01.5

# Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации на основе расчета локальных показателей Ляпунова

© О.И. Москаленко [1,2], Е.В. Евстифеев [1,2], А.А. Короновский [1,2]

[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия
[2] Региональный научно-образовательный математический центр „Математика технологий будущего", Саратов, Россия
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

*Поступило в Редакцию 27 апреля 2020 г.*
*В окончательной редакции 27 апреля 2020 г.*
*Принято к публикации 12 мая 2020 г.*

Предложен метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в связанных системах, находящихся вблизи границы обобщенной хаотической синхронизации, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова. Работоспособность метода проверена на системах с однонаправленной связью, допускающих анализ перемежаемости при помощи метода вспомогательной системы. Результаты указанных методов сопоставлены друг с другом, получено хорошее согласие между ними.

**Ключевые слова:** обобщенная синхронизация, локальные показатели Ляпунова, метод вспомогательной системы, перемежаемость.

DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49846.18359

Обобщенная синхронизация является одним из наиболее интересных типов хаотической синхронизации, привлекающих пристальное внимание исследователей, работающих в различных областях науки и техники [1,2]. Интерес к этому явлению помимо фундаментальных аспектов обусловлен прежде всего его большой практической значимостью. В частности, известно, что именно режим обобщенной синхронизации может найти применение в информационно-телекоммуникационных системах, в частности, при разработке способов скрытой передачи информации, обладающих высокой устойчивостью по отношению к шумам и помехам в канале связи [3,4].

Под обобщенной хаотической синхронизацией [1,5] в контексте потоковых динамических систем понимают существование функциональной связи (функционала) между состояниями этих систем. Выделяют однонаправленную и взаимную связь между системами [5,6].

В случае однонаправленной связи между взаимодействующими осцилляторами на границе обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение — режим перемежающейся обобщенной синхронизации [7,8]. В данном случае во временнóй динамике систем синхронная динамика (ламинарные фазы) прерывается асинхронными всплесками (турбулентными фазами), в то время как в режиме обобщенной синхронизации турбулентные всплески отсутствуют.

Для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации используется, как правило, метод вспомогательной системы [9,10]. Согласно этому методу, необходимо ввести в рассмотрение вспомогательную систему, идентичную одной из взаимодействующих систем (ведомой системе) по управляющим параметрам, и проанализировать разность между состояниями этих систем в разные моменты времени. В режиме перемежаемости, как отмечалось выше, эта разность представляет собой чередование ламинарных и турбулентных фаз, проанализировав статистику которых, можно определить тип перемежаемости, реализуемый в исследуемой системе. Известно, что на границе обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с достаточно простой топологией аттрактора наблюдается перемежаемость типа „on-off" [7], характеризующаяся степенными законами для распределений длительностей ламинарных фаз

$$N(\tau) \sim \tau^{-3/2} \quad (1)$$

и зависимостью средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности

$$\langle\tau\rangle \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_c$ — граница обобщенной синхронизации. Для систем с взаимным типом связи определить тип перемежаемости не представляется возможным в связи с неработоспособностью метода вспомогательной системы в данном случае [11], что указывает на необходимость разработки универсальных методов выделения характерных фаз поведения систем, находящихся вблизи границы обобщенной синхронизации, справедливых как в случае однонаправленной, так и взаимной связи.

В настоящей работе предложен метод выделения ламинарных и турбулентных фаз, основанный на расчете локальных показателей Ляпунова [12], и проведена его апробация на однонаправленно связанных трехмерных динамических системах. Согласно данному подходу, необходимо провести расчет показателей Ляпунова [13] в ограниченном временнóм диапазоне и исследовать временнýю динамику второго (в случае однонаправленной связи — старшего условного) показателя Ляпунова.

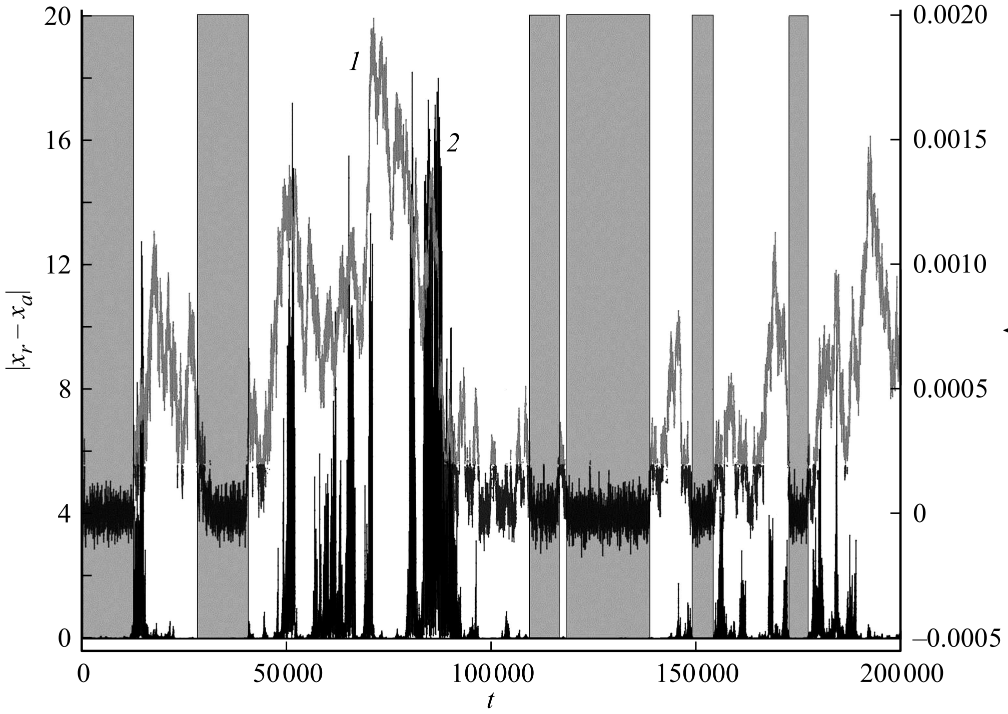


**Рис. 1.** Временны́е зависимости старшего условного локального показателя Ляпунова, рассчитанного для системы двух однонаправленно связанных осцилляторов Resслера (3) (правая вертикальная ось, линия *1*), и временна́я динамика абсолютной величины разности между $x$-координатами ведомой и вспомогательной систем (левая вертикальная ось, линия *2*). Значение параметра связи $\varepsilon = 0.109$. Старший условный локальный показатель Ляпунова рассчитывался на временно́м интервале $T = 3500$. Области, соответствующие ламинарным фазам поведения, отмечены серыми прямоугольниками.

По характеру данной зависимости можно однозначно идентифицировать наличие ламинарных и турбулентных фаз.

В качестве объекта исследования выбраны однонаправленно связанные системы Ресслера [7], описываемые следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= b + z_d(x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= b + z_r(x_r - c), \end{aligned} \tag{3}$$

где индексы $d$ и $r$ относятся к ведущей и ведомой системам соответственно, $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$, $\omega_d = 0.99$, $\omega_r = 0.95$ — управляющие параметры, $\varepsilon$ — параметр связи. При выбранных значениях управляющих параметров режим обобщенной синхронизации в системе (3) наступает при критическом значении $\varepsilon_c = 0.11$.

Ниже границы обобщенной синхронизации, как уже отмечалось, наблюдается перемежающееся поведение. Для определения статистических характеристик перемежаемости были использованы как метод вспомогательной системы, так и подход, основанный на вычислении локальных показателей Ляпунова. На рис. 1 представлены фрагменты временны́х зависимостей старшего условного локального показателя Ляпунова $\Lambda$, рассчитанного для системы (3) при $\varepsilon = 0.109$, и модуля разности состояний ведомой и вспомогательной систем Ресслера $|x_r - x_a|$ при том же значении параметра связи. Видно, что в моменты времени, соответствующие турбулентным фазам поведения, и разность состояний ведомой и вспомогательной систем, и величина локального показателя Ляпунова оказываются положительными, тогда как во время ламинарных фаз разность состояний ведомой и вспомогательной систем оказывается близкой к нулю, а локальный показатель Ляпунова — близким к нулю либо отрицательным. Такое соответствие между поведением ведомой и вспомогательной систем и локальными показателями Ляпунова свидетельствует о возможности применения обоих методов для определения статистических характеристик длительностей ламинарных фаз в режиме перемежаемости, имеющей место вблизи границы обобщенной синхронизации.

На рис. 2, 3 представлены рассчитанные обоими способами статистические характеристики длительностей ламинарных фаз: распределения длительностей ламинарных фаз при нескольких значениях параметра связи (рис. 2) и зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon_c)$ (рис. 3). Данные численного моделирования показаны

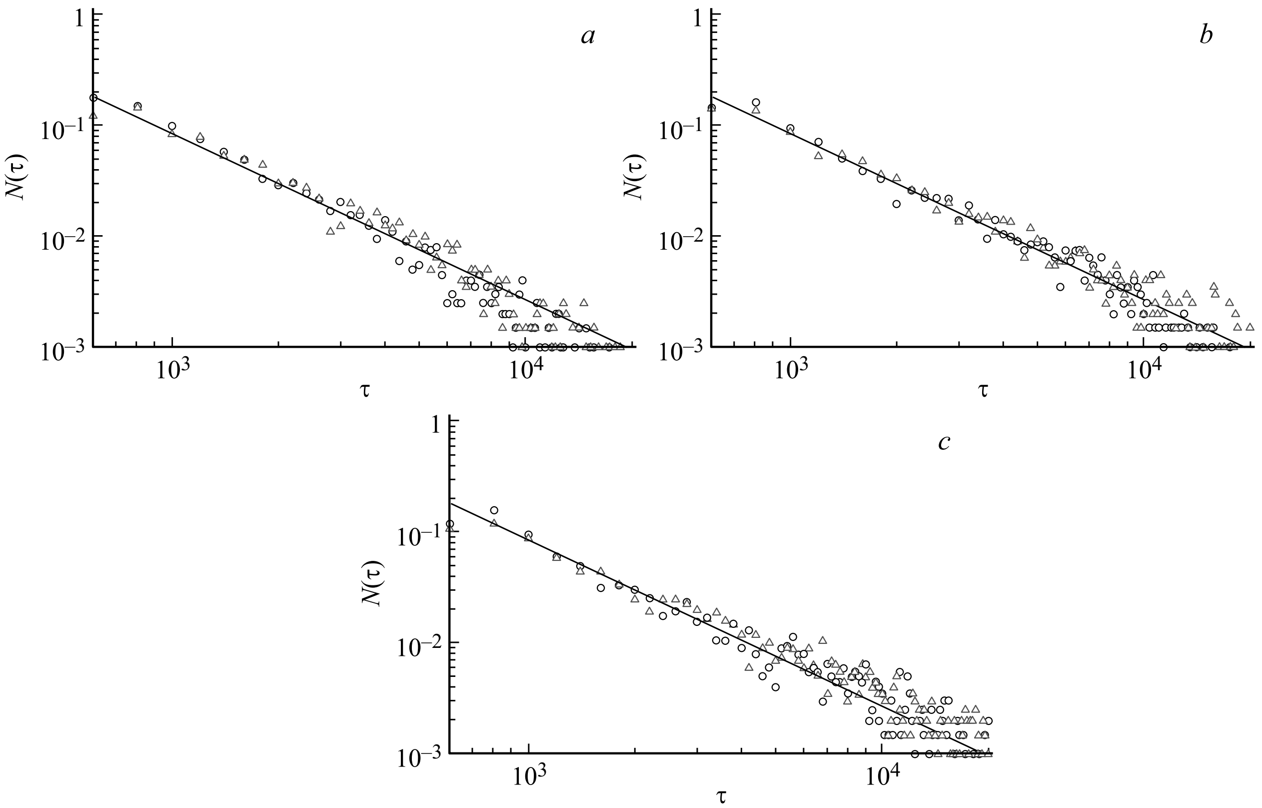


**Рис. 2.** Нормированные распределения длительностей ламинарных фаз двух однонаправленно связанных систем Ресслера (3), рассчитанные при помощи метода вспомогательной системы (кружки) и использовании локальных показателей Ляпунова (треугольники), и их аппроксимации степенным законом (1), полученные при фиксированных значениях параметра связи $\varepsilon = 0.107(a)$, 0.108 ($b$) и 0.109 ($c$).

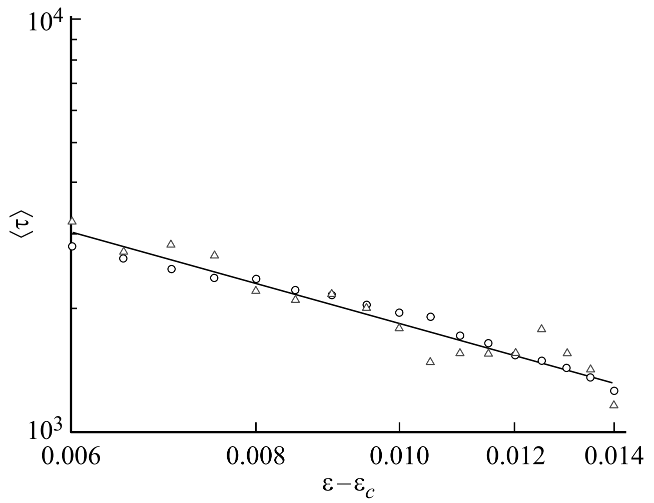


**Рис. 3.** Зависимости средних длительностей ламинарных фаз от параметра надкритичности ($\varepsilon - \varepsilon_c$), полученные при помощи метода вспомогательной системы (кружки) и использовании локальных показателей Ляпунова (треугольники), и их аппроксимации степенным законом (2).

символами, теоретические аппроксимации — сплошными линиями. Из рисунков видно, что во всех рассмотренных случаях статистические характеристики, полученные двумя различными способами, практически в точности совпадают друг с другом, что указывает на возможность использования локальных показателей Ляпунова для определения статистических характеристик перемежаемости. Можно ожидать, что предложенный подход окажется применимым и в том случае, когда применение метода вспомогательной системы не представляется возможным, например в случае взаимной связи между системами [6,14]. Кроме того, нетрудно заметить, что полученные статистические характеристики длительностей ламинарных фаз подчиняются степенным законам (1) и (2) в четком соответствии с теорией перемежаемости типа „on-off“.

Таким образом, в работе предложен метод выделения ламинарных и турбулентных фаз, основанный на вычислении локальных показателей Ляпунова, и проведено его сопоставление с методом вспомогательной системы. Показано, что оба метода позволяют однозначно определить статистические характеристики перемежаемости в случае однонаправленной связи между системами, что свидетельствует о возможности применения предложенного подхода даже в том случае, когда традиционные методы и подходы оказываются неработоспособными.

### Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00037).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

[1] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 2. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980
[2] *Стародубов А.В., Короновский А.А., Храмов А.Е., Жарков Ю.Д., Дмитриев Б.С.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 14. С. 58–65.
[3] *Terry J.R., Van Wiggeren G.D.* // Chaos Solitons Fractals. 2001. V. 12. P. 145–152. DOI: 10.1016/S0960-0779(00)00038-2
[4] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. В. 4. С. 1–8.
[5] *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. N 3. P. 037201. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201
[6] *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. N 3. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216
[7] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhys. Lett. 2005. V. 70. N 2. P. 169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6
[8] *Попов П.В.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 18. С. 61–69.
[9] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. N 5. P. 4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528
[10] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Сельский А.О.* // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. В. 7. С. 48–51. DOI: 10.21883/PJTF.2020.07.49221.18126
[11] *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. N 6. P. 064901. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.064901
[12] *Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е., Шурыгина С.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. В. 10. С. 1–9. DOI: 10.1134/S1063784209100016
[13] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. N 5. P. 5183–5188. DOI: 10.1103/PhysRevE.56.5183
[14] *Москаленко О.И., Ханадеев В.А., Короновский А.А.* // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. В. 19. С. 87–95. DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49846.18359