

01

Резонансный отклик масштабно-инвариантных функций случайного процесса с турбулентным спектром

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
E-mail: koverda@itp.uran.ru

Поступило в Редакцию 19 марта 2021 г.

В окончательной редакции 19 марта 2021 г.

Принято к публикации 3 апреля 2021 г.

Масштабно-инвариантные случайные процессы с большими флуктуациями моделируются системой двух стохастических нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействующие фазовые переходы. Показано, что под действием белого шума возникает критическое состояние, характеризующееся турбулентным спектром и масштабно-инвариантным распределением амплитуд. Критическому состоянию соответствует максимум энтропии, свидетельствующий об устойчивости процесса. При внешнем гармоническом воздействии на случайный процесс с турбулентным спектром возникает резонансный отклик масштабно-инвариантных функций.

Ключевые слова: турбулентность, взаимодействующие фазовые переходы, спектр мощности, $1/f$ -шум, максимум энтропии.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.13.51120.18774

Масштабно-инвариантные процессы с большими флуктуациями широко распространены в природе. Такие процессы характеризуются степенными зависимостями спектральной плотности и амплитудных распределений. Известным примером масштабно-инвариантного процесса является колмогоровская турбулентность, когда при течении жидкости появляются пульсации различных масштабов, подчиняющиеся универсальным законам подобия [1–3]. Согласно закону Колмогорова–Обухова, спектральная плотность турбулентных пульсаций зависит от частоты как $f^{-\alpha}$, где $\alpha = 5/3$ („закон $-5/3$ “). Для различных турбулентных течений экспериментально доказано существование интервалов частот, в которых выполняется закон Колмогорова–Обухова [4–8]. Но не все случайные процессы со степенным поведением спектральной плотности и амплитудных распределений можно свести к турбулентности. Во многих природных и техногенных системах наблюдаются масштабно-инвариантные флуктуации со спектром мощности, обратно пропорциональным частоте ($1/f$ -спектром) [9–12]. Такие флуктуации могут возникать в критических режимах теплопереноса с фазовыми переходами [13].

Экстремальные флуктуации в критических режимах теплопереноса моделируются системой двух нелинейных стохастических уравнений, описывающей взаимодействие флуктуаций вблизи критического перехода [13–15]. Решением этой системы является эволюция флуктуаций, часть которых подчиняется классической статистике (имеет экспоненциальную релаксацию и гауссовский „хвост“ распределения амплитуд), а другая часть флуктуаций имеет степенную релаксацию и степенной „хвост“ распределения. Исследование взаимодействия больших и малых флуктуаций в критической

области объясняет физическую природу $1/f$ -шума и открывает новые возможности исследования больших флуктуаций со степенным распределением амплитуд и их взаимодействия с классическими флуктуациями. Под действием анизотропного белого шума могут формироваться случайные процессы с $1/f^\alpha$ -зависимостью спектров мощности от частоты с различными значениями показателя α : $0.7 < \alpha < 2$ [15]. В настоящей работе показано, что в системе уравнений, моделирующей флуктуации при взаимодействующих фазовых переходах, наряду с критическим состоянием с $1/f$ -спектром существует критический переход, характеризующийся турбулентным спектром мощности $S(f) \sim f^{-5/3}$. Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \xi(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ и ψ — динамические переменные (параметры порядка), ξ — гауссовский, δ — коррелированный шум с амплитудой σ , который подается только в первое уравнение. Второе уравнение системы (1) является управляющим, а первое — подчиненным. Система (1) описывает случайные блуждания в потенциале взаимодействующих докритического и закритического фазовых переходов и сама имеет критичность при значении амплитуды белого шума σ ($1.3 < \sigma < 1.5$), несколько большей, чем при моделировании $1/f$ -шума. Система (1) решалась численным методом. При критической интенсивности белого шума в системе происходит индуцированный шумом переход, а спектр переменной φ имеет вид $S_\varphi \sim f^{-5/3}$, характерный для закона

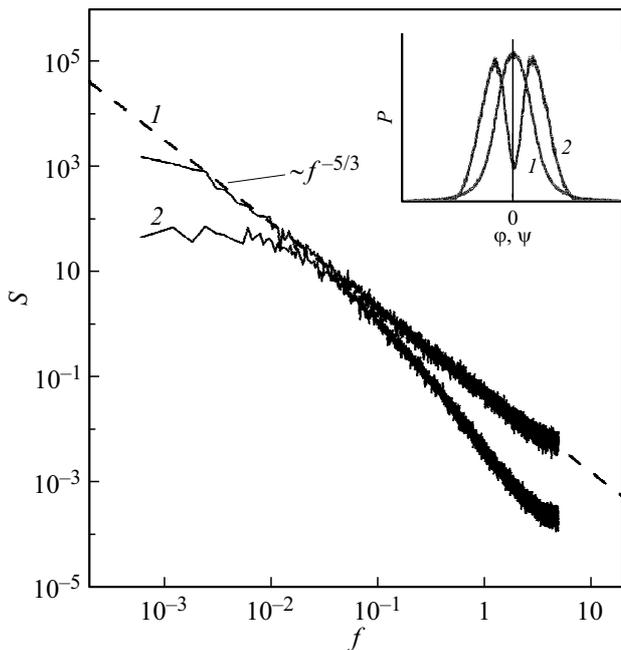


Рис. 1. Спектры мощности переменных φ (1) и ψ (2). На вставке — функции распределения стохастических переменных: 1 — $P(\varphi)$, 2 — $P(\psi)$.

Колмогорова—Обухова при развитой турбулентности. Спектр переменной ψ имеет вид $S_\psi \sim f^{-2}$ при высоких частотах и горизонтальную полку при низких частотах. На рис. 1 приведены спектры мощности переменных φ (1) и ψ (2) и соответствующие функции распределения стохастических переменных. Функция распределения $P(\varphi)$ имеет степенной „хвост“ с зависимостью

$$P = k\varphi^{-\beta} \tag{2}$$

(где показатель степени $\beta = 2.5$), которая прослеживается на протяжении 2–3 десятичных порядков величины. „Хвост“ распределения $P(\psi)$ при больших амплитудах имеет гауссовский вид, что дает основание пользоваться для переменной ψ обычными формулами статистической механики. Устойчивость процесса будет определяться максимумом энтропии Гиббса—Шеннона [16]:

$$H = - \sum_n P_n \log P_n. \tag{3}$$

Проведенный расчет энтропии для квадрата переменной $\psi^2(t)$ показал, что критическому процессу с турбулентным спектром мощности $S_\varphi \sim f^{-5/3}$ соответствует максимум зависимости информационной энтропии от интенсивности шума, что свидетельствует об устойчивости процесса. Критичность индуцированного шумом перехода, при котором возникает турбулентный спектр мощности, иллюстрирует рис. 2, на котором показаны зависимости функции распределения квадрата переменной ψ^2 при различных значениях амплитуды шума. Кривая 2 на этом рисунке соответствует критическому переходу.

На вставке к рис. 2 в логарифмических координатах приведены функции распределения квадратов переменных φ (1) и ψ (2) в критическом режиме. Степенной „хвост“ функции $P(\varphi^2)$ описывается зависимостью (2) с показателем степени $\beta = 1.5$.

При воздействии периодической силы на второе уравнение системы (1) был обнаружен нелинейный резонансный отклик масштабно-инвариантной функции распределения. С учетом гармонического воздействия система уравнений (1) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi\psi^2 + \psi + \xi(t),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi\varphi^2 + 2\varphi + A \sin(2\pi f_0 t), \tag{4}$$

где f_0 и A — частота и амплитуда периодического воздействия соответственно. Добавление гармоники во второе уравнение увеличивает энтропию системы и, как следствие, повышает устойчивость процесса. Зависимость энтропии от амплитуды A при заданной частоте f_0 имеет максимум при некотором критическом значении A ($0.4 < A < 1.4$). Такое поведение при частоте $f_0 = 0.2$ иллюстрирует рис. 3. Периодическая сила вызывает отклик функции распределения переменной φ . С ростом амплитуды A растет коэффициент k в степенных зависимостях (2) функций распределения. С ростом амплитуды A коэффициент k растет до некоторого значения и затем остается приблизительно постоянным. Такое поведение наблюдается как для функции $P(\varphi)$,

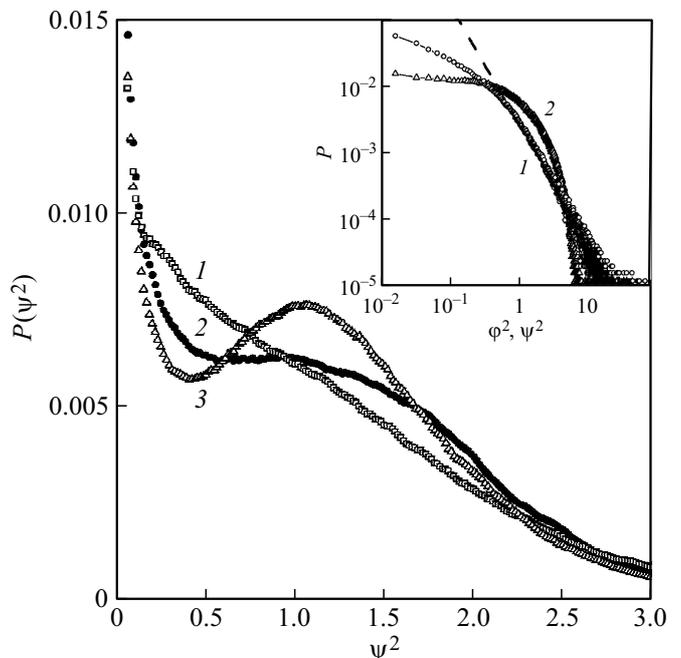


Рис. 2. Функции распределения квадрата переменной ψ^2 при значениях амплитуды шума $\sigma = 1.8$ (1), 1.45 (2), 1.2 (3). На вставке в логарифмических координатах приведены функции распределения квадратов переменных φ (1) и ψ (2) в критическом режиме.

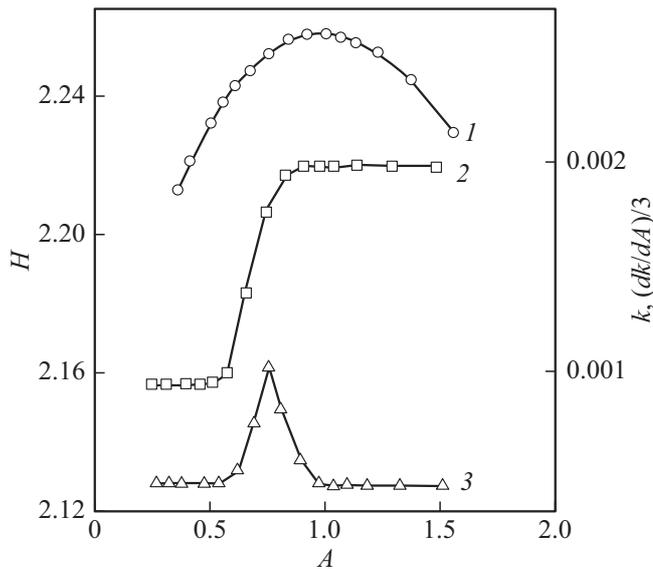


Рис. 3. Зависимость энтропии H от амплитуды A (1), зависимость $k(A)$ для функции распределения $P(\varphi^2)$ (2) и поведение функции отклика dk/dA (3). Частота $f_0 = 0.2$.

так и для $P(\varphi^2)$. На рис. 3 приведена зависимость $k(A)$ для функции распределения $P(\varphi^2)$ квадрата переменной φ^2 (кривая 2). На этом же рисунке показано поведение функции отклика dk/dA (кривая 3). Подобный резонансный отклик масштабно-инвариантных функций наблюдался при любых частотах f_0 .

Таким образом, в системе уравнений, моделирующей флуктуации при взаимодействующих фазовых переходах, наряду с критическим состоянием с $1/f$ -спектром мощности существует критический переход, характеризующийся турбулентным спектром $S \sim f^{-5/3}$. При внешнем гармоническом воздействии повышается устойчивость и возникает резонансный отклик масштабно-инвариантных функций случайного процесса с турбулентным спектром.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00091-а).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.Н. Колмогоров, ДАН СССР, **30** (4), 299 (1941). DOI: 10.3367/UFNr.0093.196711h.0476
- [2] А.М. Обухов, Успехи математических наук, **38** (4), 101 (1983). <http://mi.mathnet.ru/umn2946>
- [3] Г.И. Баренблатт, Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, **54** (3), 268 (2018). <https://doi.org/10.7868/S0003351518030030>

- [4] Y. Zhou, K. Nagata, Y. Sakai, T. Watanabe, J. Fluid Mech., **874**, 677 (2019). DOI: 10.1017/jfm.2019.456
- [5] G. During, C. Josserand, G. Krstulovic, S. Rica, Phys. Rev. Fluids, **4** (6), 064804 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevFluids.4.064804
- [6] C. Meneveau, K.R. Sreenivasan, J. Fluid Mech., **224**, 429 (1991). <https://doi.org/10.1017/S0022112091001830>
- [7] M. Pereira, C. Gissinger, S. Fauve, Phys. Rev. E, **99** (2), 023106 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevE.99.023106
- [8] J. Herauld, F. Petrelis, S. Fauve, J. Statist. Phys., **161** (6), 1379 (2015). DOI: 10.1007/s10955-015-1408-5.
- [9] Ю.Л. Климонтович, *Статистическая теория открытых систем* (Янус, М., 1995).
- [10] M.B. Weissman, Rev. Mod. Phys., **60** (2), 537 (1988). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.60.537>
- [11] Ш.М. Коган, УФН, **145** (2), 285 (1985). DOI: 10.3367/UFNr.0145.198502d.0285
- [12] P. Bak, *How nature works* (Springer Verlag, N.Y., 1996).
- [13] V.N. Skokov, V.P. Koverda, A.V. Reshetnikov, V.P. Skripov, N.A. Mazheiko, A.V. Vinogradov, Int. J. Heat Mass Transfer, **46** (10), 1879 (2003). DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00475-1
- [14] V.P. Koverda, V.N. Skokov, Physica A, **346** (3-4), 203 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.07.042>
- [15] В.П. Коверда, В.Н. Скоков, Письма в ЖТФ, **45** (9), 19 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.09.47707.17718 [Пер. версия: 10.1134/S1063785019050080].
- [16] А.Г. Башкиров, Теоретическая и математическая физика, **149** (2), 299 (2006). <https://doi.org/10.4213/tmf4235>