

03

## Однонаправленные одноцикловые и субцикловые импульсы

© И.А. Со<sup>1,\*</sup>, А.Б. Плаченов<sup>2,†</sup>, А.П. Киселев<sup>3,4,‡</sup>

<sup>1</sup> Невинпат,  
190000 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> МИРЭА — Российский технологический университет,  
119454 Москва, Россия

<sup>3</sup> Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН,  
191023 Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Институт проблем машиноведения РАН,  
199178 Санкт-Петербург, Россия

\* e-mail: irene\_so@mail.ru

† e-mail: a\_plachenov@mail.ru

‡ e-mail: kiselev@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 29.07.2020 г.

В окончательной редакции 29.07.2020 г.

Принята к публикации 14.08.2020 г.

Представлено простое точное решение волнового уравнения в свободном пространстве. Оно описывает однонаправленные одноцикловые и субцикловые импульсы с конечной энергией. В зависимости от соотношения между входящими в решение свободными параметрами импульс может иметь блинообразный, шароподобный или иглообразный вид.

**Ключевые слова:** однонаправленные точные решения волнового уравнения, одноцикловые и субцикловые импульсы, блинообразные, шароподобные и иглообразные импульсы, фемтосекундная и аттосекундная оптика.

DOI: 10.21883/OS.2020.12.50323.209-20

### 1. Введение

Развитие фемтосекундных и аттосекундных оптических технологий [1] делает актуальным математическое моделирование малоцикловых импульсов [2–4] без упрощающих предположений об их параксиальности. В настоящей заметке мы приводим простое точное осесимметрическое решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$c = \text{const} > 0$  импульс однонаправленно распространяется вдоль оси  $z$ . Это решение обладает конечной энергией. В зависимости от выбора входящих в него произвольных параметров оно может описывать импульсы, имеющие в фокальной области блинообразную, шароподобную или иглообразную форму.

Наше решение существенно проще немногочисленных известных примеров однонаправленных импульсов [3,4]. Вывод его основан на разложении известного (не однонаправленного) сплэш-импульса (splash pulse) [5] на два слагаемых, удовлетворяющих уравнению (1) и описывающих однонаправленные импульсы, распространяющиеся в противоположные стороны. Математические вычисления, сами по себе элементарные, мы здесь опускаем.

### 2. Однонаправленный импульс и его свойства

Найденное нами решение имеет вид

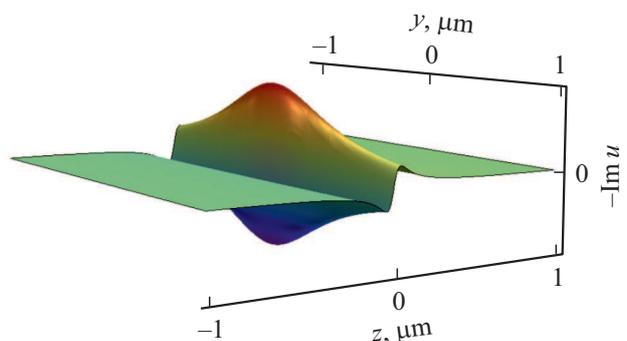
$$u = \frac{1}{S(z_* - S)}, \quad (2)$$

где обозначено

$$S = \sqrt{c^2 t_*^2 - x^2 - y^2}, \quad (3)$$

а звездочка означает комплексификацию:

$$z_* = z + i\xi, \quad t_* = t + i\tau. \quad (4)$$



**Рис. 1.** Блинообразный импульс  $-\text{Im } u$  при  $t = 0$ ,  $x = 0$  ( $\xi = 16.66 \mu\text{m}$ ,  $c\tau = 16.67 \mu\text{m}$ ).

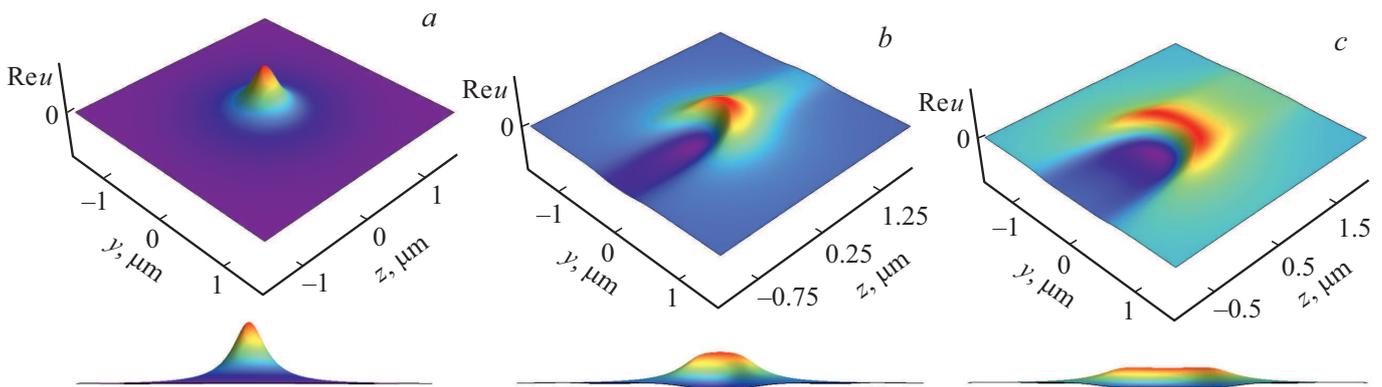


Рис. 2. Шароподобный импульс  $Re u$  при  $t = 0, 0.25/c, 0.5/c \mu s, x = 0$  ( $\xi = 0, c\tau = 0.2 \mu m$ ). Вид в перспективе и вид сзади.

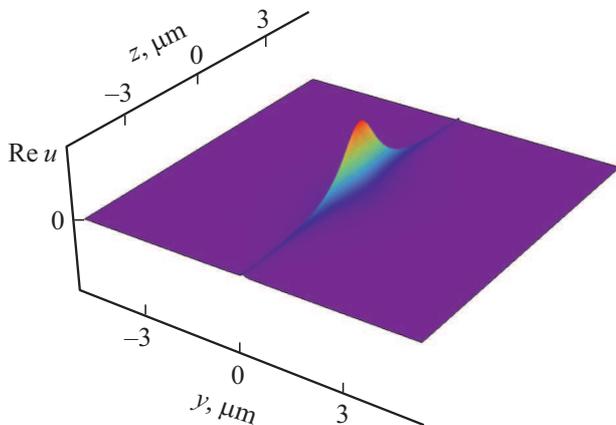


Рис. 3. Иголообразный импульс  $Re u$  при  $t = 0, x = 0$  ( $\xi = -0.975 \mu m, c\tau = 0.025 \mu m$ ).

Здесь  $\xi$  и  $\tau \neq 0$  — свободные вещественные константы (ограничения, гарантирующие отсутствие сингулярностей, приведены ниже). Для определенности мы фиксируем ветвь корня так, что  $S|_{x=y=0} = ct_*$ .

Легко проверяется, что при условии

$$|\xi| < c|\tau| \tag{5}$$

функция (2) не имеет сингулярностей. Более тщательный анализ показывает, что область допустимых значений постоянной  $\xi$  при данном  $\tau$  шире. Именно, если  $\tau > 0$ , то сингулярности у функции (2) отсутствуют при более слабом условии

$$\xi < c\tau. \tag{6}$$

Соответственно для  $\tau < 0$  требуется неравенство  $\xi > c\tau$ . При выполнении этих условий на свободные постоянные можно показать, что функция (2) удовлетворяет волновому уравнению (1) при всех значениях координат  $x, y$  и  $z$  и времени  $t$ , а также имеет конечную энергию.

Решение (2) при больших отрицательных  $t$  описывает волну, сходящуюся в полупространстве  $z < 0$  в фокальную область — окрестность начала координат. При  $t \rightarrow +\infty$  волна расходится в полупространстве  $z > 0$ . Фокусировка происходит при небольших значениях  $t$ .

При разных соотношениях между  $\xi$  и  $\tau$  решение (2) описывает импульсы различного вида. Если  $\xi$  близко к  $c\tau$ , то импульс в фокальной области блинообразный (см. рис. 1), при  $|\xi| \ll c|\tau|$  — шароподобный (см. рис. 2), а если знаки  $\xi$  и  $\tau$  различны, причем  $|\xi| \gg c|\tau|$ , то форма импульса в фокальной области напоминает иглу (см. рис. 3). Мнимая часть функции (2) описывает симметричный биполярный импульс в фокусе. Вещественная часть соответствует субциклового импульсу в фокусе. Субциклового импульсы могут представлять интерес в приложениях, где желательно униполярное воздействие поля (см., например, [1,6]).

В дальнейшем мы собираемся показать, что рассмотренный нами импульс является представителем обширного класса однонаправленных решений волнового уравнения.

### Благодарности

Авторы признательны С.А. Козлову и Н.Н. Розанову за стимулирующие обсуждения.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

[1] Архипов Р.М., Архипов М.В., Шимко А.А., Пахомов А.В., Розанов Н.Н. // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 110. В. 1. С. 9; Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Shimko A.A., Pakhomov A.V., Rosanov N.N. // JETP Letters. 2019. V. 110. N 1. P. 15.  
 [2] Feng S., Winful H.G., Hellwarth R.W. // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. N 4. P. 4630.

- [3] *Hernández-Figueroa H.E., Zamboni-Rached M., Recami E.* Non-Diffracting Waves. John Wiley & Sons, 2013. 509 p.
- [4] *Lekner J.* Theory of electromagnetic pulses. Calif. Morgan & Claypo, 2018. 100 p.
- [5] *Ziolkowski R.W.* // J. Math. Phys. 1985. V. 26. N 4. P. 861.
- [6] *Архинов Р.М., Архинов М.В., Розанов Н.Н.* // Квант. электрон., 2020. Т. 50. № 9. С. 801; *Arkhipov R.M., Arkhipov M.V., Rosanov N.N.* // Quantum Electron. 2020. V. 50. N 9, P. 801.