

03

## Линейная трансформация поляризационных мод в намотанных на катушку srip-световодах. III. Приближенное аналитическое представление

© Г.Б. Малыкин<sup>1</sup>, В.И. Позднякова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГБНУ „Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН“, 603155 Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Институт физики микроструктур РАН — филиал ФГБНУ „Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН“, 603950 Нижний Новгород, Россия

e-mail: malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.

В окончательной редакции 12.09.2019 г.

Принята к публикации 17.09.2019 г.

С использованием аппроксимации проведенного численного моделирования получены приближенные аналитические зависимости интегральных величин эффективного эллиптического двулучепреломления собственных поляризационных мод от длины намотанных на катушку srip-световодов. Показано, что зависимость интегрального эллиптического двулучепреломления собственных поляризационных мод от длины этих световодов весьма быстро выходит на свое предельное значение. Показано также, что зависимость интегральной эллиптичности собственных поляризационных мод намотанных на катушку srip-световодов от их длины имеет сложную периодическую структуру, включающую два существенно различных пространственных периода. Вид рассматриваемых зависимостей определяется длинами поляризационных биений невозмущенного намоткой исходного линейного двулучепреломления srip-световода и циркулярного двулучепреломления, обусловленного кручением srip-световода.

**Ключевые слова:** srip-световод, собственные поляризационные моды, эллиптическое двулучепреломление.

DOI: 10.21883/OS.2020.01.48840.69-19

### 1. Введение

В наших предыдущих работах [1,2] методом численного моделирования параметров матриц Джонса были проведены расчеты интегральных коэффициентов нерезонансной [1] и резонансной [2] линейной трансформации взаимно ортогональных поляризационных мод для типичных параметров намотанных на катушку srip-световодов. Как показано в [1,2], численное моделирование осложняется тем, что локальные значения линейного двулучепреломления и кручения осей srip-световода непрерывно меняются вдоль световода. Вследствие этого для обеспечения необходимой точности вычислений длина srip-световода разбивалась на весьма короткие (по сравнению с пространственным периодом биений поляризационных мод, шагом кручения и радиусом намотки) участки одинаковой длины ( $\sim 2.5 \mu\text{m}$ ). Для каждого такого отрезка световода вычислялась матрица Джонса, и в результате последовательного перемножения всех этих матриц получалась матрица Джонса всего srip-световода. Вычисление интегральных характеристик взаимно ортогональных поляризационных мод для типичных параметров намотанных на катушку srip-световодов удавалось провести только для длин световода порядка десятков сантиметров. Однако длина реальных датчиков различных физических пара-

метров на базе srip-световодов [1] может составлять от нескольких метров до нескольких километров. Поэтому необходимо получить приближенные аналитические выражения для коэффициента линейной трансформации взаимно ортогональных поляризационных мод для типичных параметров намотанных на катушку srip-световодов, позволяющие проводить вычисления для произвольной длины световодов с достаточно хорошей точностью. Поскольку, как показано в [2], практическое применение намотанных на катушку srip-световодов для интегральных параметров резонансной линейной трансформации взаимно ортогональных поляризационных мод нецелесообразно, то в данной работе мы рассмотрим только интегральные параметры нерезонансной линейной трансформации взаимно ортогональных поляризационных мод в зависимости от длины световода.

Рассматриваемый здесь метод основан на том факте [1], что после прохождения излучением некоторой длины намотанного на катушку srip-световода будет происходить повторение эволюции параметров его интегральной матрицы Джонса. Ниже будет показано, что имеют место два пространственных периода изменения этих параметров: длинный и короткий. Используемый в данной работе метод позволяет не прибегать к решению дифференциального уравнения Риккати для вычисления

интегрального эллиптического двулучепреломления намотанных на катушку *strip*-световодов. Известно [3], что в общем случае уравнение Риккати не имеет точного решения.

В данной работе мы рассмотрим распространение монохроматического излучения в намотанных на катушку *strip*-световодах, поскольку при распространении немонахроматического излучения не только интегральные, но даже и локальные параметры одномодовых волоконных световодов (ОВС) произвольного типа зависят от длины волны света [4], что осложняет рассмотрение рассматриваемого явления. Кроме того, в последнем случае возникает явление деполяризации излучения при его распространении в ОВС [4]. При распространении монохроматического излучения в ОВС излучение остается полностью поляризованным. В этом случае рассмотрение эволюции состояния поляризации излучения в ОВС значительно упрощается.

## 2. Эффективные интегральные поляризационные параметры собственных поляризационных мод *strip*-световодов

Прежде чем перейти к рассмотрению эволюции состояния поляризации при распространении света в намотанных на катушку *strip*-световодах, подробно рассмотрим определения эффективных интегральных поляризационных параметров *strip*-световодов. Известно, что в отсутствие поглощения и рассеяния света любую, сколь угодно сложную (неоднородную) фазовую пластинку можно описать с помощью трех поляризационных параметров, которые полностью характеризуют собственные поляризационные моды этой фазовой пластинки [5].

1. Двулучепреломление  $\beta$  (размерность  $\text{rad/m}$ ), в общем случае эллиптическое. При этом разность фаз излучения, прошедшего по медленной и быстрой осям фазовой пластинки, составляет  $\delta = \beta l$ , где  $l$  — толщина фазовой пластинки.

2. Параметр  $\chi$  (безразмерная величина).  $\chi = \arctg(b/a)$ , где  $a$  и  $b$  — большая и малая оси эллипса поляризации собственных поляризационных мод фазовой пластинки [6,7]. Для линейной фазовой пластинки  $\chi = 0$ , для право- или левоциркулярной фазовой пластинки  $\chi = \pm\pi/4$ . Под термином „эллиптичность“ принято понимать отношение  $b/a$ . Поскольку в процессе линейной трансформации локальных винтовых поляризационных мод Гинзбурга [8] (этот вопрос подробно рассмотрен в [9–12]) в ОВС с нерегулярным двулучепреломлением соотношение  $b/a$  сильно меняется, и, в частности, может возникнуть ситуация, когда длина малой оси эллипса собственной поляризации  $b$  становится большей ( $a$  — малой), и возникает возможность

$b/a \rightarrow \infty$ . Последнее затрудняет построение соответствующих графических изображений. Вследствие этого в [7] авторами было предложено использовать параметр  $\chi$ , поскольку всегда  $|\chi| \leq \pi/4$ . В [7] было предложено именовать именно параметр  $\chi$  эллиптичностью, и такую терминологию мы использовали в работах [1,2,7,13] и монографиях [14,15]. Очевидно, это может приводить к недоразумениям: как было отмечено выше, эллиптичностью принято именовать отношение  $b/a$ . Во избежание дальнейших недоразумений мы будем именовать параметр  $\chi$  „углом эллиптичности“. Величина  $\chi$  численно равна половине широты на сфере Пуанкаре [5,16] точки, отображающей состояние поляризации излучения с углом эллиптичности  $\chi$ . Поскольку широта  $2\omega$  на сфере Пуанкаре имеет размерность угла, то наименование  $\chi$  „углом эллиптичности“ следует считать корректным. Отметим, что впервые параметр  $\chi$  использовался в монографии [6], но в [6] параметр  $\chi$  никак не именовался.

3. Азимут  $\alpha$  большой оси эллипса (безразмерная величина). Для определенности будем полагать, что  $\alpha$  есть азимут большой оси эллипса медленной поляризационной моды. Поскольку здесь, как и в [1,2], мы рассматриваем ОВС без оптических потерь, то обе собственные поляризационные моды являются взаимно ортогональными, и, следовательно, азимут большой оси эллипса быстрой поляризационной моды равен  $\alpha + \pi/2$ .

Для случая системы из последовательности большого числа фазовых пластинок с различной собственной эллиптичностью, большие оси эллипсов которых различным образом ориентированы, определение величин  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  сложнее, они могут быть найдены через элементы суммарной (интегральной) матрицы Джонса [5], равной произведению матриц Джонса всей последовательности фазовых пластинок. Подчеркнем, что хотя мы говорим о суммарной матрице Джонса, это не сумма, а именно произведение матриц [17]. Параметры  $\beta_{\Sigma}^e$ ,  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$  характеризуют собственные интегральные поляризационные моды всей последовательности фазовых пластинок, но при этом мы уже не рассматриваем вопрос о том, каким образом меняется состояние поляризации излучения на входе и выходе каждой из пластинок.

Локальные параметры намотанного на катушку *strip*-световода непрерывно меняются существенным образом [1,2]. Но если взять достаточно короткий отрезок такого световода, то его можно описать некоторой локальной матрицей Джонса, параметры  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  которой практически постоянны на этом коротком отрезке. Тогда весь намотанный на катушку *strip*-световод можно так же, как и последовательность различных фазовых пластинок, описать суммарной матрицей Джонса [5], равной произведению всех локальных матриц Джонса. Далее, как это было сделано в [1,2] (см. выражение (18) работы [1]), можно найти значения эффективных интегральных поляризационных параметров  $\beta_{\Sigma}^e$ ,

$\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$  всего отрезка намотанного на катушку *spun*-световода. Вследствие этого мы именуем эти параметры интегральными параметрами, поскольку они описывают собственные поляризационные моды всего отрезка, а термин „эффективные параметры“ используем потому, что исключаем из рассмотрения процесс эволюции состояния поляризации при распространении излучения внутри ОВС. В дальнейшем, как правило, будем опускать термин „эффективные“.

Экспериментально параметры  $\beta_{\Sigma}^e$ ,  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$  могут быть найдены следующим образом. Для системы из последовательности большого числа различных фазовых пластинок с помощью оптического поляризационного компенсатора того или иного типа (например, регулируемого по толщине оптического клина из двух линейных фазовых пластинок в поворотном устройстве) можно подобрать на входе системы такую эллиптичность  $b/a$  (или, что то же самое, угол эллиптичности  $\chi$ ), азимут большой оси эллипса света, чтобы на выходе системы имели место точно такие же эллиптичность и азимут большой оси эллипса света. Для намотанного на катушку *spun*-световода в качестве поляризационного компенсатора удобнее всего использовать поляризационные контроллеры Лефевра [18,19], с помощью которых можно создавать произвольное состояние поляризации излучения в ОВС. Так же как и для системы из последовательности большого числа различных фазовых пластинок, на входе намотанного на катушку *spun*-световода можно подобрать такую эллиптичность и азимут большой оси эллипса света, чтобы на его выходе имели место точно такие же эллиптичность и азимут. Таким путем можно найти величины  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$ . Измеряя разность фаз излучения, прошедшего по медленной и быстрой осям,  $\delta_{\Sigma}^e$  и зная длину отрезка ОВС  $l$ , мы можем вычислить величину  $\beta_{\Sigma}^e = \delta_{\Sigma}^e/l$ .

Следует иметь в виду, что если изменить длину отрезка намотанного на катушку *spun*-световода  $l$  (например, немного укоротить его), то величины  $\beta_{\Sigma}^e$ ,  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$  могут кардинальным образом измениться. То же самое произойдет, если изменить температуру этого отрезка, поскольку при этом изменится не только длина отрезка, но и его невозмущенное линейное двулучепреломление  $\beta_0$ . Отметим, что хотя коэффициент термического расширения (КТР) кварца, из которого изготавливаются ОВС для оптического и ближнего ИК диапазонов, очень мал, наличие защитного покрытия (жакета) ОВС может увеличить КТР ОВС на 2–3 порядка [20]. Изменение длины волны света  $\lambda$  также приведет к изменению параметров  $\beta_{\Sigma}^e$ ,  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$ . Следовательно, эффективные интегральные поляризационные параметры постоянны при постоянных длине и температуре намотанного на катушку *spun*-световода, а также при постоянной длине волны света.

Рассмотрим вопрос о том, есть ли какие-либо принципиальные особенности в определении параметров  $\beta_{\Sigma}^e$ ,  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$  намотанных на катушку *spun*-световодов и классических параметров  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  обычных ОВС с

линейным двулучепреломлением. Параметры  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  не зависят от длины обычного ОВС с линейным двулучепреломлением, но  $\beta$  и  $\chi$  зависят от температуры и длины волны света. Однако, как показано в [4], в реальных ОВС с линейным двулучепреломлением имеют место случайные неоднородности — главным образом, это небольшие случайные кручения азимута  $\alpha$ , возникающие в процессе вытяжки ОВС из заготовки. В этом случае все параметры  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  ОВС с линейным двулучепреломлением зависят от длины ОВС, температуры и длины волны света. Таким образом, между эффективными интегральными параметрами  $\beta_{\Sigma}^e$ ,  $\chi_{\Sigma}^e$  и  $\alpha_{\Sigma}^e$  намотанных на катушку *spun*-световодов и параметрами  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$  обычных ОВС с линейным двулучепреломлением и случайными неоднородностями нет принципиального различия: в обоих случаях имеет место линейная трансформация (линейное взаимодействие) локальных ортогональных поляризационных мод [9,10], сопровождающаяся периодической перекачкой энергии из одной моды в другую. Но для обычных ОВС с сильным линейным двулучепреломлением и случайными неоднородностями эта периодическая перекачка энергии из одной моды в другую относительно невелика и описывается некоторыми статистическими закономерностями [4,14,15]. В этом случае можно считать, что собственные поляризационные моды имеют практически взаимно ортогональную линейную поляризацию, а случайные неоднородности приводят к незначительным поправкам [4,14,15], которые могут рассматриваться как малые возмущения параметров  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\alpha$ . Для намотанных на катушку *spun*-световодов линейная трансформация локальных ортогональных поляризационных мод существенно более сложный (с точки зрения математического описания) процесс, чем для обычных ОВС с линейным двулучепреломлением и случайными неоднородностями. В этом случае собственные интегральные поляризационные моды и соответственно их эффективные интегральные параметры меняются весьма значительно [1].

Как показано в [1], азимут большой оси эллипса собственной интегральной поляризационной моды  $\alpha_{\Sigma}^e$  меняется с длиной намотанных на катушку *spun*-световодов  $z$  квазипериодически по закону, напоминающему пилообразный (рис. 2, *b* и рис. 3, *b* работы [1]). Однако более внимательное рассмотрение показало, что имеют место некоторые отклонения от данного закона, и, кроме того, параметры зависимости  $\alpha_{\Sigma}^e(z)$  существенно различаются для различных коротких пространственных периодов. По этой причине приближенное аналитическое описание зависимости  $\alpha_{\Sigma}^e(z)$  не представляется возможным. Соответствующие аналитические зависимости могут быть получены после приближенного решения дифференциального уравнения Риккати для  $\alpha_{\Sigma}^e(z)$ . В данной работе будут рассмотрены приближенные аналитические описания зависимостей  $\beta_{\Sigma}^e(z)$  и  $\chi_{\Sigma}^e(z)$ .

№	$R_{coil}$ , mm	$L_b$ , mm	$L_{tw}$ , mm	$L_{coil}$ , m	$\beta_0$ , rad/m	$\beta_{tw}$ , rad/m	$\beta_{coil}$ , rad/m	$\Delta n_0$	$\Delta n_{tw}$	$\Delta n_{coil}$
1	36	15	7.5	3.8275	418.879	837.76	1.6416	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-7}$
2	20	15	7.5	1.1813	418.879	837.76	5.3188	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$
3	15	15	7.5	0.6645	418.879	837.76	9.4556	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-6}$
4	10	15	7.5	0.2953	418.879	837.76	21.275	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$5.25 \cdot 10^{-6}$
5	36	15	2.5	3.8275	418.879	2513.3	1.6416	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-7}$
6	20	15	2.5	1.1813	418.879	2513.3	5.3188	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$
7	15	15	2.5	0.6645	418.879	2513.3	9.4556	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-6}$
8	10	15	2.5	0.2953	418.879	2513.3	21.275	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$5.25 \cdot 10^{-6}$
9	36	5	7.5	3.8275	1256.64	837.76	1.6416	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-7}$
10	20	5	7.5	1.1813	1256.64	837.76	5.3188	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$
11	15	5	7.5	0.6645	1256.64	837.76	9.4556	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-6}$
12	10	5	7.5	0.2953	1256.64	837.76	21.275	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$5.25 \cdot 10^{-6}$
13	36	5	2.5	3.8275	1256.64	2513.3	1.6416	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-7}$
14	20	5	2.5	1.1813	1256.64	2513.3	5.3188	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-6}$
15	15	5	2.5	0.6645	1256.64	2513.3	9.4556	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-6}$
16	10	5	2.5	0.2953	1256.64	2513.3	21.275	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$	$5.25 \cdot 10^{-6}$

### 3. Характерные параметры *srpn*-световодов

При расчетах, как и в [1], длина волны света составляла  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ , внешний диаметр световода (без учета толщины защитного жакета) составлял  $D_f = 125 \mu\text{m}$ .

В таблице приводятся различные параметры *srpn*-световодов, которые рассматриваются в данной работе: значение невозмущенного линейного двулучепреломления  $\beta_0$ , длина  $L_{tw}$ , на которой кручение световода составляет  $2\pi$ , и радиус намотки на катушку  $R_{coil}$ . В таблице приводятся также соответствующие значениям  $\beta_0$  длины поляризационных биений  $L_b$  и разности показателей невозмущенного (исходного) линейного преломления в медленной и быстрой осях *srpn*-световодов  $\Delta n_0$ . Кроме того, в таблице приводятся соответствующие значениям  $L_{tw}$  величины обусловленного кручением циркулярного двулучепреломления  $\beta_{tw}$  и разности показателей циркулярного преломления  $\Delta n_{tw}$ , а также соответствующие значениям  $R_{coil}$  значения обусловленного намоткой линейного двулучепреломления  $\beta_{coil}$  и разности показателей линейного преломления в медленной и быстрой осях  $\Delta n_{coil}$ . Напомним [1,14,15,18,19], что

$$L_{0,coil,tw} = \frac{2\pi}{\beta_{0,coil,tw}}, \tag{1}$$

$$\beta_{0,coil,tw} = \frac{2\pi\Delta n_{0,coil,tw}}{\lambda}, \tag{2}$$

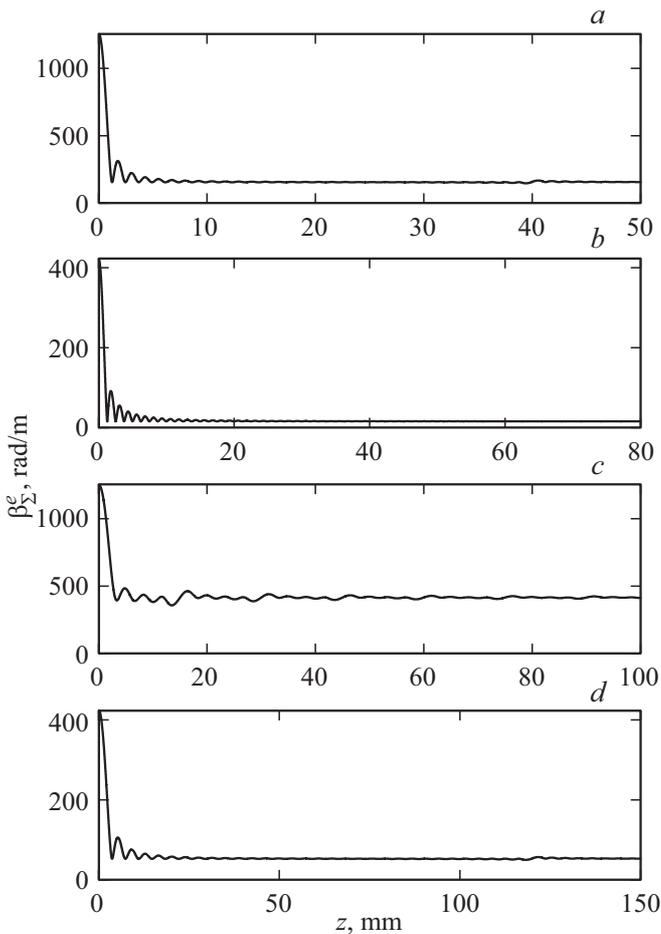
$$\Delta n_{coil} = 1.33 \left( \frac{D_f}{D_{coil}} \right)^2, \tag{3}$$

где  $D_{coil} = 2R_{coil}$ .

В данной работе рассматриваются *srpn*-световоды с шестнадцатью различными наборами параметров, что позволит получить приближенное аналитическое представление зависимости коэффициентов линейной трансформации взаимно ортогональных поляризационных мод, т.е. зависимости характеристик интегральных поляризационных мод *srpn*-световода от длины световода. Интегральные поляризационные моды описываются эллиптическим двулучепреломлением  $\beta_\Sigma^e$  и углом эллиптичности  $\chi_\Sigma^e$ . Аналитические зависимости именно этих характеристик от длины *srpn*-световодов  $z$  и будут получены.

### 4. Зависимость интегрального эллиптического двулучепреломления взаимно ортогональных поляризационных мод *srpn*-световода от его длины

Расчеты показали, что зависимость интегрального эллиптического двулучепреломления  $\beta_\Sigma^e$  от длины  $z$  намотанных на катушку *srpn*-световодов достаточно быстро выходит на свое предельное значение, причем



**Рис. 1.** Зависимости интегрального эллиптического двулучепреломления  $\beta_{\Sigma}^e$  от длины srup-световода  $z$ . Параметры srup-световода:  $R_{\text{coil}} = 36$  mm; (a)  $L_b = 5$  mm,  $L_{\text{tw}} = 2.5$  mm; (b)  $L_b = 15$  mm,  $L_{\text{tw}} = 2.5$  mm; (c)  $L_b = 5$  mm,  $L_{\text{tw}} = 7.5$  mm; (d)  $L_b = 15$  mm,  $L_{\text{tw}} = 7.5$  mm.

величина  $\lim_{z \rightarrow \infty} \beta_{\Sigma}^e(z)$  зависит от значений  $\beta_0$  и  $\beta_{\text{tw}}$ , но практически не зависит от  $R_{\text{coil}}$  (что проверялось изменением значения  $R_{\text{coil}}$  в 3.6 раза). Последнее согласуется с результатами [1], где было показано, что для различных радиусов намотки  $R_{\text{coil}}$  зависимости интегральных параметров качественно весьма похожи при незначительном количественном отличии. Вследствие этого в дальнейшем мы будем рассматривать результаты численного моделирования только для одного значения радиуса намотки.

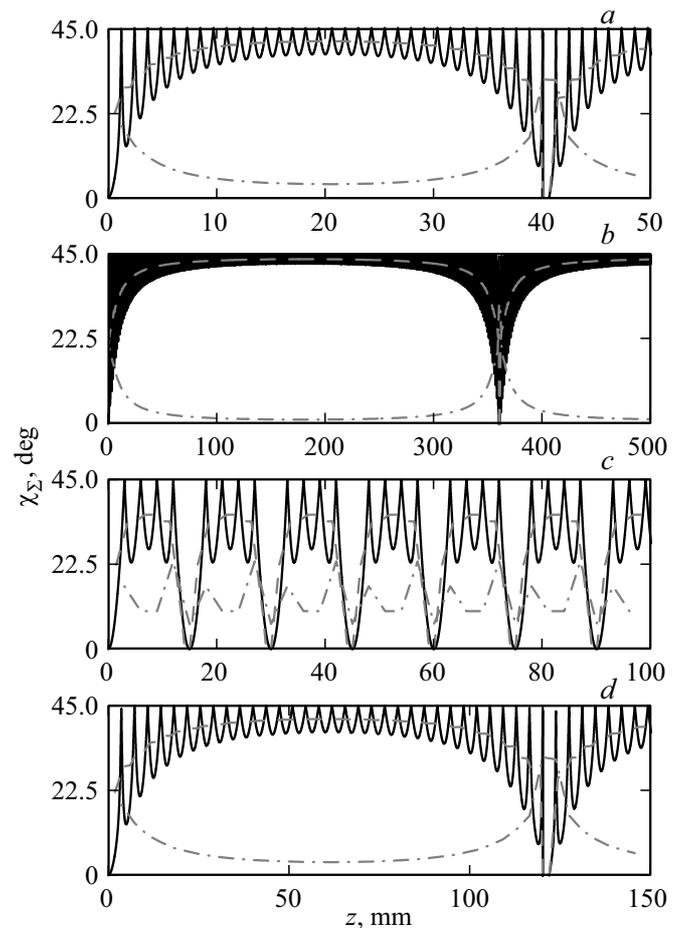
На рис. 1 приводятся полученные с помощью численного моделирования зависимости интегрального эллиптического двулучепреломления  $\beta_{\Sigma}^e(z)$  для случая, когда радиус намотки srup-световода  $R_{\text{coil}} = 36$  mm. Значения длин  $L_b$  и  $L_{\text{tw}}$  составляли соответственно 5 и 2.5 mm для рис. 1, a, 15 и 2.5 mm для рис. 1, b, 5 и 7.5 mm для рис. 1, c и 15 и 7.5 mm для рис. 1, d. Из рис. 1 видно, что  $\beta_{\Sigma}^e(z)$  вначале испытывает резкий экспоненциальный спад, а затем с некоторыми затухающими

осцилляциями выходит на свое предельное значение  $\lim_{z \rightarrow \infty} \beta_{\Sigma}^e(z)$ . В принципе, из рис. 1 можно было бы найти показатель экспоненты, пространственный период осцилляций и декремент затухания этих осцилляций. Но в этом нет никакой практической необходимости: экспоненциальный спад зависимости  $\beta_{\Sigma}^e(z)$  происходит на длинах порядка 3–5 mm намотанного на катушку srup-световода, а осцилляции спадают на длинах порядка 20–30 mm. Таким образом, даже если длина srup-световода датчика некоторого физического параметра составляет всего 1 m, то указанные процессы не отразятся на его поляризационных характеристиках.

Аппроксимация численных расчетов дает следующее выражение для величины:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \beta_{\Sigma}^e(z) \approx 0.25 \frac{\beta_0^2}{\beta_{\text{tw}}}. \quad (4)$$

Таким образом, для определения интегрального эллиптического двулучепреломления  $\beta_{\Sigma}^e(z)$  на реальных длинах намотанного на катушку srup-световода можно



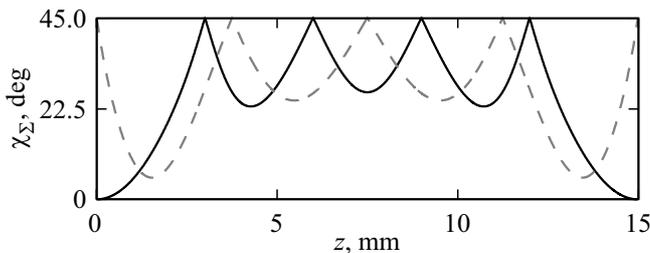
**Рис. 2.** Зависимости угла интегральной эллиптичности  $\chi_{\Sigma}^e$  собственных поляризационных мод (сплошная линия), ее постоянной составляющей  $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}$  (штриховые линии) и амплитуды ее осцилляций  $\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}$  (штрихпунктирные линии) от длины srup-световода  $z$ . Параметры srup-световода те же, что на рис. 1.

использовать его предельное значение, которое вычисляется с помощью выражения (4). Кроме того, из (4) видно, что предельное значение интегрального эллиптического двулучепреломления  $\lim_{z \rightarrow \infty} \beta_{\Sigma}^e(z)$  зависит не от значений  $\beta_0$  и  $\beta_{tw}$ , а от отношения  $\beta_0^2$  к  $\beta_{tw}$  и не зависит от  $\beta_{coil}$ . Разумеется, предельное значение интегрального эллиптического двулучепреломления может быть определено через отношение длин поляризационных биений  $L_{tw}$  и  $L_b$  (1).

### 5. Зависимость угла эффективной интегральной эллиптичности взаимно ортогональных поляризационных мод srip-световода от его длины

В этом разделе мы покажем, что в отличие от интегрального эллиптического двулучепреломления srip-световода  $\beta_{\Sigma}^e(z)$  угол интегральной эллиптичности собственных поляризационных мод  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  не стремится с увеличением длины световода к какому-либо предельному значению. Имеет место сложная квазипериодическая зависимость  $\chi_{\Sigma}^e$  от длины srip-световода  $z$ . Эта зависимость имеет два пространственных периода, длинный и короткий, причем амплитуда зависимости на длинном периоде остается постоянной, а амплитуда на коротком периоде зависит от длины на большом периоде.

На рис. 2 приводятся полученные с помощью численного моделирования зависимости угла интегральной эллиптичности взаимно ортогональных поляризационных мод  $\chi_{\Sigma}^e$  от длины srip-световода  $z$  для тех же параметров, что и на рис. 1. Эти зависимости изображены на рис. 2 сплошной линией. Видно, что величина  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  меняется периодически, причем имеется два пространственных периода, короткий и длинный. На рис. 2 приведены также зависимости постоянной составляющей угла интегральной эллиптичности ( $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ , штриховые линии) и амплитуды ее осцилляций ( $\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ , штрихпунктирные линии). Отметим, что короткие пространственные периоды кривой, представленной на рис. 2,  $b$ , настолько малы, что они не разрешаются.



**Рис. 3.** Зависимости угла интегральной эллиптичности  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  собственных поляризационных мод srip-световода с параметрами  $R_{coil} = 36$  mm,  $L_b = 5$  mm,  $L_{tw} = 7.5$  mm: расчетная (сплошная линия) и полученная по формуле (7) (штриховая линия).

Очевидно, что зависимости  $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$  и  $\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$  качественно очень похожи: функция  $\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$  есть инвертированная и сдвинутая по оси ординат функция  $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ . Таким образом, если найти функцию  $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ , то можно легко определить и функцию  $\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ . Примечательно, что зависимости  $\chi_{\Sigma}^e(z)$ , представленные на рис. 2,  $a, d$ , практически не различаются, несмотря на существенное различие соответствующих им параметров srip-световодов. Это можно объяснить тем, что для srip-световодов, которым соответствуют рис. 2,  $a, d$ , отношение  $L_b/L_{tw}$  одинаково. Это обстоятельство открывает возможность нахождения функций, аппроксимирующих зависимости  $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$  и  $\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ . Эти функции имеют вид

$$\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z) \approx a \left| \sin \frac{\pi z}{L_{long}^{\chi}} \right|^b, \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z) \approx \frac{\pi}{4} - \mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z).$$

причем параметры функции, аппроксимирующей  $\mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z)$ , следующим образом зависят от параметров srip-световода:

$$L_{long}^{\chi} \approx 4 \frac{L_b^2}{L_{tw}},$$

$$a \approx 0.68 (\log N)^{1/8},$$

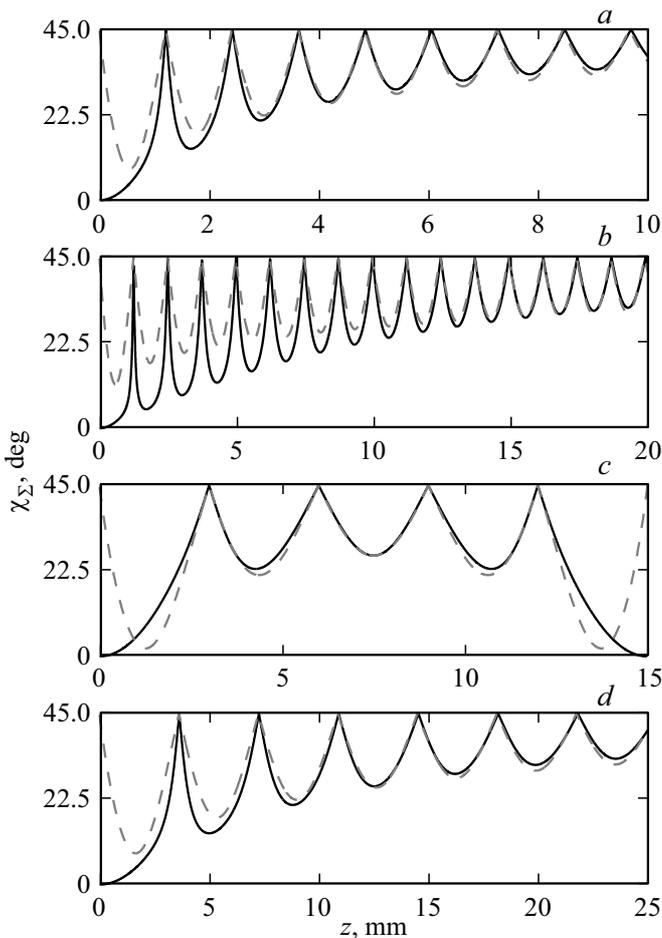
$$b \approx \frac{1}{2 \ln N}, \tag{6}$$

где  $N \approx 8(L_b/L_{tw})^2$  — количество коротких периодов, укладываемых на длине  $L_{long}^{\chi}$ . Кроме того, мы нашли приближенное выражение, описывающее длину короткого периода  $L_{short}^{\chi} = L_{long}^{\chi}/N \approx 0.5L_{tw}$ .

Используя выражения (5) и (6), можно предложить приближенную зависимость угла интегральной эллиптичности собственных поляризационных мод намотанных на катушку srip-световодов:

$$\chi_{\Sigma}^e(z) \approx \mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z) + 2\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z) \left( \frac{1}{2} - \left| \sin \frac{\pi z}{L_{short}^{\chi}} \right| \right). \tag{7}$$

На рис. 3 приводятся зависимости угла интегральной эллиптичности взаимно ортогональных поляризационных мод  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  для случая  $L_b = 5$  mm,  $L_{tw} = 7.5$  mm, полученные методом численного моделирования (сплошная линия, рис. 2,  $c$ ) и с помощью выражения (7) (пунктирная линия). Рисунок 3 демонстрирует, однако, что эта гипотеза не верна: между этими зависимостями нет полного совпадения. Причина этого заключается в том, что в начале и в конце длинных пространственных периодов  $L_{long}^{\chi}$  зависимости  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  значение коротких пространственных периодов  $L_{short}^{\chi}$  (а, точнее, полупериодов) фактически удваивается. Иными словами, длина двух коротких пространственных полупериодов в начале и в конце длинного периода  $L_{long}^{\chi}$  равна не  $0.5L_{short}^{\chi}$ , а  $L_{short}^{\chi}$ , а суммарная длина этих двух коротких полупериодов составляет не  $L_{short}^{\chi}$ , а  $2L_{short}^{\chi}$ . Соответственно длины



**Рис. 4.** Зависимости угла интегральной эллиптичности  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  собственных поляризационных мод *srpn*-световода: расчетная (сплошная линия) и полученная по формуле (7) (пунктирная линия). Параметры *srpn*-световода те же, что на рис. 1.

всех остальных коротких периодов, расположенных на средней части длинных периодов  $L_{\text{long}}^{\chi}$ , должны несколько уменьшиться, причем это уменьшение тем заметнее, чем меньше коротких пространственных периодов укладывается на длинном периоде, т. е. чем меньше  $N$ . Этот факт следует учесть при корректировке выражения (7).

## 6. Дальнейшее уточнение вида зависимости угла интегральной эллиптичности взаимно ортогональных поляризационных мод *srpn*-световода от его длины

Уточненная с учетом приведенных выше соображений зависимость угла интегральной эллиптичности  $\chi_{\Sigma}(z)$  собственных поляризационных мод намотанных на катушку *srpn*-световодов будет иметь вид

тушку *srpn*-световодов будет иметь вид

$$\chi_{\Sigma}(z) \approx \mathfrak{M}_{\chi_{\Sigma}^e}(z) + 2\mathfrak{A}_{\chi_{\Sigma}^e}(z) \left( \frac{1}{2} - \left| \sin \frac{\pi z}{mL_{\text{short}}^{\chi}} \right| \right), \quad (8)$$

где  $m$  — некоторый поправочный коэффициент, позволяющий учесть деформацию коротких пространственных периодов, который зависит от отношения длинного пространственного периода к короткому, но не зависит от длины  $z$ .

На рис. 4 приводятся зависимости угла интегральной эллиптичности  $\chi_{\Sigma}^e(z)$  взаимно ортогональных поляризационных мод, полученные методом численного моделирования (сплошная линия) и с помощью выражения (8) (штриховая линия). Для возможности визуального сравнения выражения (8) с результатами численного моделирования представлена только часть длинных пространственных периодов  $L_{\text{long}}^{\chi}$  вблизи начала координат. Из рис. 4 можно сделать вывод, что имеет место вполне удовлетворительное совпадение выражения (8) с результатами численного моделирования почти по всей протяженности длинных периодов, за исключением участков, соответствующих коротким полупериодам в начале и в конце длинного периода. Наилучшее совпадение имеет место в середине длинного периода. Значение поправочного коэффициента  $m$  для рис. 4, *a, d* составляет 0.985, для рис. 4, *b* — 0.995, для рис. 4, *c* — 0.8. По порядку величины  $m \sim 1 - 1/N$ .

Физическое объяснение заметного отличия поведения зависимостей  $\chi_{\Sigma}^e(z)$ , полученных из выражения (8) и методом численного моделирования, на коротких пространственных полупериодах в начале и в конце длинного периода может быть найдено после приближенного решения дифференциального уравнения Риккати для  $\chi_{\Sigma}(z)$ .

## 7. Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

1. Показано, что зависимость эффективного интегрального эллиптического двулучепреломления намотанного на катушку *srpn*-световода от его длины весьма быстро выходит на предельное значение и не испытывает двоякопериодичности. Предельное значение зависит от отношения невозмущенного намоткой линейного и квадрата обусловленного кручением *srpn*-световода циркулярных двулучепреломлений, но почти не зависит от радиуса катушки световода на катушку в практически значимой области.

2. Показано, что угол интегральной эллиптичности собственных поляризационных мод намотанного на катушку *srpn*-световода не имеет предельного значения. Имеет место сложная квазипериодическая (двоякопериодическая) зависимость, включающая два пространственных периода, длинный и короткий, причем амплитуда зависимости на большом периоде остается постоянной, а амплитуда на малом периоде зависит от длины.

3. Путем аппроксимации численных данных найдена приближенная аналитическая зависимость угла интегральной эллиптичности собственных поляризационных мод намотанного на катушку srip-световода от его длины, позволяющая описать проведенные численные эксперименты всюду, кроме незначительных участков в начале и конце большого пространственного периода.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность Вл.В. Кочаровскому за обсуждение рассматриваемой задачи, В.М. Геликонову за ряд полезных замечаний, позволивших существенно улучшить изложение результатов работы.

### Финансирование работы

Работа поддержана проектами по Государственному заданию № 0035-2019-0013 и № 0035-2018-0202.

### Список литературы

- [1] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 124. В. 3. С. 359.
- [2] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. В. 4. С. 522.
- [3] *Kamke E.* // Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig, 1959. Перевод: *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
- [4] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И., Шерешевский И.А.* // Опт. и спектр. 1997. Т. 83. № 5. С. 843.
- [5] *Shurcliff W.A.* Polarized light. Cambridge, Massachusetts: Harvard Univ. Press., 1962. 207 p. Перевод: *Шерклифф У.* // Поляризованный свет. М.: Мир, 1965. 264 с.
- [6] *Писарев Р.В.* Магнитное упорядочивание и оптические явления в кристаллах. В сб. „Физика магнитных диэлектриков“ / Под ред. Смоленского Г.А. Л.: Наука. 1974. С. 356.
- [7] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 89. № 1. С. 76.
- [8] *Гинзбург В.Л.* // ЖЭТФ. 1944. Т. 14. № 3. С. 181.
- [9] *Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В.* // УФН 1983. Т. 141. № 2. С. 257.
- [10] *Кочаровский Вл.В.* Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабоанизотропных средах. Автореферат канд. дис. Горький: ИПФ АН, 1985.
- [11] *Малыкин Г.Б.* // УФН. 2016. Т. 186. № 12. С. 1355.
- [12] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* // Опт. и спектр. 2017. Т. 122. № 1. С. 153.
- [13] *Малыкин Г.Б., Малыкин Э.Г., Позднякова В.И.* // Опт. и спектр. 2008. Т. 104. № 3. С. 463.
- [14] *Малыкин Г.Б., Позднякова В.И.* Поляризационные эффекты в кольцевых интерферометрах. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2008. 208 с.
- [15] *Malykin G.B., Pozdnyakova V.I.* Ring Interferometry. Berlin: De Gruyter, 2013. 320 p.
- [16] *Малыкин Г.Б.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1997. Т. 40. № 3. С. 265.
- [17] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
- [18] *Lefevre H.C.* // Electron. Lett. 1980. V. 16. N 20. P. 778.
- [19] *Lefevre H.* The Fiber-Optic Gyroscope. Boston-London: Artech House, 2014. 409 p.
- [20] *Брук М.Р., Кравцов Ю.А., Минченко А.И.* // Изв. АН. Сер. физ. 1986. Т. 50. № 6. С. 1167.