Обозначим  $v_n^2 = x$  и преобразуем выражение в знаменателе

$$\begin{aligned} &x \left[ (x + \omega_0^2) \omega_2^2 \omega_3^2 (x + \omega_2^2) (x + \omega_3^2) + x C_2^2 \omega_3^2 (x + \omega_3^2) \right. \\ &+ \left. x C_3^2 \omega_2^2 (x + \omega_2^2) \right] = x \left[ \omega_2^4 \omega_3^4 x + \omega_2^2 \omega_3^2 x^3 + \omega_3^2 \omega_2^2 x^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right. \\ &+ \left. \omega_2^4 \omega_3^4 \omega_0^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_0^2 x^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_0^2 x (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right. \\ &+ \left. C_2^2 \omega_3^4 x + C_2^2 \omega_3^2 x^2 + C_3^2 \omega_2^4 x + C_3^2 \omega_2^2 x^2 \right] \\ &= x \left[ \omega_2^2 \omega_3^2 x^3 + x^2 \left\{ \omega_2^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_0^2 \omega_2^2 \omega_3^2 + C_2^2 \omega_3^2 \right. \right. \\ &+ \left. \left. C_3^2 \omega_2^2 \right\} + x \left\{ \omega_2^4 \omega_3^4 + \omega_0^2 \omega_2^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right. \right. \\ &+ \left. \left. C_2^2 \omega_3^4 + C_3^2 \omega_2^4 \right\} + \omega_0^2 \omega_2^4 \omega_3^4 \right] \\ &= x \omega_2^2 \omega_3^2 \left[ x^3 + x^2 \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2 + \frac{C_2^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2}{\omega_3^2} \right\} \right. \\ &+ \left. x \left\{ \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_0^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{C_2^2 \omega_3^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2 \omega_2^2}{\omega_3^2} \right\} + \omega_0^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения  $A = \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2 + \frac{C_2^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2}{\omega_3^2}$ ,

$$B_{\omega} = \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_0^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{C_2^2 \omega_3^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2 \omega_2^2}{\omega_3^2},$$

$$C = \omega_0^2 \omega_2^2 \omega_3^2.$$

Тогда выражение в знаменателе первого слагаемого в (П1) примет вид

$$\begin{aligned} &x \omega_2^2 \omega_3^2 \underbrace{\left[ x^3 + Ax^2 + B_{\omega} x + C \right]}_{=0} \\ &= x \omega_2^2 \omega_3^2 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \end{aligned}$$

Обозначим  $Q = \frac{A^2 - 3B_{\omega}}{9}$ ;  $R = \frac{2A^3 - 9AB_{\omega} + 27C}{54}$ ;  
 $S = Q^3 - R^2$ ;  $\Phi = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{R}{\sqrt{Q^3}} \right)$ . Если  $S > 0$ , тогда

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{Q} \cos(\Phi) - \frac{A}{3}, \\ x_2 &= -2\sqrt{Q} \cos \left( \Phi + \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{A}{3}, \\ x_3 &= -2\sqrt{Q} \cos \left( \Phi - \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{A}{3}. \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

Первая сумма в (П1) преобразуется к виду

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 + v_n^2) (\omega_3^2 + v_n^2)}{v_n^2 \omega_2^2 \omega_3^2 (v_n^2 - x_1) (v_n^2 - x_2) (v_n^2 - x_3)}. \quad (\text{П3})$$

Последнее выражение (П1) разобьем на простые дроби

$$\begin{aligned} &\frac{\beta_0}{x} + \frac{\gamma}{x - x_1} + \frac{\varphi}{x - x_2} + \frac{\Delta}{x - x_3} \\ &= \frac{x^2 + x(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_2^2 \omega_3^2}{x(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3}, \\ \Delta &= \frac{x_3^2}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_3)} \left\{ \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} \left( \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_2 x_3} - 1 \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{x_2 x_3} - \frac{1}{x_3} \left( 1 + \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} \left[ \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{x_2 x_3} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. (x_2 + x_3 - x_1) \right] \right) + \frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2)(x_2 + x_3)}{x_2 x_3} \right\}, \\ \varphi &= \frac{x_2}{x_3(x_2 - x_1)} \left\{ \Delta \frac{x_2}{x_3} (x_1 - x_3) - 1 \right. \\ &- \left. \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} (x_2 + x_3 - x_1) - \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} \right. \\ &\times \left. \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 + \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{x_1 x_2 x_3} (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) \right\} \right\}, \\ \gamma &= \frac{1}{x_2 x_3} \left\{ \omega_2^2 + \omega_3^2 - \Delta x_1 x_2 - \varphi x_3 \right. \\ &- \left. \beta_0 (x_2 x_3 + x_1(x_2 + x_3)) \right\} \quad v_n = \frac{2\pi n}{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

В итоге  $U_1$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta_0}{v_n^2} + \frac{\gamma}{v_n^2 - x_1} + \frac{\varphi}{v_n^2 - x_2} + \frac{\Delta}{v_n^2 - x_3} \right). \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0}{v_n^2} &= \beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^2}{4\pi^2 n^2} = \beta_0 \frac{\beta^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \beta_0 \frac{\beta^2}{24}, \\ x_1 &= -2\sqrt{Q} \cos \phi - \frac{A}{3} = -x_{10} = - \left( 2\sqrt{Q} \cos \phi + \frac{A}{3} \right); \\ \text{Если } x_1 < 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{v_n^2 + x_{10}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} + x_{10}} = \frac{\gamma \beta^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{x_{10} \beta^2}{4\pi^2}} \\ &= \frac{\gamma \beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_{10} \beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_{10} \beta^2}} \operatorname{ctg} \left( \frac{\sqrt{x_{10} \beta^2}}{2\pi} \right) \right]; \quad \tilde{x}_{10}^2 = \frac{x_{10} \beta^2}{4\pi^2}, \\ x_2 &= -2\sqrt{Q} \cos \left( \Phi + \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{A}{3} = -x_{20} \quad \tilde{x}_{20}^2 = \frac{x_{20} \beta^2}{4\pi^2}, \end{aligned}$$

$$x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\Phi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{A}{3} = -x_{30} \quad \tilde{x}_{30}^2 = \frac{x_{30}\beta^2}{4\pi^2}.$$

Если  $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ :

$$U_1 = \frac{1}{2} \left\{ \beta_0 \frac{\beta^2}{24} + \frac{\gamma\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_1\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{x_1}\beta}{2}\right) \right] + \frac{\varphi\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_2\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{x_2}\beta}{2}\right) \right] + \frac{\Delta\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_3\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \operatorname{ctg}\left(\frac{\sqrt{x_3}\beta}{2}\right) \right] \right\}. \quad (\text{П5})$$

Перейдем к вычислению  $U_2$ :

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\beta_0 \cos 2\nu_n T_0}{\nu_n^2} + \frac{\gamma \cos 2\nu_n T_0}{\nu_n^2 - x_1} + \frac{\varphi \cos 2\nu_n T_0}{\nu_n^2 - x_2} + \frac{\Delta \cos 2\nu_n T_0}{\nu_n^2 - x_3} \right),$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_0 \cos^2 \frac{2\pi T_0 n}{\beta}}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta^2 \beta_0}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{2\pi T_0 n}{\beta}}{n^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta^2 \beta_0}{4\pi^2} \frac{1}{12} \left( 3 \frac{(4\pi T_0)^2}{\beta} - 6\pi \frac{4\pi T_0}{\beta} + 2\pi^2 \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{4\pi T_0 n}{\beta}}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} - x_1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta^2 \gamma}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{4\pi T_0 n}{\beta}}{n^2 - \frac{x_1 \beta^2}{4\pi^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta^2 \gamma}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi T_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2\pi} \right] \times \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_1 \beta^2} \right\} \right].$$

При  $x_1, x_2, x_3 > 0$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta_0 \beta^2}{48} \left( 3 \frac{(4\pi T_0)^2}{\beta} - \frac{24\pi^2 T_0}{\beta} + 2\pi^2 \right) + \frac{\gamma\beta^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi T_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2} \right\} + \frac{\varphi\beta^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi T_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2\pi} \right] \right\} \times \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2} - \frac{2\pi^2}{x_2 \beta^2} \right\} + \frac{\Delta\beta^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi T_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2\pi} \right] \right\} \times \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2} - \frac{2\pi^2}{x_3 \beta^2} \right\}. \quad (\text{П6})$$

Квазиклассическое действие с учетом двух „промотирующих“ локальных фононных мод сводится к выражению вида

$$S_B 2\omega_0^2 (a+b) a \tau_0 - \frac{2}{\beta} \omega_0^2 (a+b)^2 \tau_0^2 - \frac{4}{\beta} \omega_0^4 (a+b)^2 \{U_1 + U_2\},$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Arcsh} \left[ \frac{b-a}{b+a} \operatorname{sh} \frac{\omega_0 \beta}{4} \right] + \frac{\beta}{4}$$

$$= \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Arcsh} \left[ \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1} \operatorname{sh} \frac{\omega_0 \beta}{4} \right] + \frac{\beta}{4}$$

или

$$\tau_0^* = \tau_0 \omega_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsh} \left[ \frac{b^* - 1}{b^* + 1} \operatorname{sh} \beta^* \right] + \beta^*;$$

$$\tau_0^* = \tau \omega_0; \quad \beta^* = \frac{\omega_0 \beta}{4}.$$

Окончательно перенормированное выражение для одномерного квазиклассического инстантонного действия с учетом двух локальных фононных мод среды-термостата принимает вид

$$\tilde{S}_{10} = \frac{S_{10}}{\omega_0 a^2} = 2(b^* + 1)\tau_0^* - \frac{1}{2\beta^*} (b^* + 1)^2 \tau_0^{*2} - \frac{(b^* + 1)^2}{\beta^*} \times \left\{ \frac{1}{2} \left[ \beta_0 \omega_0^2 \left( \frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2 \frac{2}{3} + 4 \frac{\gamma \omega_0^2 \left( \frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2}{\pi^2} \right] \times \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_1\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \operatorname{ctg} \left( \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2\pi} \right) \right] + 4 \frac{\varphi \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \right. \times \left. \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_2\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \operatorname{ctg} \left( \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2\pi} \right) \right] + 4 \frac{\Delta \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{2x_3\beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \operatorname{ctg} \left( \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2\pi} \right) \right] \right\} - \frac{1}{2} \left[ \beta_0 \omega_0^2 \left( \frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2 \frac{1}{3} \left( 3 \frac{(4\pi \tau_0 \omega_0)^2}{\beta \omega_0} - \frac{6\pi^2 \tau_0 \omega_0 4}{\beta \omega_0} + 2\pi^2 \right) + \frac{4\gamma \omega_0^2 \left( \frac{\beta \omega_0}{4} \right)^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\omega_0 \pi^2 4}{4\sqrt{x_1}\beta \omega_0} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0 \omega_0}{\beta \omega_0} \right) \frac{\sqrt{x_1} 2\beta \omega_0}{\omega_0 \pi 4} \right] \times \operatorname{cosec} \frac{2\sqrt{x_1}\beta \omega_0}{\omega_0} + \frac{\omega_0^2 \pi^2 4}{8x_1 \beta \omega_0} \right\} + \frac{4\varphi \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \right. \times \left. \left\{ \frac{\omega_0 \pi^2 4}{4\sqrt{x_2}\beta^*} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0^* \omega_0}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_2} 2\beta^*}{\omega_0 \pi} \right] \right\} \times \operatorname{cosec} \frac{2\sqrt{x_2}\beta^*}{\omega_0} + \frac{\omega_0^2 \pi^2}{8x_2 \beta^{*2}} \right\} + \frac{4\Delta \omega_0^2 \beta^{*2}}{\pi^2} \times \left. \left\{ \frac{\omega_0 \pi^2 4}{4\sqrt{x_3}\beta^*} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0^* \omega_0}{\beta^*} \right) \frac{\sqrt{x_3} 2\beta^*}{\omega_0 \pi} \right] \right\} \times \operatorname{cosec} \frac{2\sqrt{x_3}\beta^*}{\omega_0} + \frac{\omega_0^2 \pi^2}{8x_3 \beta^{*2}} \right\}. \quad (\text{П7})$$

Перейдем к вычислению предэкспоненциального фактора с учетом двух промотирующих локальных фонон-



НЫХ МОД:

$$B = \frac{2\omega_0^2(a+b)^2}{(2\pi\beta)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}}}{\left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{П8})$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{0n} &= v_n^2 + \omega_0^2 + \xi_n, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{v_n^2 + \omega_0^2 + \frac{v_n^2 C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} + \frac{v_n^2 C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)}} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2v_n \tau_0) \omega_2^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 + v_n^2) (\omega_3^2 + v_n^2)}{(\omega_2^2 + v_n^2) \omega_2^2 \omega_3^2 (\omega_2^2 + v_n^2) (\omega_3^2 + v_n^2) + v_n^2 C_2^2 \omega_3^2 (\omega_3^2 + v_n^2) + v_n^2 C_3^2 \omega_2^2 (\omega_2^2 + v_n^2)}, \\ & \quad x = v_n^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos 2v_n \tau_0) (\omega_2^2 + v_n^2) (\omega_3^2 + v_n^2)}{x^3 + Ax^2 + B\omega x + C}, \quad (\text{П9}) \end{aligned}$$

где введены обозначения  $A = \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_0^2 + \frac{C_2^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2}{\omega_3^2}$ ,

$$\begin{aligned} B\omega &= \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_0^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \frac{C_2^2 \omega_3^2}{\omega_2^2} + \frac{C_3^2 \omega_2^2}{\omega_3^2}, \\ C &= \omega_0^2 \omega_2^2 \omega_3^2, \end{aligned}$$

обозначим также

$$\begin{aligned} Q &= \frac{A^2 - 3B\omega}{9}; & R &= \frac{2A^3 - 9AB\omega + 27C}{54}; \\ S &= Q^3 - R^2; & \Phi &= \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{R}{\sqrt{Q^3}} \right). \end{aligned}$$

При  $S > 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{Q} \cos(\Phi) - \frac{A}{3}, \\ x_2 &= -2\sqrt{Q} \cos \left( \Phi + \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{A}{3}, \\ x_3 &= -2\sqrt{Q} \cos \left( \Phi - \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{A}{3}. \end{aligned}$$

Разложим знаменатель соотношения (П9)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\omega_2^2 + v_n^2) (\omega_3^2 + v_n^2)}{(v_n^2 - x_1)(v_n^2 - x_2)(v_n^2 - x_3)} \\ &= \frac{D}{v_n^2 - x_1} + \frac{E}{v_n^2 - x_2} + \frac{F}{v_n^2 - x_3} \\ F &= \frac{(\omega_2^2 + \omega_3^2 + x_2 + x_3)[x_2 x_3 (x_1 + x_3) - x_1 x_3 (x_2 + x_3)] + (x_2 - x_1)[(x_2 + x_3)\omega_2^2 \omega_3^2 + x_2 x_3 (\omega_2^2 + \omega_3^2)]}{(x_2 - x_1)[x_1 x_2 (x_2 + x_3) - x_2 x_3 (x_1 + x_2)] - (x_1 - x_3)[x_2 x_3 (x_1 + x_3) - x_1 x_3 (x_2 + x_3)]} \\ E &= \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2 + x_2 + x_3 + F(x_1 - x_3)}{x_2 - x_1}; \end{aligned}$$

$$D = -\frac{\omega_2^2 + \omega_3^2 + E(x_1 + x_3) + F(x_1 + x_2)}{x_2 + x_3},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D}{v_n^2 - x_1} &= \frac{D}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2} - x_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{x_1 \beta^2}{4\pi^2}} = \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \\ & \quad \left[ -\frac{4\pi^2}{x_1 \beta^2} + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{x_1 \beta^2}{4\pi^2}} \right] \\ (\text{при } x_1 > 0): \\ &= \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_1 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{10} \beta^2} - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1} \beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_1} \beta}{2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Сумма, содержащая  $\cos 2v_n \tau_0$ , дает в этом случае

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_1 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_1} \beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \times \frac{\sqrt{x_1} \beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1} \beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_1 \beta^2} \right\} \right]. \quad (\text{П10}) \end{aligned}$$

В итоге безразмерный предэкспоненциальный фактор определяется суммами двух типов:

$$\tilde{B} = \frac{B}{a^2 \omega^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\omega_0^2 \left( \frac{b}{a} + 1 \right)^2}{(2\pi\beta)^{\frac{1}{2}}} \frac{V_1}{(V_2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} = \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_1 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{10} \beta^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_1} \beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_1} \beta}{2} \right\} \right] + \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_2 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{20} \beta^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_2} \beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_2} \beta}{2} \right\} \right] + \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_3 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{2\pi^2}{x_{30} \beta^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\pi^2}{\sqrt{x_3} \beta} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x_3} \beta}{2} \right\} \right] - \frac{1}{2} \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_1 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_1} \beta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_1} \beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1} \beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_1 \beta^2} \right\} \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_2 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_2} \beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_2} \beta}{2\pi} \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_2} \beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_2 \beta^2} \right\} \right] - \frac{1}{2} \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_3 \beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_3} \beta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi \tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_3} \beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_3} \beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_3 \beta^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\nu_n \tau_0}{\lambda_{0n}} = \frac{D\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_1\beta^2} \right. \\
& + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_1}\beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_1}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_1\beta^2} \right\} + \frac{E\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_2\beta^2} \right. \\
& + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_2}\beta} \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_2}\beta}{2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\pi^2}{x_2\beta^2} \right\} + \frac{F\beta^2}{4\pi^2} \left[ -\frac{4\pi^2}{x_3\beta^2} + 2 \left\{ -\frac{\pi^2}{\sqrt{x_3}\beta} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \times \cos \left[ \left( \pi - \frac{4\pi\tau_0}{\beta} \right) \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2\pi} \right] \operatorname{cosec} \frac{\sqrt{x_3}\beta}{2} + \frac{2\pi^2}{x_3\beta^2} \right\} \right].
\end{aligned}
\tag{П11}$$

В результате аналитически найдено выражение для вероятности одномерного туннельного переноса:

$$\Gamma = B \exp(-S). \tag{П12}$$

## Благодарности

Авторы благодарят проф. Э.Дж. Леггетта за полезные обсуждения, а также ИПЛИТ РАН, ЦКП МГУ им. М.В. Ломоносова и НОЦ „Физика твердотельных наноструктур“ ННГУ им. Н.И. Лобачевского за помощь при выполнении экспериментальной части работы.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ 0748-2020-0012 и гранта РФФИ 18-42-130007 р\_а. The International Center for Interfacing Magnetism and Superconductivity with Topological Matter MagTop is supported by the Foundation for Polish Science through the IRA Programme co-financed by EU within SG OP (Grant No. MAB/2017/1).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] A.O. Caldeira, A.J. Leggett. *Ann. Phys.*, **149** (2), 374 (1983).
- [2] A.I. Larkin, Yu.N. Ovchinnikov. *Phys. Rev. B*, **28** (11), 6281 (1983).
- [3] B.I. Ivlev, Yu.N. Ovchinnikov. *J. Exp. Theor. Phys.*, **66** (2), 378 (1987). [*Zhurnal Éksperimental'noĭ i Teoreticheskoi Fiziki*, **93**, 668 (1987).]
- [4] A.K. Aringazin, Yu.I. Dahnovsky, V.D. Krevchik, M.B. Semenov, A.A. Ovchinnikov, K. Yamamo. *Phys. Rev. B*, **68**, 155426 (2003).
- [5] Yu.N. Ovchinnikov. *J. Exp. Theor. Phys.*, **104** (2), 254 (2007). <https://doi.org/10.1134/S1063776107020100>
- [6] V.A. Benderskii, E.V. Vetoshkin, H.P. Trommsdorff, E.I. Kats. *Phys. Rev. E*, **67**, 026102 (2003).
- [7] *Transfer Processes in Low-Dimensional Systems* (in memory of A.A. Ovchinnikov, A.I. Larkin), ed. by A.J. Leggett, Yu. Dahnovsky, V.D. Krevchik, V.Ya. Krivnov, M.B. Semenov, K. Yamamoto (UT Research Institute Press, Tokyo, Japan, 2005)
- [8] V.Ch. Zhukovskiy, Yu.I. Dahnovsky, O.N. Gorshkov, V.D. Krevchik, M.B. Semenov, Yu.G. Smirnov, E.V. Chuprunov, V.A. Rudin, N.Yu. Skibitskaya, P.V. Krevchik, D.O. Filatov, D.A. Antonov, M.A. Lapshina, M.E. Shenina, K. Yamamoto. *Moscow Univ. Phys. Bull.*, **64** (5), 475 (2009). <https://doi.org/10.3103/S0027134909050014>
- [9] V.Ch. Zhukovskii, O.N. Gorshkov, V.D. Krevchik, M.B. Semenov, E.V. Groznaya, D.O. Filatov, D.A. Antonov, Moscow Univ. Phys. Bull., **64** (1), 27 (2009). <https://doi.org/10.3103/S0027134909010068>
- [10] D. Filatov, D. Guseinov, I. Antonov, A. Kasatkin, O. Gorshkov. *RSC Adv.*, **4**, 57337 (2014).
- [11] *Управляемое диссипативное туннелирование. Туннельный транспорт в низкоразмерных системах*, под ред. Э.Дж. Леггетта, А.К. Арынгазина, В.А. Бендерского, Ю.И. Дахновского, Х. Деккер, В.Ч. Жуковского, В.Д. Кревчика, Ю.Н. Овчинникова, М.Б. Семенова, А.И. Тернова, К. Ямамото (Физматлит, М., 2011–2012)
- [12] F.V. Kusmartsev, V.D. Krevchik, M.B. Semenov, D.O. Filatov, A.V. Shorokhov, A.A. Bukharaev, Y. Dakhnovsky, A.V. Nikolaev, N.A. Pyataev, R.V. Zaytsev, P.V. Krevchik, I.A. Egorov, K. Yamamoto, A.K. Aringazin. *J. Exp. Theor. Phys. Lett.*, **104**, 392 (2016). <https://doi.org/10.1134/S0021364016180016>
- [13] Н.Н. Леденцов, В.М. Устинов, В.А. Шукин, П.С. Копьев, Ж.И. Алферов, Д. Бимберг. *ФТП*, **32** (4), 385 (1998).
- [14] O. Stier, M. Grundmann, D. Bimberg. *Phys. Rev. B*, **59** (8), 5688 (1999).
- [15] I.A. Karpovich, B.N. Zvonkov, N.V. Baidus' et al. *Trends in Nanotechnology Research* (Nova Science Publishers, NY., 2004)