

05

К теории продольной магнитной восприимчивости квазитрехмерных ферромагнитных диэлектриков

© С.О. Гладков, С.Б. Богданова

Московский авиационный институт (государственный технический университет),
Москва, Россия

E-mail: sglad@newmail.ru, sonjaf@list.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 9 июня 2011 г.)

Найдена продольная магнитная восприимчивость легкоосных ферромагнетиков в квазитрехмерном случае. Ферромагнитная структура при этом считается фрактальным объектом с размерностью $D = 3 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Подход основан на использовании квазиклассического кинетического уравнения. Дисперсия магнонов, строго вычисленная с помощью операции дробного дифференцирования, оказывается сильно анизотропной (зависящей от параметра ε) функцией угловых переменных. Последнее приводит к нетривиальным частотным зависимостям магнитной восприимчивости.

Довольно часто многообразие физических явлений нельзя описать в рамках традиционной евклидовой геометрии. С помощью прямых, окружностей, сфер, тетраэдров невозможно описать форму береговой линии, геометрию деревьев, вязкие „языки“, образующиеся при вытеснении жидкости другой, обладающей меньшей вязкостью, процессы агрегации, осаждения и т.п.

Вместе с тем математические образы, выходящие за границы представлений о привычных геометрических фигурах, появились лишь во второй половине девятнадцатого века и были немедленно причислены к числу изгоев: это предложенные Вейерштрассом [1] и вандер-Варденом [2] непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке. Кривая Коха, кривые Пеано, всюду заполняющие квадрат, кривая (ковер или салфетка) Серпинского, занимающие промежуточное положение между линией и плоскостью, дополнили список объектов, которые после выхода фундаментальной работы [3] стали называться фракталами.

Основатель фрактальной геометрии Мандельброт определяет фрактал как [3] „множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого строго больше его топологической размерности“, или более узко „структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому“. Фракталы, удовлетворяющие последнему определению, называются самоподобными.

Что касается первого определения, то оно использует хорошо известное понятие топологической размерности и менее известное понятие размерности Хаусдорфа–Безиковича (фрактальной размерности). Размерность Хаусдорфа–Безиковича D множества по определению есть критическая размерность, при которой мера M_d множества изменяет свое значение с нуля не бесконечность [4],

$$M_d = \sum \gamma(d)\delta^d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d \rightarrow \begin{cases} 0, & d > D, \\ \infty, & d < D, \end{cases} \quad \delta \rightarrow 0,$$

где $\gamma(d)$ — некоторый коэффициент, δ — радиус элемента покрытия, $N(\delta)$ — количество элементов покрытия

множества. В случае самоподобных фракталов размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с размерностью подобия, определяемой следующим образом [4]: $D = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$, где N — наименьшее число элементов диаметра r , необходимых для покрытия множества.

Указанные выше классические фракталы являются самоподобными и обладают соответствующими фрактальными размерностями. Например, фрактальная размерность канторовой пыли равна $D \approx 0.63$, а для кривой Коха она составляет $D \approx 1.26$. При этом топологическая размерность первого множества равна нулю, а второго — единице.

Вообще, если топологическая размерность D_T обязательно является только целым числом ($D_T = -1, 0, 1, 2, \dots$), то фрактальная размерность D может принимать любое значение.

Случай, когда фрактальная размерность является целым числом, в частности $D = 2$, приводит к так называемым кривым Пеано, т.е. кривым, всюду заполняющим плоскость.

Множества, у которых $D_T = 2$ и $2 < D < 3$, образуют фрактальные поверхности, описание и способ построения которых можно найти в [4].

Впервые физические фракталы проявили себя в работах по исследованию броуновского движения, где траектория броуновской частицы рассматривается как функция без производной, а основным геометрическим масштабом является длина свободного пробега частицы.

Этот пример полностью определяет отличие „идеального математического“ фрактала (в котором присутствуют все возможные масштабы, когда размер излома строящейся линии становится сколь угодно малым) от реального геометрического фрактального объекта, обладающего физическими свойствами.

В подобных объектах (физических) величина фрактального излома линии (или размер неоднородностей фрактальной кривой или поверхности) должна быть по крайней мере больше или порядка межатомного расстояния [5].

Такое вполне естественное ограничение, касающееся конечности размера фрактала, позволяет ввести понятие о естественной границе тела, без которого невозможно сформулировать физическую постановку задачи.

В настоящей работе рассматривается возможность вычисления продольной магнитной восприимчивости некоторого фрактального ферромагнитного объекта, обладающего выделенной осевой симметрией (например, типа елки), для которого скейлинговое ограничение (изломы кривых) должно быть больше или порядка длины свободного пробега магнона.

В этом смысле совершенно понятно, что длина подобного фрактала и является хотя и весьма большой, но ограниченной (в отличие от чисто математического, длина которого бесконечна).

Итак, цель настоящей работы — вычислить продольную составляющую тензора магнитной восприимчивости [6] $\chi_{ik} = \frac{\partial M_i}{\partial h_k}$ фрактального ферромагнитного диэлектрика.

Переменное магнитное поле направим вдоль выделенной оси симметрии z и положим $\mathbf{h}(t) = (0; 0; h_z(t))$, где линейно поляризованная напряженность радиочастотного (РЧ) поля есть $h_z(t) = h_0 e^{-i\omega t}$, h_0 — его амплитуда, ω — частота.

Для решения поставленной задачи воспользуемся квазиклассическим подходом, считая выполненным условие $kl \gg 1$, где k — волновой вектор магнона, а l — длина его свободного пробега.

Поэтому, согласно определению (см., например, [7–9]), имеем

$$\chi_{zz} = \frac{\partial M_z}{\partial h_z} = -\frac{\mu_e}{a^3} V_\varepsilon \frac{\partial}{\partial h_z} \int f_k \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (1)$$

где f_k — функция распределения магнонов, $f_k = f_0 + \delta f$, $f_0 = \frac{1}{e^{\frac{E_k(t,\varepsilon)}{T_0}} - 1}$ — равновесная бозевская

функция распределения магнонов, где T_0 — температура термостата, а $f_k = \frac{1}{e^{\frac{E_k(t,\varepsilon)}{T}} - 1}$ — квазиравновесная

функция распределения, a — межатомное расстояние, μ_e — элементарный магнитный момент электрона, V_ε — фрактальный объем магнетика, $E_k(t, \varepsilon)$ — энергия магнона в переменном РЧ-поле, зависящая от времени, волнового вектора магнона \mathbf{k} и параметра фрактальной размерности ε . Вычисление $E_k(t, \varepsilon)$ приводится далее. Постоянная Больцмана полагается равной единице.

Поскольку в переменном магнитном поле температура магнонов изменяется (происходит их разогрев), отклонение функции распределения магнонов от равновесного значения можно представить в виде

$$\delta f = \frac{\partial f_0}{\partial T_0} \delta T, \quad (2)$$

где разность температур $\delta T = T - T_0$ предстоит вычислить.

Для вычисления δT можно воспользоваться кинетическим уравнением, которое с учетом интеграла столкновений сразу представим в тау-приближении,

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} = -\frac{\delta f}{\tau_k}, \quad (3)$$

где τ_k — время релаксации магнона.

Энергию магнона (см., например, [9–11]) с учетом внешнего переменного поля запишем в виде

$$E_k(t, \varepsilon) = E_k(\varepsilon) + \mu_e h_z(t). \quad (4)$$

Подстановка (4) и (2) в уравнение (3) с учетом квазиравновесной функции распределения приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\partial f_0}{\partial T_0} \delta \dot{T} + \frac{\partial f_0}{\partial E_k(\varepsilon)} \mu_e \dot{h}_z = -\frac{\partial f_0}{\partial T_0} \frac{\delta T}{\tau_k(\varepsilon)}. \quad (5)$$

Поскольку $\frac{\partial f_0}{\partial E_k} = -\frac{T_0}{E_k(\varepsilon)} \frac{\partial f_0}{\partial T_0}$, отсюда имеем

$$\delta \dot{T} + \frac{\delta T}{\tau_k(\varepsilon)} = \frac{\mu_e \dot{h}_z}{E_k(\varepsilon)} T_0. \quad (6)$$

Для получения правильного решения уравнения (6) его следует предварительно усреднить по волновым векторам магнона. С этой целью нужно обе части данного уравнения умножить на равновесную функцию распределения f_0 и проинтегрировать по всем \mathbf{k} . Поскольку главный вклад в интеграл, содержащий экспоненциальную функцию, вносит область значений волновых векторов $E_k(\varepsilon) \sim T_0$, с точностью до численного коэффициента уравнение (6) примет вид

$$\delta \dot{T} + \frac{\delta T}{\bar{\tau}(\varepsilon)} \approx \mu_e \dot{h}_z, \quad (7)$$

где $\bar{\tau}(\varepsilon)$ — среднее время релаксации магнона.

Отсюда сразу следует искомое решение

$$\delta T = \frac{i\omega \mu_e h_z \bar{\tau}(\varepsilon)}{1 - i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)}. \quad (8)$$

Подстановка функции распределения $f_k = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial T_0} \delta T$ с учетом (8) в выражение (1) приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \chi_{zz} &= -\frac{\mu_e}{a^3} V_\varepsilon \frac{\partial}{\partial h_z} \int \delta f \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = -\frac{\mu_e}{a^3} V_\varepsilon \frac{\partial \delta T}{\partial h_z} \\ &\times \int \frac{\partial f_0}{\partial T_0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = -\frac{\mu_e^2 V_\varepsilon}{(2\pi a)^3} \frac{i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)}{1 - i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial T_0} \int \frac{d^3 k}{e^{\frac{E_k(\varepsilon)}{T_0}} - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь осталось вычислить только зависимость $E_k(\varepsilon)$. Для упрощения оценок будем предполагать, что симметрия кристалла обладает кубической сингонией, поэтому можно воспользоваться следующим феноменологическим выражением для гамильтониана магнитного

ферродиелектрика [7,9]:

$$H_0 = \int_V \left[\frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right)^2 - \mathbf{M}\mathbf{H} - \frac{\beta}{2} \mathbf{M}^2 \right] dV, \quad (10)$$

где α — обменный интеграл, β — константа магнитной анизотропии.

Фрактальность ферромагнетика, когда характерные геометрические масштабы определяются неравенством $\delta x > l$, делает невозможным дифференцирование по пространственным координатам вычисляемой функции (напомним, что речь идет о вычислении изменения температуры при воздействии РЧ-поля на ферромагнетик), поэтому вычисление гамильтониана (10) следует провести с учетом данного факта.

Это означает, что оператор обычного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_i}$, фигурирующий в (10), должен быть формально заменен на другой оператор, роль которого в нашем случае должен играть оператор дробного дифференцирования A_i (где $i = x, y, z$), введенный в работах [12,13] с помощью Фурье-преобразования,

$$A_x f(\mathbf{r}) = \int_V i k_x^{1-\varepsilon} f_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 k. \quad (11)$$

Заметим, что действие оператора A_i на некоторую функцию $f(x, y, z)$ при $\varepsilon = 0$ совпадает с оператором обычного дифференцирования.

Замена частной производной в гамильтониане (10) на оператор дробного дифференцирования (11), который действует на проекции магнитного момента $\mathbf{M} = (M_x; M_y; M_z)$, где $M_x = \frac{M^+ + M^-}{2}$, $M_y = \frac{M^+ - M^-}{2i}$, позволяет переписать первое слагаемое в (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right)^2 &\Rightarrow (A_i \mathbf{M})^2 \\ &= \frac{A M^+ \cdot A M^-}{2} + \frac{A M^- \cdot A M^+}{2} + (A M_z)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для дальнейших преобразований удобно воспользоваться методом вторичного квантования [14]. В приложении к магнитным структурам подобная операция осуществляется благодаря использованию преобразований Гольдштейна–Примакова [7,9,15]

$$\begin{aligned} M^+ &= M_0 \left(1 - \frac{a^+ a}{2S} \right)^{\frac{1}{2}} a^+, \\ M^- &= M_0 a \left(1 - \frac{a^+ a}{2S} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ M_z &= M_0 (2S - a^+ a). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь S — спин магнитного атома кристаллической решетки.

При больших значениях S формулы (13) линеаризуются по операторам рождения a^+ и уничтожения a

спиновых отклонений и после перехода в k -пространство с помощью Фурье-разложения, согласно которому

$$a^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k^+ e_0^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (14)$$

$$a(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k e_0^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (15)$$

(N — число узлов кристаллической решетки), гамильтониан (10) с учетом (11)–(15) приводит к следующему выражению для основного гамильтониана фрактального ферромагнетика:

$$H_0 = \frac{1}{N} \sum_k E_k(\varepsilon) a_k^+ a_k, \quad (16)$$

где искомая энергия магнона фрактальной структуры является сильно анизотропной по угловым переменным и имеет вид

$$E_k(\varepsilon) = \alpha_\varepsilon M_0^2 (k_x^{2-2\varepsilon} + k_y^{2-2\varepsilon} + k_z^{2-2\varepsilon}) + \mu_\varepsilon (H_0 + \beta M_0). \quad (17)$$

Здесь следует отметить, что обменная константа α_ε учитывает меру, обеспечивающую правильную размерность первого слагаемого, а ее связь с обменным интегралом дается выражением

$$\alpha_\varepsilon = \frac{J_{\text{ex}}}{M_0^2} a^{2-2\varepsilon}, \quad (18)$$

где J_{ex} — обменный интеграл.

При подстановке (17) в (9) удобно перейти к сферическим координатам: $k_x = k \sin \theta \cos \varphi$, $k_y = k \sin \theta \sin \varphi$, $k_z = k \cos \theta$.

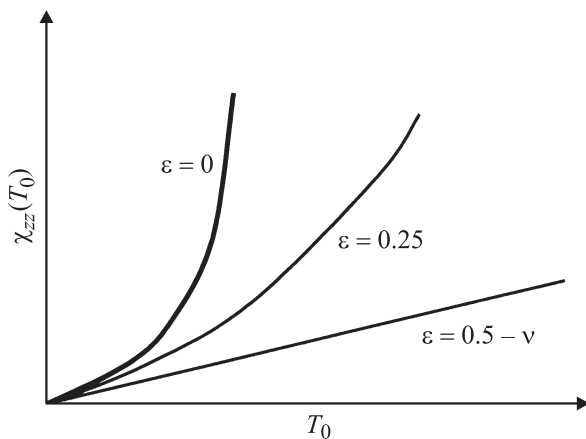
В результате с учетом (18) получим

$$\begin{aligned} \chi_{zz}(\omega) &= -\frac{\mu_\varepsilon^2 V_\varepsilon}{(2\pi a^{1-\varepsilon})^3 N} \frac{i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)}{1 - i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial T_0} \int \frac{d^3 k}{e^{\frac{E_k(\varepsilon)}{T_0}} - 1} \\ &= \frac{3\mu_\varepsilon^2 V_\varepsilon}{2(2\pi a^{1-\varepsilon}) N} \frac{i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)}{1 - i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)} \frac{\Gamma\left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon-2}\right)}{(1-\varepsilon)^2} e^{-\frac{\mu_\varepsilon(H_0 + \beta M_0)}{T_0}} \\ &\quad \times \left(\frac{T_0}{J_{\text{ex}}} \right)^{\frac{3}{2(1-\varepsilon)}} \zeta \left(\frac{3}{2(1-\varepsilon)} \right) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g^{\frac{3}{2(1-\varepsilon)}}(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

где функция $g(\varphi, \theta) = \sin^{2-2\varepsilon} \theta \cos^{2-2\varepsilon} \varphi + \sin^{2-2\varepsilon} \theta \times \sin^{2-2\varepsilon} \varphi + \cos^{2-2\varepsilon} \theta$. Формула (19) выражает зависимость продольной магнитной восприимчивости фрактального ферромагнитного диэлектрика от температуры и частоты приложенного РЧ-поля.

Заметим, что, поскольку $V_\varepsilon = N a^3 (1-\varepsilon)$, результат (19) можно представить в еще более компактном виде

$$\begin{aligned} \chi_{zz} &= \frac{3\mu_\varepsilon^2}{2(2\pi)^3} \frac{i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)}{1 - i\omega \bar{\tau}(\varepsilon)} \frac{\Gamma\left(\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon-2}\right)}{(1-\varepsilon)^2} e^{-\frac{\mu_\varepsilon(H_0 + \beta M_0)}{T_0}} \\ &\quad \times \left(\frac{T_0}{J_{\text{ex}}} \right)^{\frac{3}{2(1-\varepsilon)}} \zeta \left(\frac{3}{2(1-\varepsilon)} \right) D_\varepsilon, \end{aligned} \quad (20)$$



Схематическая зависимость продольной магнитной восприимчивости фрактального ферродиелектрика при различных значениях параметра фрактальности ϵ . Температурная зависимость обычного ферромагнетика ($\epsilon = 0$) качественно сильно отличается от полностью вырожденного фрактального объекта ($\epsilon = 0.5 - \nu$, где $\nu \ll 1$).

где двойной интеграл по угловым переменным

$$D_\epsilon = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g^{\frac{3}{2(\epsilon-1)}}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (21)$$

Отсюда, в частности, видно, что при $\epsilon = 0$ получается стандартное выражение для продольной восприимчивости, когда $\chi_{zz} \sim \left(\frac{T}{J_{ex}}\right)^{\frac{3}{2}}$ (см. [9]). Если теперь рассмотреть второй предельный случай ($\epsilon = 0.5$), то получим, что $\chi_{zz} = 0$, поскольку интеграл от функции g обращается в нуль. Во всяком случае видно, что вблизи значения $\epsilon = 0.5 - \nu$, где ν — малая величина, температурная зависимость восприимчивости будет близка к T^3 , что соответствует линейному спектру магнонов. В действительности линейный спектр магнонов существует только в антиферромагнетиках (при особых предположениях), но не в ферромагнетиках. Именно поэтому подобное поведение восприимчивости характерно только во фрактальном объекте.

Заметим, что этот результат является весьма важным, поскольку указывает на возможность вырождения (при некоторых значениях ϵ) магнонного квадратичного спектра в почти линейный, что невозможно наблюдать в обычном ферродиелектрике.

На рисунке показано несколько температурных зависимостей продольной восприимчивости при различных значениях ϵ .

В заключение сформулируем основные полученные результаты.

1. Построена теория продольной магнитной восприимчивости фрактального ферромагнетика и найдены ее частотная и температурная зависимости.

2. Предсказано, что в подобных структурах (например, типа елки) спектр магнонов в масштабе всей фигуры

будет сильно отличаться (при некоторых значениях параметра фрактальности ϵ) от соответствующего спектра обычного ферромагнетика, о чем свидетельствует рисунок.

Список литературы

- [1] Я.Б. Зельдович, Д.Д. Соколов. УФН **146**, 3, 493 (1985).
- [2] П.С. Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. ОГИЗ, М. (1948). 411 с.
- [3] Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. Ин-т компьютерных исследований, М. (2002). 656 с.
- [4] Е. Федер. Фракталы. Мир, М. (1991). 254 с.
- [5] С.О. Гладков. Докл. РАН **408**, 2, 182 (2006).
- [6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. Наука, М. (1986). Т. 8. 620 с.
- [7] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. Спиновые волны. Наука, М. (1967). 368 с.
- [8] И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов. Электронная теория металлов. Наука, М. (1971). 415 с.
- [9] S.O. Gladkov. Phys. Rep. **182**, 4-5, 211 (1989).
- [10] С.О. Гладков. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. Наука, М. (1999). 330 с.
- [11] С.О. Гладков. ЖТФ **67**, 7, 8 (1997).
- [12] С.О. Гладков. ЖТФ **71**, 11, 130 (2001).
- [13] S.O. Gladkov, S.B. Bogdanova. Physica B **405**, 1975 (2010).
- [14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Наука, М. (1986). Т. 3. 750 с.
- [15] С.В. Тябликов. Методы квантовой теории магнетизма. Наука, М. (1974). 527 с.