

## Теория ленточной антенны, расположенной на плоской границе раздела одноосного магнитного метаматериала и изотропной среды

© Т.М. Заборонкова,<sup>1,2</sup> А.С. Зайцева,<sup>1</sup> А.В. Кудрин,<sup>1</sup> Н.В. Юрасова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород

<sup>2</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева, 603950 Нижний Новгород, Россия  
e-mail: kud@rf.unn.ru

Поступило в Редакцию 21 февраля 2019 г.

В окончательной редакции 2 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 апреля 2019 г.

Исследованы электродинамические характеристики антенны, представляющей собой бесконечно тонкую, идеально проводящую узкую ленту, размещенную на плоской границе раздела одноосного магнитного метаматериала и изотропной магнитоэлектрической среды. Антенна расположена перпендикулярно оси анизотропии метаматериала и возбуждается гармонической во времени стороной ЭДС. Получены сингулярные интегральные уравнения для тока антенны в случае ленточного проводника бесконечной длины. На основании решения этих уравнений найдены и проанализированы распределение тока и входной импеданс антенны. Установлены условия применимости приближенного метода длинных линий для определения характеристик антенны. В рамках этого метода полученные результаты обобщены на случай ленточной антенны конечной длины.

**Ключевые слова:** магнитный метаматериал, ленточная антенна, распределение тока, входной импеданс.

DOI: 10.21883/JTF.2019.10.48179.82-18

### Введение

Исследования последних лет в области электродинамики искусственных сред продемонстрировали возможность создания метаматериалов с уникальными свойствами, недостижимыми в случае обычных сред [1–3]. В связи с этим метаматериалы представляют фундаментальный интерес, а также имеют широкие перспективы практического использования. Как правило, метаматериалы состоят из периодических расположенных миниатюрных резонансных металлических элементов, размещенных в диэлектрике. В частности, для изготовления магнитных метаматериалов используются металлические расщепленные кольца (split-ring resonators), которые могут рассматриваться как LC-резонаторы. В общем случае магнитные метаматериалы описываются скалярной диэлектрической проницаемостью и тензором магнитной проницаемости. В свою очередь, диагональные компоненты данного тензора могут иметь одинаковые или противоположные знаки в зависимости от частоты [4]. В последнем случае метаматериал называют гиперболическим, поскольку поверхность показателя преломления одной из нормальных волн такой среды имеет форму гиперболоида. Следует ожидать, что металлические антенны, работающие при наличии анизотропных метаматериалов, имеют различные электродинамические характеристики в зависимости от свойств таких искусственных сред и могут сильно отличаться от соответствующих характеристик в случае размещения тех же антенн в изотропных средах.

В настоящей работе на основе метода интегральных уравнений решается модельная задача о распределении тока и входном импедансе ленточной антенны, расположенной перпендикулярно оси анизотропии на плоской границе раздела одноосного магнитного метаматериала и изотропной магнитоэлектрической среды. Рассматриваются два случая анизотропной магнитной среды, когда она является гиперболической (резонансной) либо нерезонансной.

### 1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим ориентированную вдоль оси  $x$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$  бесконечно длинную антенну в виде идеально проводящей, бесконечно тонкой узкой ленты, имеющей ширину  $2d$  и расположенной в плоскости  $xz$  (рис. 1). Предполагается, что данная плоскость является границей раздела изотропной магнитоэлектрической среды и одноосного магнитного метаматериала, ось анизотропии которого направлена вдоль координатной оси  $z$ . Изотропная среда, заполняющая полупространство  $y > 0$ , является однородной и имеет скалярные диэлектрическую и магнитную проницаемости  $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon$  и  $\tilde{\mu} = \mu_0 \mu$  соответственно (здесь  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\mu_0$  — магнитная постоянная). В случае, когда среда в области  $y > 0$  представляет собой свободное пространство, следует положить  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . Полупространство  $y < 0$  заполнено однородным

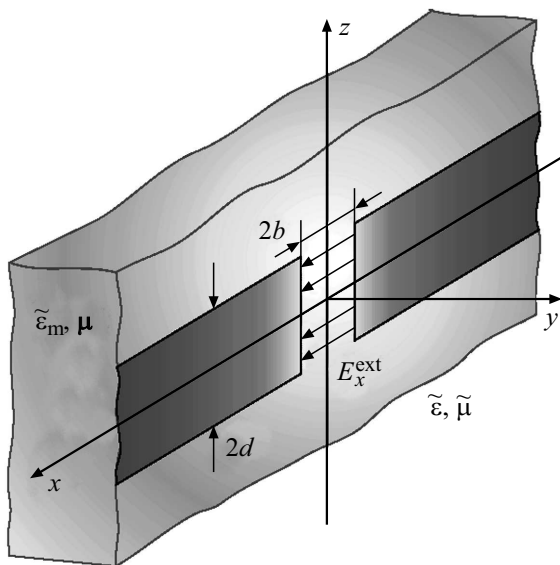


Рис. 1. Геометрия задачи.

одноосным метаматериалом, который описывается скалярной диэлектрической проницаемостью  $\tilde{\epsilon}_m = \epsilon_0 \epsilon_m$  и диагональным тензором магнитной проницаемости

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Наличием потерь в обеих средах пренебрегаем.

Компоненты тензора (1) определяются свойствами метаматериала и могут зависеть от частоты [1]. Заметим, что метаматериал является гиперболическим (резонансным), если для диагональных компонент тензора (1) выполняется соотношение  $\text{sgn} \mu_{\perp} \neq \text{sgn} \mu_{\parallel}$ . В этом случае поверхность показателя преломления одной из нормальных волн такой среды является гиперболоидом вращения и уходит в бесконечность при некотором угле между волновым вектором и направлением оси анизотропии [1]. В случае нерезонансного метаматериала, когда выполняется соотношение  $\text{sgn} \mu_{\perp} = \text{sgn} \mu_{\parallel}$ , поверхности показателей преломления распространяющихся нормальных волн являются замкнутыми. Заметим, что аналогичное поведение имеет место и для нормальных волн замагниченной плазмы в зависимости от знаков диагональных компонент тензора ее диэлектрической проницаемости (см., например, [5]).

Ток в антенне возбуждается гармонической во времени (пропорциональной  $\exp(i\omega t)$ ) сторонней ЭДС, создающей электрическое поле с единственной компонентой  $E_x^{\text{ext}}$ , отличной от нуля при  $y = 0, |z| < d$  в узком зазоре  $|x| \leq b$ :

$$E_x^{\text{ext}}(x, 0, z) = \frac{V_0}{2b} [U(x+b) - U(x-b)] \times [U(z+d) - U(z-d)]. \quad (2)$$

Здесь  $V_0 = \text{const}$  — комплексная амплитуда приложенного к зазору напряжения,  $b$  — полуширина зазора,  $U$  — функция Хевисайда. Величина  $E_x^{\text{ext}}(x, 0, z)$  при  $|z| < d$  может быть представлена в виде следующего разложения в интеграл Фурье:

$$E_x^{\text{ext}}(x, 0, z) = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(n_x) \exp(-ik_0 n_x x) dn_x, \quad (3)$$

где

$$V(n_x) = V_0 \frac{\sin(k_0 n_x b)}{k_0 n_x b}, \quad (4)$$

$k_0$  — волновое число в свободном пространстве.

Плотность электрического тока  $\mathbf{j}$ , возбуждаемого в антенне сторонним полем (2), будем искать в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{x}_0 I(x, z) \delta(y), \quad (5)$$

где  $|z| < d, \delta(y)$  — дельта-функция Дирака. Поверхностная плотность тока  $I(x, z)$  может быть записана в виде

$$I(x, z) = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}(n_x, z) \exp(-ik_0 n_x x) dn_x. \quad (6)$$

Для отыскания распределения  $I(x, z)$  необходимо выразить компоненты электромагнитного поля, возбуждаемого током (5), через фурье-образ  $\mathcal{I}(n_x, z)$  и удовлетворить граничным условиям для тангенциальных компонент поля на поверхности раздела двух сред  $y = 0$ , а также следующим граничным условиям на поверхности антенны ( $y = 0, |z| < d$ ):

$$E_x + E_x^{\text{ext}} = 0, \quad (7)$$

$$E_z = 0. \quad (8)$$

Описанная процедура позволяет свести задачу об определении распределения тока антенны к решению интегральных уравнений для неизвестной величины  $\mathcal{I}(n_x, z)$ .

## 2. Вывод интегральных уравнений для тока антенны

Получим вначале выражения для компонент поля, отвечающего плотности тока  $I(x, z)$ , из уравнений Максвелла, которые для области  $y < 0$  записываются в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = i\omega \tilde{\epsilon}_m \mathbf{E}. \quad (9)$$

Заменив в (9) тензор магнитной проницаемости  $\boldsymbol{\mu}$  на величину  $\tilde{\mu}$ , а диэлектрическую проницаемость  $\tilde{\epsilon}_m$  на  $\tilde{\epsilon}$ , получим уравнения Максвелла для области  $y > 0$ .

Решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля может быть представлено в виде интегралов

Фурье по нормированным на  $k_0$  волновым числам  $n_x$  и  $n_z$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(x, y, z) \\ \mathbf{H}(x, y, z) \end{bmatrix} &= \frac{k_0^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{E}(n_x, y, n_z) \\ \mathbf{H}(n_x, y, n_z) \end{bmatrix} \\ &\times \exp[-ik_0(n_x x + n_z z)] dn_x dn_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Величины  $E_x(n_x, y, n_z)$ ,  $E_y(n_x, y, n_z)$ ,  $H_x(n_x, y, n_z)$ ,  $H_y(n_x, y, n_z)$  могут быть выражены через компоненты  $E_z(n_x, y, n_z)$  и  $H_z(n_x, y, n_z)$ , которые при  $y < 0$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2(\epsilon_m \mu_{\perp} - n_x^2 - n_z^2) E_z = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \left( \epsilon_m \mu_{\parallel} - n_x^2 - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} n_z^2 \right) H_z = 0. \quad (12)$$

Для области  $y > 0$  в (11) и (12) следует выполнить замены  $\epsilon_m \rightarrow \epsilon$  и  $\mu_{\perp, \parallel} \rightarrow \mu$ . Решения уравнений (11) и (12) должны удовлетворять условию излучения на бесконечности (при  $|y| \rightarrow \infty$ ), а также граничным условиям для тангенциальных компонент поля на поверхности  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} E_x(n_x, y - 0, n_z) &= E_x(n_x, y + 0, n_z), \\ E_z(n_x, y - 0, n_z) &= E_z(n_x, y + 0, n_z), \\ H_x(n_x, y - 0, n_z) &= H_x(n_x, y + 0, n_z), \\ H_z(n_x, y - 0, n_z) &= H_z(n_x, y + 0, n_z) - \mathcal{I}(n_x, n_z). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathcal{I}(n_x, n_z) = \int_{-d}^d \mathcal{I}(n_x, z') \exp(ik_0 n_z z') dz' \quad (14)$$

и учтено, что компонента  $H_z$  на границе раздела сред  $y = 0$  должна испытывать скачок, отвечающий поверхностному току. Соответствующий скачок фурье-образа этой компоненты  $H_z(n_x, y, n_z)$  определяется величиной  $\mathcal{I}(n_x, n_z)$ , которая дается формулой (14).

На основании решения уравнений (11) и (12) нетрудно получить, что фурье-образы тангенциальных компонент электромагнитного поля при  $y < 0$  записываются в виде

$$\begin{aligned} E_x(n_x, y, n_z) &= -B_1 \frac{n_x n_z}{n_{\perp 1}^2} \exp(ik_0 n_y, 1y) + B_2 \frac{\mu_{\parallel} n_y, 2}{n_{\perp 2}^2} \\ &\times \exp(ik_0 n_y, 2y), \\ E_z(n_x, y, n_z) &= B_1 \exp(ik_0 n_y, 1y), \\ H_x(n_x, y, n_z) &= -\frac{1}{Z_0} \left[ B_1 \frac{\epsilon_m n_y, 1}{n_{\perp 1}^2} \exp(ik_0 n_y, 1y) \right. \\ &\left. + B_2 \frac{\mu_{\parallel} n_x n_z}{\mu_{\perp} n_{\perp 2}^2} \exp(ik_0 n_y, 2y) \right], \\ H_z(n_x, y, n_z) &= Z_0^{-1} B_2 \exp(ik_0 n_y, 2y), \end{aligned} \quad (15)$$

а при  $y > 0$  — в виде

$$\begin{aligned} E_x(n_x, y, n_z) &= -\frac{1}{n_{\perp}^2} (C_1 n_x n_z + C_2 \mu n_y) \exp(-ik_0 n_y y), \\ E_z(n_x, y, n_z) &= C_1 \exp(-ik_0 n_y y), \\ H_x(n_x, y, n_z) &= \frac{1}{Z_0 n_{\perp}^2} (C_1 \epsilon n_y - C_2 n_x n_z) \exp(-ik_0 n_y y), \\ H_z(n_x, y, n_z) &= Z_0^{-1} C_2 \exp(-ik_0 n_y y). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$  — волновой импеданс вакуума, коэффициенты  $B_k$  и  $C_k$  ( $k = 1, 2$ ) находятся из граничных условий (13). Остальные величины, входящие в выражения (15) и (16), определяются формулами

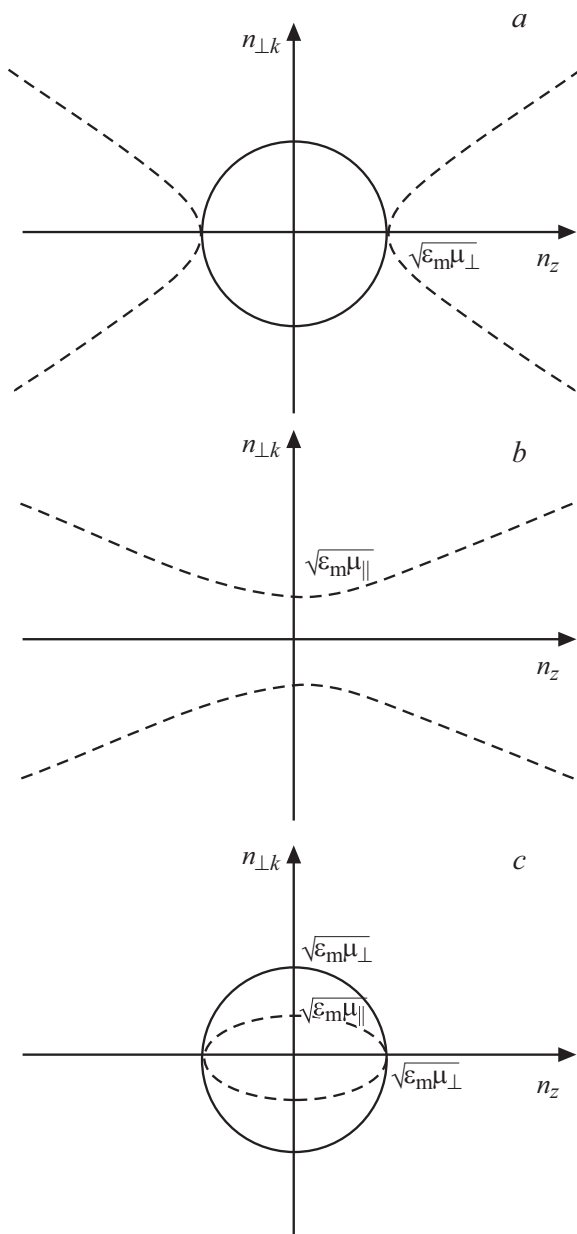
$$\begin{aligned} n_{\perp 1}^2 &= \epsilon_m \mu_{\perp} - n_z^2, \quad n_{\perp 2}^2 = \epsilon_m \mu_{\parallel} - \frac{\mu_{\parallel}}{\mu_{\perp}} n_z^2, \\ n_{y, k} &= [n_{\perp k}^2(n_z) - n_x^2]^{1/2}, \quad k = 1, 2, \\ n_{\perp}^2 &= \epsilon \mu - n_z^2, \quad n_y = [n_{\perp}^2(n_z) - n_x^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Чтобы удовлетворить условию излучения на бесконечности (при  $|y| \rightarrow \infty$ ), отвечающему направлению вектора групповой скорости волн в обеих средах от антенны, ветви функций  $n_{y, k}$  и  $n_y$  в (17) должны быть выбраны следующим образом:

$$\text{Im } n_{y, k} < 0, \quad \text{Im } n_y < 0. \quad (18)$$

При обращении какой-либо из величин в левых частях неравенств (18) в нуль следует ввести малые потери в соответствующей среде и после выбора ветви этой величины, согласно (18), перейти в результирующих формулах к случаю среды без потерь.

Примечательно, что функции  $n_{\perp 1}^2 = n_{\perp 1}^2(n_z)$  и  $n_{\perp 2}^2 = n_{\perp 2}^2(n_z)$ , введенные в (17), описывают поверхности показателя преломления обыкновенной и необыкновенной волн метаматериала соответственно. В качестве примера данные поверхности изображены на рис. 2 при противоположных и одинаковых положительных знаках компонент тензора  $\mu_{\perp}$  и  $\mu_{\parallel}$  в случае  $\epsilon_m > 0$  (при одинаковых отрицательных знаках данных компонент обе нормальные волны метаматериала в этом случае оказываются нераспространяющимися). Как видно из рис. 2, *a, b*, в рассматриваемых условиях ( $\epsilon_m > 0$ ) поверхность показателя преломления необыкновенной волны представляет собой двуполостный (при  $\mu_{\perp} > 0$ ,  $\mu_{\parallel} < 0$ ) либо однополостный (при  $\mu_{\perp} < 0$ ,  $\mu_{\parallel} > 0$ ) гиперболоид вращения. При  $\mu_{\perp} > 0$ ,  $\mu_{\parallel} > 0$  поверхность показателя преломления необыкновенной волны имеет сфероидальную форму (для определенности на рис. 2, *c* принято, что  $\mu_{\perp} > \mu_{\parallel} > 0$ ). Поверхность показателя преломления обыкновенной волны (в случае, когда она является распространяющейся) представляет собой сферу (рис. 2, *a, c*).



**Рис. 2.** Поверхности показателя преломления обыкновенной и необыкновенной волн метаматериала (сплошная и штриховая линии соответственно) в случае  $\epsilon_m > 0$  при  $\mu_{\perp} > 0$ ,  $\mu_{\parallel} < 0$  (a);  $\mu_{\perp} < 0$ ,  $\mu_{\parallel} > 0$  (b);  $\mu_{\perp} > \mu_{\parallel} > 0$  (c).

После ряда преобразований с учетом выражений (13)–(17) можно получить строгие интегральные представления для отвечающих току (5) компонент электрического поля  $E_x(\mathbf{r})$  и  $E_z(\mathbf{r})$  на поверхности  $y = 0$ :

$$\begin{bmatrix} E_x(x, 0, z) \\ E_z(x, 0, z) \end{bmatrix} = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dn_x \int_{-d}^d \begin{bmatrix} K_x(n_x, z - z') \\ K_z(n_x, z - z') \end{bmatrix} \mathcal{J}(n_x, z') \times \exp(-ik_0 n_x x) dz'. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{bmatrix} K_x(n_x, \xi) \\ K_z(n_x, \xi) \end{bmatrix} = -\frac{Z_0 k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} (\tilde{B}_1 n_x n_z + \tilde{B}_2 \mu_{\perp} n_{y,2}) n_{\perp 1}^{-2} \\ -\tilde{B}_1 \operatorname{sgn} \xi \end{bmatrix} \times \frac{\exp(-ik_0 n_z |\xi|)}{\Delta(n_x, n_z)} dn_z, \quad (20)$$

где  $\xi = z - z'$ . Коэффициенты  $\tilde{B}_k$  ( $k = 1, 2$ ) и другие величины в (20) определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1 &= n_x n_z (\mu_{n_y} + \mu_{\perp} n_{y,2}) (n_{\perp} n_{\perp 1})^{-2}, \\ \tilde{B}_2 &= [\delta_1 \mu_{n_y} + \beta (n_x n_z)^2] n_{\perp}^{-2}, \\ \Delta(n_x, n_z) &= \delta_1 \delta_2 + \beta^2 (n_x n_z)^2, \quad \beta = n_{\perp}^{-2} - n_{\perp 1}^{-2}, \\ \delta_1 &= \epsilon \frac{n_y}{n_{\perp}^2} + \epsilon_m \frac{n_{y,1}}{n_{\perp 1}^2}, \quad \delta_2 = \mu \frac{n_y}{n_{\perp}^2} + \mu_{\parallel} \frac{n_{y,2}}{n_{\perp 2}^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что в силу непрерывности тангенциальных компонент электрического поля на границе раздела сред при выводе выражений для этих компонент на поверхности  $y = 0$  можно воспользоваться как коэффициентами  $B_k$ , так и коэффициентами  $C_k$ . При получении формул (19), (20) мы использовали коэффициенты  $B_k$  и учли выполняющееся для них соотношение  $B_k = (-1)^{k-1} Z_0 \tilde{B}_k \mathcal{J}(n_x, n_z) / \Delta(n_x, n_z)$ .

Из граничных условий (7), (8) для тангенциальных компонент электрического поля на поверхности антенны можно получить следующие интегральные уравнения для фурье-образа  $\mathcal{J}(n_x, z)$  поверхностной плотности тока:

$$\int_{-d}^d K_x(n_x, z - z') \mathcal{J}(n_x, z') dz' = -V(n_x), \quad (22)$$

$$\int_{-d}^d K_z(n_x, z - z') \mathcal{J}(n_x, z') dz' = 0. \quad (23)$$

В уравнениях (22), (23) предполагается, что  $|z| < d$ , а входящие в них интегралы оказываются сингулярными. Заметим, что свойства ядер этих уравнений, как будет показано в дальнейшем, различны в случаях резонансной (гиперболической) и нерезонансной среды, заполняющей полупространство  $y < 0$ .

### 3. Решение интегральных уравнений для тока

Поведение решений полученных интегральных уравнений определяется свойствами их ядер (20). Покажем, что в случае достаточно малой ширины ленты  $2d$ , когда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} d \ll b, \quad d \ll (|\mu_{\parallel}|/|\mu_{\perp}|)^{1/2} b, \\ (k_0 d)^2 \max\{|\epsilon|, |\epsilon_m|, |\mu|, |\mu_{\perp}|, |\mu_{\parallel}|\} \ll 1, \end{aligned} \quad (24)$$

свойства этих ядер позволяют получить приближенное решение уравнений (22), (23) в аналитическом виде.

Для этого представим ядра указанных уравнений в виде суммы сингулярных и регулярных слагаемых:

$$K_x(n_x, \xi) = K_x^{(s)}(n_x, \xi) + K_x^{(r)}(n_x, \xi),$$

$$K_z(n_x, \xi) = K_z^{(s)}(n_x, \xi) + K_z^{(r)}(n_x, \xi), \quad (25)$$

где величины  $K_x^{(s)}(n_x, \xi)$  и  $K_z^{(s)}(n_x, \xi)$  содержат сингулярные составляющие, которые обращаются в бесконечность при  $\xi \rightarrow 0$ , в то время как величины  $K_x^{(r)}(n_x, \xi)$  и  $K_z^{(r)}(n_x, \xi)$  являются регулярными (конечными в указанном пределе).

Можно показать, что величина  $K_x^{(s)}(n_x, \xi)$  записывается следующим образом в случае гиперболического (резонансного) метаматериала, когда  $\text{sgn } \mu_{\perp} \neq \text{sgn } \mu_{\parallel}$ :

$$K_x^{(s)}(n_x, \xi) = \frac{iZ_0k_0}{\pi} \left[ \left( \frac{n_x^2}{\epsilon_m + \epsilon} + \frac{i|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}|^{1/2}\mu^2}{|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}| + \mu^2} \right) \times \int_0^{\infty} \frac{\cos(k_0n_z|\xi|)}{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}} dn_z - \frac{|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}|\mu}{|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}| + \mu^2} \times \int_{\alpha|n_x|}^{\infty} \frac{\cos(k_0n_z|\xi|)}{\sqrt{n_z^2 - (\alpha n_x)^2}} dn_z \right], \quad (26)$$

где  $\alpha = |\mu_{\perp}/\mu_{\parallel}|^{1/2}$ . Для нерезонансного метаматериала ( $\text{sgn } \mu_{\perp} = \text{sgn } \mu_{\parallel}$ ) имеем

$$K_x^{(s)}(n_x, \xi) = \frac{iZ_0k_0}{\pi} \left( \frac{n_x^2}{\epsilon_m + \epsilon} - \frac{\mu|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}|^{1/2}\text{sgn } \mu_{\perp}}{\mu + |\mu_{\perp}\mu_{\parallel}|^{1/2}\text{sgn } \mu_{\perp}} \right) \times \int_0^{\infty} \frac{\cos(k_0n_z|\xi|)}{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}} dn_z. \quad (27)$$

Величина  $K_z^{(s)}(n_x, \xi)$  независимо от соотношения знаков диагональных компонент тензора определяется выражением

$$K_z^{(s)}(n_x, \xi) = \frac{Z_0k_0}{\pi} \frac{n_x \text{sgn } \xi}{\epsilon_m + \epsilon} \int_0^{\infty} \frac{n_z}{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}} \sin(k_0n_z|\xi|) dn_z. \quad (28)$$

Формулы (26)–(28) могут быть выведены путем перехода к пределу  $n_z \rightarrow \infty$  под знаками интегралов в (20) с учетом очевидного соотношения

$$\lim_{n_z \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}}{n_z} - \frac{n_z}{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}} \right) = 0. \quad (29)$$

Регулярные части ядер  $K_x^{(r)}(n_x, \xi)$  и  $K_z^{(r)}(n_x, \xi)$  находятся путем вычитания предельных величин, полученных описанным выше способом, из соответствующих подынтегральных выражений в (20). Мы не приводим

весьма громоздкие формулы для  $K_x^{(r)}(n_x, \xi)$  и  $K_z^{(r)}(n_x, \xi)$ , поскольку их запись с учетом сделанных пояснений не вызывает затруднений. Отметим лишь, что в случае ленты малой ширины (см. (24)) при вычислении величин  $K_x^{(r)}(n_x, \xi)$  и  $K_z^{(r)}(n_x, \xi)$  (в силу их регулярности) можно положить  $\xi = 0$ . При этом свойства функции  $K_z^{(r)}(n_x, \xi)$  позволяют записать  $K_z^{(r)}(n_x, 0) = 0$  (см. [6]). Что касается величины  $K_x^{(r)}(n_x, 0)$ , ее в общем случае можно определить только численно.

Интегралы, входящие в формулы (26)–(28) для сингулярных частей ядер, берутся аналитически [7,8]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(k_0n_z|\xi|)}{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}} dn_z = K_0(k_0|n_x\xi|),$$

$$\int_{\alpha|n_x|}^{\infty} \frac{\cos(k_0n_z|\xi|)}{\sqrt{n_z^2 - (\alpha n_x)^2}} dn_z = -\frac{\pi}{2} Y_0(k_0\alpha|n_x\xi|),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{n_z}{\sqrt{n_z^2 + n_x^2}} \sin(k_0n_z|\xi|) dn_z = |n_x| K_1(k_0|n_x\xi|), \quad (30)$$

где  $K_m$  и  $Y_m$  — соответственно функции Макдональда и Неймана порядка  $m$ . С учетом известных аппроксимаций этих функций при малых значениях аргумента [7] в пределе  $\xi \rightarrow 0$  имеем

$$K_x^{(s)}(n_x, \xi) = -\frac{iZ_0k_0}{2\pi\chi} \left( \ln \frac{k_0|\xi|}{2} + \ln |n_x| + C + F \right), \quad (31)$$

$$K_z^{(s)}(n_x, \xi) = \frac{Z_0}{2\pi\epsilon_{\text{eff}} \xi} \frac{n_x}{\xi}, \quad (32)$$

где

$$\chi = \frac{\epsilon_{\text{eff}}}{n_x^2 - \epsilon_{\text{eff}} \mu_{\text{eff}}}, \quad (33)$$

$C = 0.5772\dots$  — постоянная Эйлера–Маскерони, величина  $F$  при  $\text{sgn } \mu_{\perp} \neq \text{sgn } \mu_{\parallel}$  дается формулой

$$F = -\chi \frac{|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}|\mu}{|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}| + \mu^2} \ln \frac{|\mu_{\perp}|}{|\mu_{\parallel}|}. \quad (34)$$

В противоположном случае, когда  $\text{sgn } \mu_{\perp} = \text{sgn } \mu_{\parallel}$ , следует положить  $F = 0$ . Величины  $\epsilon_{\text{eff}}$  и  $\mu_{\text{eff}}$  определяются выражениями

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_m + \epsilon}{2}, \quad \mu_{\text{eff}} = \frac{2\mu_m\mu}{\mu_m + \mu}, \quad (35)$$

где

$$\mu_m = \begin{cases} -i|\mu_{\perp}\mu_{\parallel}|^{1/2} & \text{при } \text{sgn } \mu_{\perp} \neq \text{sgn } \mu_{\parallel}, \\ (\mu_{\perp}\mu_{\parallel})^{1/2} \text{sgn } \mu_{\perp} & \text{при } \text{sgn } \mu_{\perp} = \text{sgn } \mu_{\parallel}. \end{cases} \quad (36)$$

Следует отметить, что, строго говоря, приближенные выражения (31) и (32) перестают быть справедливыми при достаточно больших значениях  $|n_x|$ . Однако, как

будет ясно из дальнейшего рассмотрения, значения  $|n_x|$ , заметно превышающие  $(k_0b)^{-1}$ , не влияют существенно на результаты расчета тока антенны. Поэтому выполнение первых двух неравенств в (24) обеспечивает применимость используемых приближений.

В результате проведенных преобразований интегральные уравнения (22) и (23) при  $|z| < d$  принимают следующий вид:

$$\int_{-d}^d \mathcal{J}(n_x, z') \ln \frac{k_0|n_x(z-z')|}{2} dz' = -\frac{i2\pi\chi}{Z_0k_0} V(n_x) - S(n_x) \int_{-d}^d \mathcal{J}(n_x, z') dz', \quad (37)$$

$$\int_{-d}^d n_x \frac{\mathcal{J}(n_x, z')}{z-z'} dz' = 0, \quad (38)$$

где

$$S(n_x) = i2\pi\chi(Z_0k_0)^{-1}K_x^{(r)}(n_x, 0) + C + F, \quad (39)$$

а интеграл в (38) понимается в смысле главного значения. Можно показать [9,10], что решения уравнений (37) и (38) являются главными членами асимптотик решений исходных интегральных уравнений (22) и (23) при выполнении условий (24). Далее мы ограничимся анализом лишь уравнений (37) и (38).

Решение уравнения (37) с логарифмическим ядром, удовлетворяющее также уравнению (38) с ядром Коши, может быть получено аналитически [11] и имеет вид

$$\mathcal{J}(n_x, z) = \frac{2i}{Z_0k_0\sqrt{d^2-z^2}} \frac{\chi V_0}{\ln(4/k_0|n_x|d) - S(n_x)} \times \frac{\sin(k_0n_x b)}{k_0n_x b}. \quad (40)$$

Подставляя выражение (40) в (6), приходим к формуле для поверхностной плотности тока  $I(x, z)$ . Интегрирование  $I(x, z)$  по  $z$  в пределах от  $-d$  до  $d$  дает полный ток  $I_\Sigma(x)$  антенны в сечении  $x = \text{const}$ :

$$I_\Sigma(x) = \frac{iV_0}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k_0n_x b)}{k_0n_x b} \frac{\chi \exp(-ik_0n_x x)}{\ln(4/k_0|n_x|d) - S(n_x)} dn_x. \quad (41)$$

Заметим, что особенность функции  $I(x, z)$  при  $|z| \rightarrow d$ , отвечающая условию Мейкснера на ребре [12], оказывается интегрируемой. Поэтому полный ток антенны (41) является конечной величиной.

#### 4. Распределение тока и импеданс антенны

Полученное интегральное представление тока (41) допускает в общем случае лишь численное исследо-

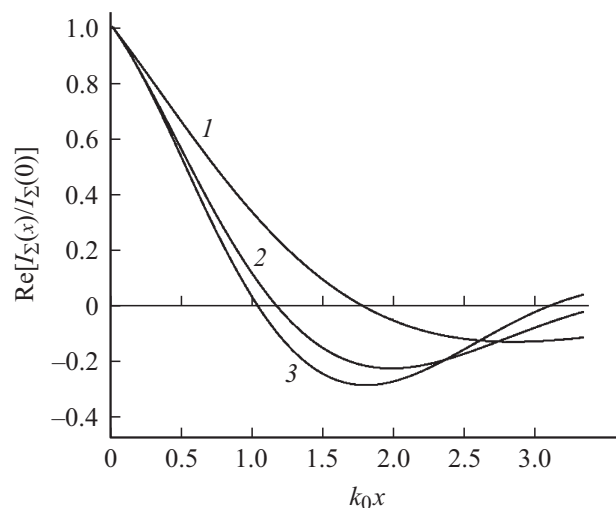


Рис. 3. Зависимости нормированной величины  $\text{Re} I_\Sigma(x)$  от координаты  $x$  при  $\varepsilon = \mu = 1$ ,  $\varepsilon_m = 3$ ,  $\mu_{\parallel} = 1$  для  $\mu_{\perp} = -0.1$  (кривая 1),  $\mu_{\perp} = -0.5$  (кривая 2),  $\mu_{\perp} = -0.9$  (кривая 3).

вание. Однако если для значений  $|n_x| < (k_0b)^{-1}$ , дающих определяющий вклад в интеграл, стоящий в (41), выполняется условие  $\ln(4/k_0|n_x|d) \gg |(S(n_x) - C)/\chi\mu_{\text{eff}}|$ , указанный интеграл вычисляется аналитически, и распределение тока вдоль антенны при  $|x| > b$  принимает вид

$$I_\Sigma(x) = \frac{V_0}{Z_0} \frac{k_0\varepsilon_{\text{eff}}}{h} \frac{\pi}{\ln(4/k_0d)} \exp(-ih|x|), \quad (42)$$

где

$$h = k_0(\varepsilon_{\text{eff}}\mu_{\text{eff}})^{1/2}, \quad (43)$$

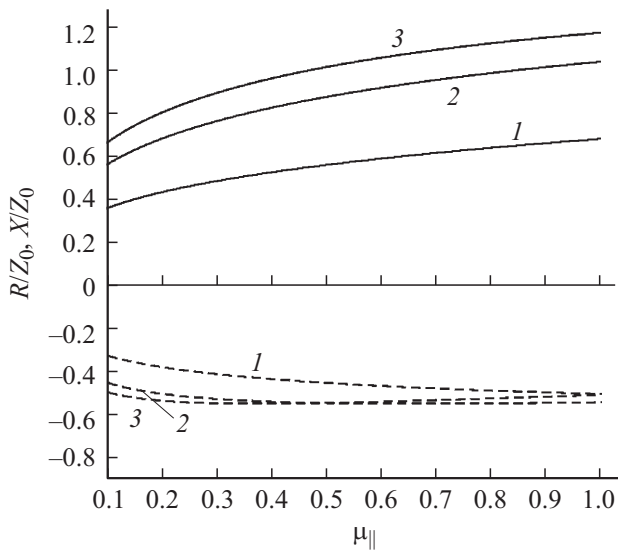
причем предполагается, что  $\ln(4/k_0d) \gg \ln|h/k_0|$ ,  $|h|b \ll 1$  и  $\text{Im} h < 0$  (в случае, когда величина  $h$  оказывается комплексной).

Очевидно, что формула (42) соответствует переходу к методу длинных линий, а условия, при которых она получена, определяют пределы применимости указанного метода для ленточной антенны, расположенной на границе раздела магнитного метаматериала и изотропной среды. В рамках этого приближения при  $|\varepsilon_m| \gg |\varepsilon|$ ,  $|\mu_m| \ll |\mu|$  имеем  $h = k_0(\varepsilon_m\mu_m)^{1/2}$ , т.е. распределение тока антенны оказывается таким же, как при ее размещении в однородном безграничном метаматериале. Напротив, при  $|\varepsilon_m| \ll |\varepsilon|$ ,  $|\mu_m| \gg |\mu|$  постоянная распределения тока  $h$  принимает вид  $h = k_0(\varepsilon\mu)^{1/2}$ , отвечающий размещению антенны в однородной безграничной изотропной среде.

Используя распределение тока  $I_\Sigma(x)$ , найдем входной импеданс  $Z = R + iX$  антенны. Он может быть получен стандартным образом по формуле  $Z = V_0/I_\Sigma(b)$  и в рамках приближения (42) при выполнении условия  $|h|b \ll 1$  дается выражением

$$Z = Z_0(\mu_{\text{eff}}/\varepsilon_{\text{eff}})^{1/2} \pi^{-1} \ln(4/k_0d). \quad (44)$$

При вычислении импеданса  $Z$  по этой формуле следует полагать  $R = \text{Re} Z > 0$ , а в случае действительных



**Рис. 4.** Зависимости сопротивления излучения  $R$  и реактанса  $X$  антенны (сплошные и штриховые линии соответственно), нормированных на  $Z_0$ , от  $\mu_{\parallel}$  при  $\mu_{\perp} = -0.1$  (кривые 1),  $\mu_{\perp} = -0.5$  (кривые 2),  $\mu_{\perp} = -0.9$  (кривые 3) в случае  $k_0d = 3.14 \cdot 10^{-2}$ . Значения остальных параметров те же, что и на рис. 3.

величин  $\epsilon_{\text{eff}}$  и  $\mu_{\text{eff}}$  разных знаков, когда импеданс (44) оказывается чисто мнимым, знак  $X$  должен совпадать со знаком  $\mu_{\text{eff}}$ . В этом случае для определения  $R$  необходим выход за рамки приближения, основанного на формуле (42).

Перейдем к результатам численных расчетов, иллюстрирующим поведение характеристик антенны в наиболее интересных частных случаях. Расчеты проводились для следующих значений параметров:  $k_0d = 3.14 \cdot 10^{-2}$ ,  $b = 5d$ ,  $\epsilon = \mu = 1$  (случай, когда среда в области  $y > 0$  является вакуумом),  $\epsilon_m = 3$ ,  $|\mu_{\perp, \parallel}| \leq 1$ . Отметим, что при выбранных значениях параметров зависимости, рассчитанные по выражениям (42)–(44), и результаты, полученные по строгим формулам, совпадают с графической точностью. На рис. 3 представлены нормированные (на ток в точке  $x = 0$ ) зависимости  $\text{Re } I_{\Sigma}(x)$  в случае гиперболического метаматериала в полупространстве  $y < 0$  для трех значений  $\mu_{\perp} = -0.1$ ,  $\mu_{\perp} = -0.5$  и  $\mu_{\perp} = -0.9$  при  $\mu_{\parallel} = 1$ . Из рис. 3 видно, что амплитуда тока спадает вдоль антенного провода при удалении от места подключения сторонней ЭДС. Можно убедиться, что это спадание связано с тем, что величина  $h$  является комплексной при заполнении полупространства  $y < 0$  гиперболической средой.

На рис. 4 представлены нормированные на  $Z_0$  сопротивление излучения  $R$  и реактанс  $X$  антенны в зависимости от параметра  $\mu_{\parallel}$ , изменяющегося в интервале  $0.1 \leq \mu_{\parallel} \leq 1$ , для трех ранее выбранных значений  $\mu_{\perp}$  (значения остальных параметров прежние). Сопоставляя рис. 3 и 4, нетрудно убедиться, что увеличение скорости спадания амплитуды тока вдоль лен-

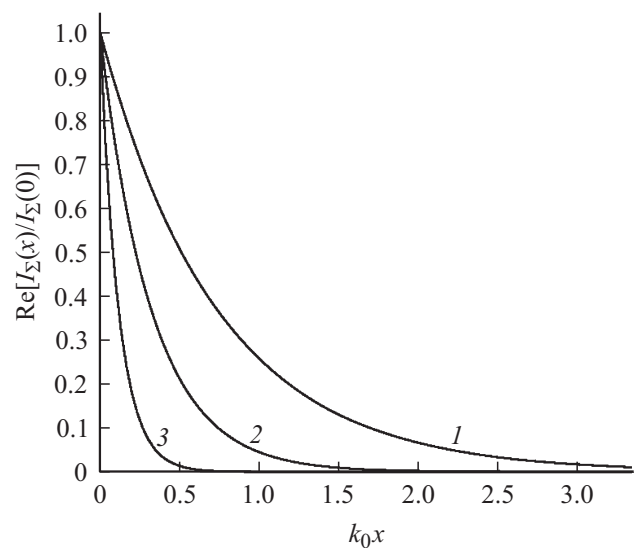
точной антенны при изменении параметров метаматериала сопровождается возрастанием величины  $R$ , что объясняется повышением эффективности возбуждения в гиперболической среде магнитоэлектрических волн, отвечающих уходящим в бесконечность участкам поверхности показателя преломления необыкновенной волны (см. рис. 2).

В случае нерезонансного метаматериала ( $\text{sgn } \mu_{\perp} = \text{sgn } \mu_{\parallel}$ ) в полупространстве  $y < 0$  характеристики антенны заметно меняются. Например, при  $\epsilon_{\text{eff}} > 0$  и одновременно отрицательных значениях  $\mu_{\perp}$  и  $\mu_{\parallel}$  возможна ситуация, когда  $\mu_{\text{eff}} < 0$ , так что постоянная распределения тока  $h$  является чисто мнимой. В этом случае ток экспоненциально спадает вдоль антенного провода с удалением от места возбуждения. Данный случай иллюстрируется рис. 5, построенным при  $\epsilon = \mu = 1$ ,  $\epsilon_m = 3$ ,  $\mu_{\parallel} = -1$  для  $\mu_{\perp} = -0.1$ ,  $\mu_{\perp} = -0.5$ ,  $\mu_{\perp} = -0.9$ . В случае нерезонансного метаматериала и одинаковых знаков величин  $\epsilon_{\text{eff}}$  и  $\mu_{\text{eff}}$  поведение тока оказывается таким же, как при размещении антенны в прозрачной изотропной среде с показателем преломления  $(\epsilon_{\text{eff}}\mu_{\text{eff}})^{1/2}$ .

Следует отметить, что полученные в настоящей работе результаты нетрудно обобщить на случай излучателя конечной протяженности  $2L$ , представив его в виде разомкнутой на конце линии передачи. Действуя по аналогии с [13], в этом случае можно получить

$$I_{\Sigma}(x) = \frac{I_0}{\sin(hL)} \sin[h(L - |x|)], \quad (45)$$

где  $|x| < L$ ,  $I_0 = I_{\Sigma}(0)$  — ток на входе антенны,  $h$  — постоянная распределения тока в антенне бесконечной длины, определяемая выражением (43). Величина  $I_0$  находится здесь по стандартной формуле  $I_0 = V_0/Z_L$ , где  $Z_L$  — входной импеданс антенны конечной длины, который при известной функции распределения тока  $I_{\Sigma}(x)/I_0$



**Рис. 5.** Зависимости нормированной величины  $\text{Re } I_{\Sigma}(x)$  от координаты  $x$  при  $\epsilon = \mu = 1$ ,  $\epsilon_m = 3$ ,  $\mu_{\parallel} = -1$  для  $\mu_{\perp} = -0.1$  (кривая 1),  $\mu_{\perp} = -0.5$  (кривая 2),  $\mu_{\perp} = -0.9$  (кривая 3).

может быть рассчитан для произвольного значения  $L$  с помощью метода наведенных ЭДС [14].

Не останавливаясь на результатах расчета характеристик антенны конечной длины, отметим, что в случае  $|h|L \ll 1$  из выражения (45) следует известное „треугольное“ распределение тока вдоль антенного провода ( $|x| < L$ ):

$$I_{\Sigma}(x) = I_0(1 - |x|/L).$$

В противоположном случае антенны большой протяженности при выполнении условия  $|\operatorname{Im} h|L \gg 1$  распределение тока (45) переходит (с учетом неравенства  $\operatorname{Im} h < 0$ ) в распределение (42). Из сказанного ясно, что в этом случае увеличение длины антенного провода до значений, превышающих характерный масштаб  $|\operatorname{Im} h|^{-1}$  спада тока вдоль антенны, нецелесообразно, поскольку перестает сопровождаться изменением ее электродинамических характеристик.

## Заключение

Рассмотрена задача о распределении тока идеально проводящей узкой ленточной антенны, расположенной перпендикулярно оси анизотропии на плоской границе раздела изотропной магнитоэлектрической среды и одноосного магнитного метаматериала, описываемого скалярной диэлектрической проницаемостью и тензором магнитной проницаемости диагонального вида. Для антенны бесконечной длины задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений для поверхностной плотности тока. На основании решения выведенных интегральных уравнений получены распределение тока и входной импеданс антенны для случаев гиперболического (резонансного) и нерезонансного магнитного метаматериала. Определены условия применимости приближенного метода длинных линий, который позволяет получить сравнительно простые выражения для электродинамических характеристик рассмотренной антенны. В таком приближении распределение тока и входной импеданс совпадают с соответствующими характеристиками эквивалентной длинной линии, постоянная распределения тока в которой определяется некоторыми эффективными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. В рамках метода длинных линий результаты, полученные для антенны бесконечной протяженности, допускают обобщение на случай антенны конечной длины. Используемый в данной работе подход может быть распространен и на более сложный случай ленточной антенны, расположенной на границе раздела изотропной среды и метаматериала, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого описываются тензорами общего вида.

## Финансирование работы

Исследование распределения тока антенны бесконечной протяженности выполнено при поддержке Россий-

ского научного фонда (проект № 14-12-00510). Остальные результаты получены при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 3.1358.2017/4.6).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Theore and Phenomena of Metamaterials / Ed. by F. Capolino. Boca Raton: CRC Press, 2009. 974 p.
- [2] Вендик И.Б., Вендик О.Г. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 3–28. [Vendik I.B., Vendik O.G. // Tech. Phys. 2013. Vol. 58. N 1. P. 1–24.]
- [3] Shamonina E., Solymar L. // J. Magn. Magn. Mater. 2006. Vol. 300. N 1. P. 38–43.
- [4] Poddubny A., Iorsh I., Belov P., Kivshar Yu. // Nature Photon. 2013. Vol. 7. N 12. P. 948–957.
- [5] Kondrat'ev I.G., Kudrin A.V., Zaboronkova T.M. Electrodynamics of density ducts in magnetized plasmas. Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. 288 p.
- [6] Kudrin A.V., Zaitseva A.S., Zaboronkova T.M., Krafft C., Kyriacou G.A. // Prog. Electromagn. Res. B. 2013. Vol. 51. P. 221–246.
- [7] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1983. 1100 с.
- [8] Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.
- [9] Kudrin A.V., Petrov E.Yu., Zaboronkova T.M. // J. Electromagn. Waves Appl. 2001. Vol. 15. N 3. P. 345–378.
- [10] Зaboronkova T.M., Кудрин А.В., Петров Е.Ю. // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 3. С. 325–329. [Zaboronkova T.M., Kudrin A.V., Petrov E.Yu. // J. Commun. Technol. Electron. 2012. Vol. 57. N 3. P. 246–300.]
- [11] Ворович В.В., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. С. 215–244.
- [12] Meixner J. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1972. Vol. AP-20. N 4. P. 442–446.
- [13] Kudrin A.V., Petrov E.Yu., Kyriacou G.A., Zaboronkova T.M. // Prog. Electromagn. Res. 2005. Vol. 53. P. 135–166.
- [14] Фрадин А.З. Антенно-фидерные устройства. М.: Связь, 1977. 440 с.