12

Дальнейшее развитие и уточнение концепции эффективного потенциала для стробоскопических выборок координат и скоростей ионов в квадрупольных радиочастотных полях

© А.С. Бердников, Н.Р. Галль, С.В. Масюкевич

Институт аналитического приборостроения РАН,
190103 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: asberd@yandex.ru

Поступило в Редакцию 1 ноября 2018 г.
В окончательной редакции 9 января 2019 г.
Принято к публикации 10 января 2019 г.

Рассмотрена недавно предложенная концепция эффективного потенциала, разработанная на основе анализа стробоскопических выборок координат и скоростей ионов при их движении в радиочастотном квадрупольном поле. Получены точные формулы для стробоскопической модели движения ионов, справедливые в любой точке зоны устойчивости. Анализ полученных формул привел к корректировке некоторых положений исходной концепции эффективного потенциала стробоскопических выборок, разработанной для окрестности вершины зоны устойчивости.

DOI: 10.21883/JTF.2019.07.47808.383-18

Техника масс-селективной фильтрации заряженных частиц в радиочастотных электрических полях, открытая В. Паулем [1], является основой для работы радиочастотных ионных ловушек и квадрупольных фильтров масс [2–7]. Фильтрация ионов с определенными массами в этих устройствах, использующих синусоидальные радиочастотные напряжения, основана на свойствах уравнения Матье [8], с помощью которого описывается движение ионов в радиочастотных квадрупольных полях. Ионные ловушки и квадрупольные фильтры масс, которые используют данный эффект, получили широкое практическое применение в качестве недорогих, компактных и надежно работающих в самых разных условиях масс-анализаторов с умеренными требованиями к разрешающей способности и диапазону масс [2–7]. Однако строгая математическая теория решений уравнения Матье не обладает необходимой наглядностью, с помощью которой можно было бы легко синтезировать радиочастотные масс-фильтры с требуемыми характеристиками.

Псевдопотенциальная модель [9], описывающая динамику движения точечной массы под воздействием быстро осциллирующей потенциальной силы, обеспечивает наглядное качественное описание движения ионов в радиочастотных электрических полях [10,11]. Однако для задач, связанных с анализом движения ионов в радиочастотных квадруполях (квадрупольных фильтрах масс, квадрупольных радиочастотных ловушках) [2–7], это качественное описание является недостаточно точным. Имеется объективная потребность в создании уточненной теории движения ионов в квадрупольных радиочастотных электрических полях, которая бы соединяла наглядность псевдопотенциальной модели с улучшенной точностью описания (в идеале — с абсолютно точным описанием) поведения ионов. Число таких попыток, предпринятых в последнее время, достаточно велико [12–20].

Настоящая работа посвящена уточнению результатов публикации [14] и их распространению на все точки первой зоны устойчивости радиочастотного квадруполя вместо окрестности вершины зоны устойчивости. В частности, будет показано, что в любой точке зоны устойчивости стробоскопические выборки координат и скоростей при движении ионов в радиочастотном квадрупольном поле описываются секулярными колебаниями с безразмерной частотой β или в качестве альтернативного способа описания биениями с безразмерной частотой $1-\beta$ (где β — параметр Флоке [21–23]). Кроме того, на основе предлагаемой теории для окрестности вершины зоны устойчивости будут получены приближенные аналитические оценки для границ зоны и для глубины и ширины псевдопотенциальных ям, характеризующих аксептанс квадрупольного масс-анализатора. Использование этих выражений значительно упрощает анализ и оптимизацию режимов работы квадрупольных масс-анализаторов и квадрупольных масс-фильтров.

Предметом исследования являются траектории $x(t), y(t)$ и скорости $v_x(t)=\dot{x}(t)$, $v_y(t)=\dot{y}(t)$ при движении ионов в радиочастотном поле линейного квадрупольного масс-фильтра с электрическим потенциалом

$$U(x,y,t)=\big(U_0+V_0F(t)\big)(x^2-y^2)/r_0^2, \tag{1}$$

где x, y — декартовы координаты, r_0 — радиус апертуры между гиперболическими электродами линейного квадруполя, U_0 — постоянная компонента напряжения, V_0 — амплитуда радиочастотной компоненты напряжения, $F(t)$ — периодическая функция с нулевым средним и периодом $T=2\pi/\Omega$ для радиочастотной составляющей напряжения, Ω — базовая круговая частота радиочастотной составляющей, t — время. Для частного случая линейного квадруполя с косинусоидальными напряжениями $F(t) = \cos(\Omega t + \varphi_0)$, где φ_0 — фаза радиочастотного напряжения в момент старта иона $t = t_0 = 0$.

Основная идея работы [14] состоит в анализе свойств стробоскопических отсчетов $x_n = x(nT)$, $v_n = v_x(nT)$, $y_n = y(nT)$, $w_n = v_y(nT)$ и знакопеременных стробоскопических отсчетов $\tilde{x}_n = (-1)^n x(nT)$, $\tilde{v}_n = (-1)^n v_x(nT)$, $\tilde{y}_n = (-1)^n y(nT)$, $\tilde{w}_n = (-1)^n v_y(nT)$ координат и скоростей ионов (где n — номер стробоскопического отсчета), с последующим переносом свойств стробоскопических отсчетов на свойства континуального движения $x(t), y(t)$. Нормированные уравнения движения в электрическом поле (1) с косинусоидальными радиочастотными напряжениями имеют вид

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \big(a + 2q\cos(2\xi + \varphi_0)\big)x = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - \big(a + 2q\cos(2\xi + \varphi_0)\big)y = 0, \tag{3}$$

где $\xi = \Omega t/2$ — безразмерное время, $a = 8eU_0/m\Omega^2 r_0^2$ и $q = 4eV_0/m\Omega^2 r_0^2$ — безразмерные параметры, периодическая функция $f(\xi) = \cos(2\xi + \varphi_0)$ имеет безразмерный период $T' = \pi$ (безразмерную круговую частоту $\Omega' = 1$), φ_0 — фаза радиочастотного напряжения в момент старта иона. Для стробоскопических отсчетов $x_n = x(nT')$, $v_n = v(nT')$, $y_n = y(nT')$, $w_n = w(nT')$ справедливы матричные рекуррентные соотношения [23]:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = M_x^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = M_x^n \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} y_n \\ w_n \end{pmatrix} = M_y \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = M_y^2 \begin{pmatrix} y_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = M_y^n \begin{pmatrix} y_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $v(\xi) = dx(\xi)/d\xi$ и $w(\xi) = dy(\xi)/d\xi$ — безразмерные скорости, (x_0, v_0) и (y_0, w_0) — начальные условия для уравнений (2) и (3), M_x, M_y — матрицы монодромии [22,23] для уравнений (2) и (3), удовлетворяющие линейным соотношениям:

$$\begin{pmatrix} x(T') \\ v(T') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xv} \\ m_{vx} & m_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y(T') \\ w(T') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{yy} & m_{yw} \\ m_{wy} & m_{ww} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = M_y \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матриц монодромии NM_x, M_y подчиняются условиям $m_{xx}m_{vv} - m_{xv}m_{vx} = 1$, $m_{yy}m_{ww} - m_{yw}m_{wy} = 1$ (вследствие сохранения фазового объема). Кроме того, если имеет место устойчивость движения ионов в радиочастотном электрическом поле, должны быть выполнены необходимые и достаточные условия устойчивости $-2 < m_{xx} + m_{vv} < 2$, $-2 < m_x + m_{vv} < 2$ [24]. Из условий устойчивости следует параметризация $m_{xx} + m_{vv} = 2\cos\pi\beta_x$, $m_{yy} + m_{ww} = 2\cos\pi\beta_y$, где коэффициенты β_x, β_y имеют смысл параметров Флоке (секулярных частот), описывающих движение иона вдоль координат x и y [22,23]. Из формул (4), (5) получаются рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} x_{n+1} = m_{xx}x_n + m_{xv}v_n, \\ v_{n+1} = m_{vx}x_n + m_{vv}v_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{n+1} = m_{yy}y_n + m_{yw}w_n, \\ w_{n+1} = m_{wy}y_n + m_{ww}w_n, \end{cases} \tag{6}$$

которые однозначным образом определяют всю цепочку стробоскопических отсчетов по начальным данным. Для стробоскопических отсчетов $x_n = x(nT')$, $v_n = v(nT')$, $y_n = y(nT')$, $w_n = w(nT')$ из формул (6) получаются конечно-разностные соотношения

$$v_n = (x_{n+1} - m_{xx}x_n)/m_{xv}, \quad x_{n+1} - 2\cos\pi\beta_x x_n + x_{n-1} = 0, \tag{7}$$

$$w_n = (y_{n+1} - m_{yy}y_n)/m_{yw}, \quad y_{n+1} - 2\cos\pi\beta_y y_n + y_{n-1} = 0. \tag{8}$$

Соответственно, знакопеременные стробоскопические отсчеты $\tilde{x}_n = (-1)^n x(nT')$, $\tilde{v}_n = (-1)^n v(nT')$, $\tilde{y}_n = (-1)^n y(nT')$, $\tilde{w}_n = (-1)^n w(nT')$ подчиняются конечно-разностным соотношениям

$$\tilde{v}_n = -(\tilde{x}_{n+1} - m_{xx}\tilde{x}_n)/m_{xv}, \quad \tilde{x}_{n+1} + 2\cos\pi\beta_x\tilde{x}_n + \tilde{x}_{n-1} = 0, \tag{9}$$

$$\tilde{w}_n = -(\tilde{y}_{n+1} + m_{yy}\tilde{y}_n)/m_{yw}, \quad \tilde{y}_{n+1} + 2\cos\pi\beta_y\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1} = 0, \tag{10}$$

где m_{xx}, m_{xv}, m_{vx}, m_{vv} и m_{yy}, m_{yw}, m_{wy}, m_{ww} — коэффициенты матриц монодромии M_x, M_y. В [14] считается, что все вычисления должны выполняться в окрестности вершины диаграммы устойчивости $a_c = 0.236993$, $q_c = 0.705996$ в предположении, что $\beta_x \approx 1$, $\beta_y \approx 0$, $m_{xx} \approx -1$, $m_{vv} \approx -1$, $m_{yy} \approx +1$, $m_{ww} \approx +1$, $m_{xv} \approx \Pi_x = 3.7502787$, $m_{yw} \approx \Pi_y = 6.8213726$, $m_{vx} \approx 0$, $m_{wy} \approx 0$, причем при описании движения по координате x нужно использовать лишь уравнения (9), а при описании движения по координате xy лишь уравнения (8). Однако при внимательном анализе можно убедиться, что формулы (7)–(10) сохраняют работоспособность также и в общем случае. В результате как движение по координате x, так и движение по координате y можно в зависимости от предпочтений исследователя в любой точке диаграммы устойчивости описывать как обычными стробоскопическими выборками (x_n, v_n), (y_n, w_n), так и знакопеременными стробоскопическими выборками $(\tilde{x}_n, \tilde{v}_n)$, $(\tilde{y}_n, \tilde{w}_n)$. Эти способы описания движения ионов будут полностью эквивалентны друг другу.

Представление Флоке [21,22] для решений линейных дифференциальных уравнений (2), (3) с периодическими коэффициентами дает формулы

$$x(\xi) = g(\xi)\big(C_1\exp(+i\beta_x\xi) + C_2\exp(-i\beta_x\xi)\big), \tag{11}$$

$$y(\xi) = h(\xi)\big(S_1\exp(+i\beta_y\xi) + S_2\exp(-i\beta_y\xi)\big), \tag{12}$$

где в режиме устойчивости параметры β_x, β_y — вещественные константы (безразмерные секулярные частоты), C_1, C_2, S_1, S_2 — свободные константы (вообще говоря, комплексные), задающие начальные условия при $\xi = 0$, $g(\xi), h(\xi)$ — периодические функции с безразмерным периодом $T' = \pi$, совпадающим с периодом коэффициентов линейных дифференциальных уравнений (2), (3).

В соответствии с (11) для стробоскопических отсчетов $x_n = x(\xi_n)$, вычисляемых в точках $\xi_n = nT'$, справедлива точная формула

$$x_n = x(n) = C_1 \exp(+i\pi\beta_x n) + C_2 \exp(-i\pi\beta_x n) \qquad (13)$$

(без ограничения общности можно считать, что нормировка периодической функции-множителя $g(\xi)$ в (11) выбирается так, что $g(0) = g(nT') = 1$). То, что формула (13) удовлетворяет рекуррентным соотношениям (7), можно убедиться прямой подстановкой. Формулу (13) также можно получить, решая однородное линейное конечно-разностное уравнение (7) с постоянными коэффициентами с помощью методов, описанных в [25].

Синусоидальная функция (13), гладким образом интерполирующая стробоскопические отсчеты x_n для нецелочисленных значений параметра n, совпадает со стробоскопическими отсчетами x_n при целочисленных n. Очевидно, что эта функция будет тождественно совпадать с общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x(n)}{dn^2} + \pi^2\beta_x^2 x(n) = 0. \qquad (14)$$

Для знакопеременных стробоскопических отсчетов $\tilde{x}_n = \exp(i\pi n)x_n$ интерполирующая синусоидальная функция имеет вид

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}(n) = C_1 \exp\bigl(-i\pi(1-\beta)n\bigr) + C_2 \exp\bigl(+i\pi(1-\beta)n\bigr), \qquad (15)$$

при этом функция (15) будет общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\tilde{x}(n)}{dn^2} + \pi^2(1-\beta_x)^2\,\tilde{x}(n) = 0. \qquad (16)$$

При целочисленных значениях параметра n значения континуальных функций $x(n)$ и $\tilde{x}(n)$ в точности совпадают с дискретными стробоскопическими отсчетами x_n и $\tilde{x}_n$.

Точно так же из формулы Флоке (12) выводятся синусоидальные функции, интерполирующие стробоскопические отсчеты для координаты y. Эти функции являются решениями континуальных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y(n)}{dn^2} + \pi^2\beta_y^2\, y(n) = 0, \qquad (17)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}(n)}{dn^2} + \pi^2(1-\beta_y)^2\,\tilde{y}(n) = 0. \qquad (18)$$

При целочисленных значениях параметра n значения континуальных функций $y(n)$ и $\tilde{y}(n)$ в точности совпадают с дискретными стробоскопическими отсчетами y_n и $\tilde{y}_n$.

Уравнения (14), (16)–(18) являются точными способами описания стробоскопических отсчетов (поскольку решения этих уравнений в точках $\xi = nT'$ идентичны стробоскопическим отсчетам) для любой точки внутри зоны устойчивости. Сравним уравнения (14), (16)–(18) с уравнениями

$$\frac{d^2y(n)}{dn^2} + 4\sin^2\frac{\pi\beta_y}{2}\, y(n) = 0, \qquad (19)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}(n)}{dn^2} + 4\cos^2\frac{\pi\beta_x}{2}\,\tilde{x}(n) = 0, \qquad (20)$$

которые получены в [14] для $\beta_x \approx 1$, $\beta_y \approx 0$. Из этого сравнения следует, что сделанный в [14] вывод о том, что для стробоскопических выборок безразмерная секулярная частота должна вычисляться по нелинейной формуле $\omega_s \approx (2/\pi)\sin\pi\beta/2$, а частота биений для стробоскопических выборок должна вычисляться по нелинейной формуле $\omega_b \approx (2/\pi)\cos\pi\beta/2$ (здесь учитывается переход от номеров стробоскопических отсчетов n к безразмерному времени $\xi = \pi n$) — это не вполне точный результат, который является следствием приближенного способа получения континуальных уравнений (19) и (20).

Разница между формулами (17) и (19) для секулярных частот, а также между формулами (16) и (20) для частот биений заключается в кубических поправках относительно малого параметра, описывающего отклонение рабочей точки от вершины диаграммы устойчивости. В рамках задачи, исследуемой в [14], эта разница представляется незначительной. Однако расширение области применимости формул (19), (20) на всю зону устойчивости радиочастотного квадруполя будет неправомочной операцией.

Расхождение между приближенными формулами [14] и точными формулами (14), (16)–(18) связано в первую очередь с тем, что замена конечно-разностных соотношений на дифференциальные соотношения с „мгновенными" производными, которое используется в [14], по самой своей природе является эмпирической и не слишком хорошо обоснованной процедурой. Использование этого метода может приводить к неприятным глобальным расхождениям между предположительно эквивалентными моделями, как это показано на конкретных примерах в [26]. Следует отметить, что подобного рода неприятности не являются редкими при использовании приближенных, качественных или „интуитивно очевидных" соображений при построении и анализе математических моделей для физических процессов [27–30].

Из точных уравнений (14), (16)–(18) следует, что в любой точке зоны устойчивости безразмерная секулярная частота стробоскопических выборок равна β, а безразмерная частота биений стробоскопических выборок равна $1-\beta$, где β — это параметр Флоке. Надо отметить, что данный результат находится в согласии с аналогичным результатом для континуального движения ионов [19,23]. Тем самым при описании движения ионов в радиочастотных квадрупольных полях нет оснований для введения специфических секулярных частот и соответствующих им специфических эффективных потенциалов для стробоскопических отсчетов координат и скоростей, как это делается в [14]. Альтернативная теория [19] для квадратичного эффективного потенциала в радиочастотных квадрупольных полях, которая основана на матричном представлении Флоке–Ляпунова [22], приводит к точно такому же выводу.

Использование формул [19] позволяет получить в окрестности вершины зоны устойчивости $a_c = 0.236994$, $q_c = 0.705996$ при малых вариациях $\delta a = a - a_c$ и $\delta q = q - q_c$ рабочих параметров a, q следующие оценки для секулярных частот и для минимаксного (не зависящего от начальной фазы радиочастотного напряжения) аксептанса квадруполя, где для коэффициентов сохранены три знака после запятой:

$$\beta_x \approx 1.000 - 0.716\sqrt{-\delta a - 1.154\delta q}, \tag{21}$$

$$\bar{V}_x^2 \approx r_0^2 \frac{(-\delta a - 1.154\delta q)}{2.783}, \tag{22}$$

$$\bar{R}_x^2 \approx r_0^2 \frac{(-\delta a - 1.154\delta q)}{0.378}, \tag{23}$$

$$\beta_y \approx 1.121\sqrt{\delta a - 0.640\delta q}, \tag{24}$$

$$\bar{V}_y^2 \approx r_0^2 \frac{(\delta a - 0.640\delta q)}{3.749}, \tag{25}$$

$$\bar{R}_y^2 \approx r_0^2 \frac{(-\delta a - 1.154\delta q)}{0.218}. \tag{26}$$

Технические детали проделанных вычислений содержатся в [31,32].

В приведенных формулах (21)–(26) величины β_x, β_y — безразмерные секулярные частоты в окрестности вершины зоны устойчивости для координатных осей x и y; $\bar{V}_x^2, \bar{V}_y^2$ — параметры, имеющие физический смысл квадрата нормированной скорости и характеризующие глубину псевдопотенциальных ям по x и y (максимальную начальную кинетическую энергию иона, при которой ион, стартуя с оси квадруполя, удерживается электрическим полем внутри межэлектродного промежутка $\pm r_0$); $\bar{R}_x^2, \bar{R}_y^2$ — параметры, имеющие физический смысл квадрата расстояния и характеризующие ширину псевдопотенциальных ям по x и y (максимальное начальное смещение иона с оси квадруполя, при которой ион, стартуя с нулевой начальной скоростью, удерживается электрическим полем внутри межэлектродного промежутка $\pm r_0$). Чтобы рабочая точка оставалась в пределах зоны устойчивости, должны быть выполнены приближенные неравенства $-\delta a - 1.154\delta q > 0$, $\delta a - 0.640\delta q > 0$. Полный или минимаксный аксептанс (множество начальных условий (x_0, v_0) и (y_0, w_0), при которых ион удерживается электрическим полем внутри межэлектродного промежутка $\pm r_0$ независимо от начальной фазы радиочастотного поля) с хорошей точностью описывается эллипсами фазового пространства [19]:

$$\frac{v_0^2}{V_x^2} + \frac{x_0^2}{R_x^2} \le 1, \quad \frac{w_0^2}{V_y^2} + \frac{y_0^2}{R_y^2} \le 1. \tag{27}$$

Сравнение выражений (22) и (25), а также результатов численного моделирования траекторий ионов с оценками глубины псевдопотенциальных ям в [14] показывает удовлетворительное совпадение этих результатов при малых отклонениях $0 \le \beta_y \le 0.1$ и $0 \le 1 - \beta_x \le 0.1$, когда рабочая точка (a, q) находится в окрестности вершины зоны устойчивости радиочастотного квадруполя.

Отметим еще одно важное отличие в полученных результатах. В работе [14] при оценке полного (минимаксного) аксептанса (27) линейного квадруполя в качестве ширины псевдопотенциальной ямы используется размер межэлектродной диафрагмы r_0. В действительности (см. [16,19]), ширина псевдопотенциальной ямы стремится к нулю при приближении к точкам (a, q) на границах диаграммы устойчивости (за исключением вырожденной точки $a = 0$, $q = 0$) в полном соответствии с формулами (23), (26). В конечном итоге это приводит к некорректной оценке полного аксептанса квадруполя в [14], хотя оценка глубины пседопотенциальных ям в [14] при вариации β_x, β_y точна с погрешностью порядка кубических поправок по малому параметру отклонения рабочей точки от вершины зоны устойчивости. При этом необходимо подчеркнуть, что идея анализа стробоскопических отсчетов и огибающих стробоскопических отсчетов вместо самих траекторий, предложенная в [14], обладает несомненным методологическим изяществом, а понятие глубины псевдопотенциальной ямы, введенное авторами [14] в самом общем случае без обычного допущения о малости параметра q и без привязки к конкретной модели псевдопотенциала, является важным вкладом в общую теорию радиочастотных квадруполей и заслуживает всяческого внимания.

Благодарности

Авторы благодарны редакции ЖТФ за возможность продолжить в широком кругу научную дискуссию, начатую в ЖЭТФ публикацией [14]. Авторы благодарны рецензенту настоящей работы за доброжелательный отзыв и важные уточнения, позволившие исправить некоторые технические ошибки и значительно улучшить текст работы.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках гос. задания № 075-00780-19-00 ИАП РАН.

Список литературы

[1] *Paul W., Steinwedel H.* // Zeitschrift für Naturforschung. 1953. Vol. A8. N 7. P. 448–450.

[2] *Слободенюк Г.И.* Квадрупольные масс-спектрометры. М.: Атомиздат, 1974. 272 с.

[3] *Dawson P.H.* Adv. in Electronics and Electron Physics. Vol. 53. Academic Press, 1980. P. 153–208.

[4] *March R.E., Hughes R.J.* Quadrupole Storage Mass Spectrometry. New York: John Wiley and Sons, 1989. 471 p.

[5] *Dawson P.H.* Quadrupole Mass Spectrometry and Its Applications. Woodbury: American Institute of Physics, 1995. 343 p.
[6] *Major F.G., Gheorghe V.N., Werth G.* Charged Particle Traps. Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement. Springer-Verlag, 2005. 355 p.
[7] *Werth G., Gheorghe V.N., Major F.G.* Charged Particle Traps II. Applications. Springer-Verlag, 2009. 276 p.
[8] *Мак-Лахлан Н.В.* Теория и приложения функций Матье. М.: ИИЛ, 1953. 476 с.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Сер. Теоретическая физика. Т. I). М.: Физматгиз, 1958. С. 119–123.
[10] *Гапонов А.В., Миллер М.А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 242–243.
[11] *Gerlich D.* In: Adv. in Chemical Physics Series, vol. LXXXII / Ed. by C.-Y. Ng, M. Baer. NY.: John Wiley & Sons, 1992. P. 1–197.
[12] *Sudakov M.* // Int. J. Mass Spectrom. 2001. Vol. 206. P. 27–43.
[13] *Baranov V.I., Bandura D.R., Tanner S.D.* // Int. J. Mass Spectrom. 2005. Vol. 247. P. 40–47.
[14] *Судаков М.Ю., Апацкая М.В.* // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. С. 1–8.
[15] *Gao C., Douglas D.J.* // J. Am. Soc. Mass Spectrom. 2013. Vol. 24. P. 1848–1852.
[16] *Douglas D.J., Berdnikov A.S., Konenkov N.V.* // Int. J. Mass Spectrom. 2015. Vol. 377. P. 345–354.
[17] *Reilly P.T.A., Brabeck G.F.* // Int. J. Mass Spectrom. 2015. Vol. 392. P. 86–90.
[18] *Brabeck G.F., Reilly P.T.A.* // J. Am. Soc. Mass Spectrom. 2016. Vol. 27. P. 1122–1127.
[19] *Berdnikov A.S., Douglas D.J., Konenkov N.V.* // Int. J. Mass Spectrom. 2017. Vol. 421. P. 204–223.
[20] *Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В.* // Научно-технич. ведомости СПбГПУ. Физ. мат. науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 52–64.
[21] *Floquet G.* // Ann. Sci. de l'École Norm. Sup. 1883. Vol. 12. P. 47–88.
[22] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
[23] *Konenkov N.V., Sudakov M., Douglas D.J.* // J. Am. Soc. Mass Spectrom. 2002. Vol. 13. P. 597–613.
[24] *Verentchikov A., Berdnikov A., Yavor M.* // Physics Procedia. 2008. Vol. 1. P. 87–97.
[25] *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. Изд. 2-е доп. М.: ГИФМЛ, 1959. 400 с.
[26] *Бердников А.С., Веренчиков А.Н., Коненков Н.В.* // Масс-спектрометрия. 2017. Т. 14. С. 176–189.
[27] *Буляница А.Л., Курочкин В.Е.* // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.
[28] *Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.* // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.
[29] *Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.* // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28-40.
[30] *Буляница А.Л.* // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.
[31] *Бердников А.С., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В.* // Научное приборостроение. 2018. Т. 28. № 3. С. 90–100.
[32] *Бердников А.С., Кузьмин А.Г., Масюкевич С.В.* // Научное приборостроение. 2018. Т. 28. № 4. С. 135–145.