

Дисперсия и затухание волн Рэлея на одномерной статистической шероховатости свободной поверхности гексагонального кристалла

© В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет),
115409 Москва, Россия

E-mail: kosachev@theor.mephi.ru

(Поступила в Редакцию 23 декабря 2002 г.
В окончательной редакции 4 марта 2003 г.)

В аналитическом виде получены выражения для дисперсии и затухания волн Рэлея, распространяющихся в произвольном направлении вдоль статистически шероховатой свободной поверхности гексагонального кристалла (Z -срез). Рассматривается шероховатость — канавки случайной решетки — одномерного типа (функция профиля шероховатости зависит от одной координаты). Использовались результаты, полученные ранее при решении аналогичной задачи для шероховатости двумерного типа. Найденные выражения для дисперсии и затухания волн Рэлея исследованы аналитически и численно во всем диапазоне частот, достижимых в рамках теории возмущений. Показано, что характер дисперсии и затухания рэлеевских волн качественно совпадает со случаем изотропной среды.

В работе [1] проведено детальное исследование дисперсии и затухания волн Рэлея на двумерной статистической шероховатости свободной поверхности гексагонального кристалла. Вместе с тем представляет интерес изучение особенностей поведения дисперсии и затухания волн Рэлея на одномерной статистической шероховатости (канавки случайной решетки).

Рассеянию волн на одномерной статистической шероховатости свободной границы изотропного твердого тела посвящен ряд работ [2–15]. В [2–5] изучено рассеяние объемных волн детерминированными и периодическими шероховатостями, в [6–8] рассматривается рассеяние объемных волн статистическими шероховатостями для скалярного случая (т.е. когда нет поверхностных и сдвиговых волн). Затуханию волн Рэлея посвящены экспериментальная [9] и теоретическая работа [10], в которой методом Рэлея получен закон дисперсии рэлеевской волны. При этом мнимая часть сдвига частоты в [10] характеризует затухание волны Рэлея. В работах [11–15] исследование затухания рэлеевской волны проведено с использованием подхода теории рассеяния. В [11,13] исследовано рассеяние поверхностных рэлеевских и объемных акустических волн. Заметим, что в работах [10,11,13,15] исследование проведено для рэлеевской волны, распространяющейся вдоль оси x , т.е. перпендикулярно канавкам решетки.

В работе [16] получены выражения для дисперсии и затухания волн Рэлея и поверхностных волн SH-поляризации на статистически шероховатой свободной поверхности изотропной среды с помощью модифицированного метода среднего поля при произвольном угле падения на канавки решетки. При этом при выводе выражений для дисперсии и затухания на статистической шероховатости одномерного типа одномерная шероховатость рассматривалась как частный случай двумерной.

В настоящей работе аналогично [16] из выражений [1] для гексагонального кристалла с осью симметрии ше-

стого порядка, перпендикулярной поверхности (Z -срез), получены дисперсия фазовой скорости и коэффициент затухания волн Рэлея на одномерной статистической шероховатости при произвольном угле падения на канавки случайной решетки. Полученные выражения исследованы аналитически и численно во всем достижимом в рамках теории возмущений диапазоне частот.

1. Постановка задачи

Геометрия задачи приведена на рис. 1. Гексагональный кристалл с осью симметрии шестого порядка, параллельной оси x_3 , ограничен свободной статистически шероховатой поверхностью $x_3 = \xi(x_1)$ и занимает полупространство $x_3 \geq \xi(x_1)$, где $\xi(x_1)$ — функция профиля одномерной шероховатости. Гексагональный кристалл рассматривается в приближении упругого континуума и характеризуется плотностью массы ρ и тензором модулей упругости $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. Одномерная шероховатость $\xi(x_1)$ характеризуется среднеквадратичной амплитудой шероховатости δ и корреляционным радиусом шероховатости a . Вдоль статистически шероховатой поверхности гексагональной среды в плоскости $x_3 = 0$ (Z -срез)

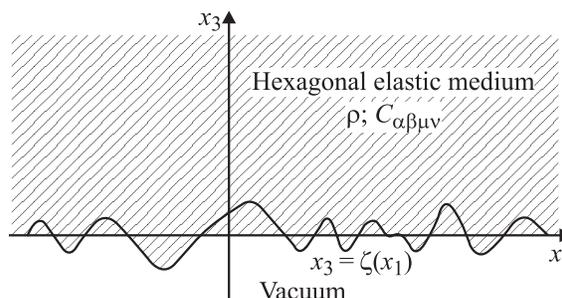


Рис. 1. Геометрия полубесконечной однородной упругой гексагональной среды с одномерной шероховатостью свободной поверхности $x_3 = \xi(x_1)$.

распространяется волна Рэлея. Требуется найти дисперсию фазовой скорости и затухание рэлеевской волны, обусловленные шероховатостью поверхности.

Будем решать поставленную задачу в предположении слабой шероховатости $\delta \ll \lambda$, где λ — длина рэлеевской волны. Поскольку сама функция профиля шероховатой поверхности неизвестна, будем описывать поверхность ее статистическими свойствами. В случае одномерной шероховатости функция профиля $\xi(x_1)$ обладает следующими статистическими свойствами:

$$\langle \xi(x_1) \rangle = 0, \tag{1}$$

$$\langle \xi(x_1)\xi(x'_1) \rangle = \delta^2 W(|x_1 - x'_1|), \tag{2}$$

или в Фурье-представлении

$$\langle \xi(k_1) \rangle = 0, \tag{3}$$

$$\langle \xi(k_1)\xi(q_1) \rangle = \delta^2 g(|k_1|)(2\pi)\delta(k_1 + q_1), \tag{4}$$

$$\xi(k_1) = \int dx_1 \exp(-ik_1x_1)\xi(x_1). \tag{5}$$

Для нахождения явных аналитических выражений используем гауссов вид фактора $g(|k_1|)$

$$g(|k_1|) = a\sqrt{\pi} \exp(-k_1^2 a^2/4). \tag{6}$$

2. Формальный переход от двумерного к одномерному случаю

Задача, аналогичная поставленной выше, в случае двумерной шероховатости $x_3 = \xi(x_1, x_2)$ решена в [1]. При этом общий вид дисперсионного соотношения (выражения (25), (26) работы [1]) можно записать в виде

$$\Delta\omega = \delta^2 \int \frac{dq_1 dq_2}{(2\pi)^2} g(|\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}|) R(q_{\parallel}, k_{\parallel} | \omega), \tag{7}$$

где интеграл берется по всей плоскости $q_3 = 0$. Рассмотрим одномерную шероховатость как частный случай двумерной. Тогда

$$\xi(k_1, k_2) = \int d^2x_{\parallel} \exp(-ik_{\parallel}x_{\parallel})\xi(x_1) = (2\pi)\delta(k_2)\xi(k_1), \tag{8}$$

$$\langle \xi(\mathbf{k}_{\parallel})\xi(\mathbf{q}_{\parallel}) \rangle = \delta^2 g(|k_1|)\delta(k_2)(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}). \tag{9}$$

Для двумерной шероховатости уравнение (9) имеет вид

$$\langle \xi(\mathbf{k}_{\parallel})\xi(\mathbf{q}_{\parallel}) \rangle = \delta^2 g(|\mathbf{k}_{\parallel}|)(2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{q}_{\parallel}), \tag{10}$$

а выражение (6)

$$g(|\mathbf{k}_{\parallel}|) = \pi a^2 \exp(-k_{\parallel}^2 a^2/4). \tag{11}$$

Сравнивая (9) и (10), можно заметить, что для того, чтобы получить формулы, описывающие дисперсию и затухание волн Рэлея на одномерной статистической

шероховатости, достаточно в выражениях для двумерной шероховатости сделать формальную замену

$$g(\mathbf{k}_{\parallel}) \rightarrow g(\mathbf{k}_{\parallel}) = (2\pi)\delta(k_2)g(|k_1|). \tag{12}$$

Пусть волна падает на канавки случайной решетки под произвольным углом ψ (угол ϕ отсчитывается от нормали к канавкам, параллельным оси x_2). Тогда

$$\mathbf{k}_{\parallel} = k_{\parallel}(\cos \psi, \sin \psi). \tag{13}$$

Заметим, что из-за трансляционной инвариантности вдоль оси x_2 сохраняется компонента волнового вектора, параллельная этой оси. Действительно, согласно (12),

$$\mathbf{q}_{\parallel} = (q_1, k_{\parallel} \sin \psi) = (q_1, k_2), \tag{14}$$

$$q_{\parallel} = q_{\parallel}(q_1) = \sqrt{q_1^2 + k_{\parallel}^2 \sin^2 \psi}. \tag{15}$$

Следовательно, угол ψ между \mathbf{k}_{\parallel} и \mathbf{q}_{\parallel} можно записать как

$$\cos \psi = \frac{k_1 q_1 + k_2 q_2}{k_{\parallel} q_{\parallel}} = \frac{q_1 \cos \psi + k_{\parallel} \sin^2 \psi}{\sqrt{q_1^2 + k_{\parallel}^2 \sin^2 \psi}}, \tag{16}$$

$$\sin \psi = \frac{k_1 q_2 - k_2 q_1}{k_{\parallel} q_{\parallel}} = \frac{k_{\parallel} \sin \psi \cos \psi - q_1 \sin \psi}{\sqrt{q_1^2 + k_{\parallel}^2 \sin^2 \psi}}. \tag{17}$$

Подставляя в (7) формулы (12)–(17), получаем выражение для дисперсии и затухания волн Рэлея на одномерной шероховатости поверхности

$$\Delta\omega(k_{\parallel}, \psi) = \nu_1(k_{\parallel}, \psi) - i\nu_2(k_{\parallel}, \psi), \tag{18}$$

где вещественная часть $\nu_1(k_{\parallel}, \psi)$ описывает дисперсию фазовой скорости, а мнимая $\nu_2(k_{\parallel}, \psi)$ пропорциональна обратной длине затухания.

Далее удобно перейти к изучению безразмерной функции ω_{12}

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = \frac{\delta^2}{a^2} \omega_{12}(\xi, \psi), \tag{19}$$

где $\xi = k_{\parallel} a$ — безразмерная переменная, $\omega_R = c_R k_{\parallel}$ (c_R — фазовая скорость волны Рэлея на плоской поверхности). Тогда $\omega_{12}(\xi, \psi)$ можно записать в виде

$$\omega_{12}(\xi, \omega) = -\frac{d}{2\sqrt{\pi}} \xi^3 (A(\xi, \psi) + B(\xi, \psi) + E(\xi, \psi)) + \xi^2 l, \tag{20}$$

функции $A(\xi, \psi)$, $B(\xi, \psi)$, $E(\xi, \psi)$ и коэффициенты d и l приведены в Приложении. Аналогично (18) удобно записать $\omega_{12}(\xi, \psi)$ в виде, выделяя вещественную и мнимую части

$$\omega_{12} = \omega_1 - i\omega_2, \tag{21}$$

которые, однако, ввиду громоздкости не приводятся.

Заметим, что выражение для $\omega_{12}(\xi, \psi)$, симметричное при замене $\psi \rightarrow \psi + \pi$, зависит от ψ только как $\cos \psi$ и, следовательно, симметрично при замене $\psi \rightarrow -\psi$, поэтому множество углов ψ можно рассматривать в диапазоне $\psi \in [0, \pi/2]$. Полученная симметрия следует также и из постановки задачи.

3. Длинноволновый предел

В длинноволновом пределе ($\lambda \gg a$) $\xi \ll 1$. При этом для $\omega_2(\xi, \psi)$ получается выражение вида

$$\omega_2(\xi, \psi) = \frac{\Lambda(\psi)}{2} \xi^3, \quad (22)$$

где $\Lambda(\psi)$ зависит только от ψ и коэффициентов тензора модулей упругости и ввиду громоздкости не приводится. Поскольку $v_2(k_{\parallel}, \psi) = c_R/2L(k_{\parallel}, \psi)$ (см. [17]), для обратной длины затухания рэлеевской волны $1/L$ имеем

$$\frac{1}{L} = \frac{\delta^2}{a^3} \xi^4 \Lambda(\psi). \quad (23)$$

Для вещественной части ω_{12} интеграл в основном будет формироваться при больших значениях переменной интегрирования t , при этом функции $D_n(t, \psi)$ с нечетным индексом n будут равны нулю. В результате выражение для $\omega_1(\xi, \psi)$ принимает вид

$$\omega_1(\xi, \psi) = -\Phi(\psi) \xi, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) = & \frac{d}{a_1 \sqrt{\pi}} \left[a_1 h^{3/2} (1 - \cos(4\psi)) + (\sqrt{a_2 + b_2} + \sqrt{a_2 - b_2}) \right. \\ & \times \left. (2(a_1 - h)^2 + h^2 + 4h(a_1 - h) \cos(2\psi) + h^2 \cos(4\psi)) \right], \\ a_2 = & \frac{1}{2} \left(a_1 - 2 \frac{c_{13}}{c_{33}} \right), \quad b_2 = \sqrt{a_2 - \frac{c_{11}}{c_{33}}}, \end{aligned}$$

а коэффициенты d, a_1, h приведены в Приложении.

С учетом вещественной части (19) для относительного изменения фазовой скорости рэлеевской волны имеем

$$\frac{\Delta c(\xi, \psi)}{c_R} = -\frac{\delta^2}{a^2} \Phi(\psi) \xi. \quad (25)$$

4. Численный расчет

Наряду с аналитическим рассмотрением были численно получены относительное изменение фазовой скорости и обратная длина затухания волны Рэля. В качестве примера приведем численный расчет выражений (20), (22), (24) для типичного гексагонального кристалла ZnO (коэффициенты тензора модулей упругости для ZnO взяты из [18]). На рис. 2, 3 приведены графики вещественной и мнимой частей $\omega_{12}(\xi, \psi)$ соответственно, из которых видна картина дисперсии и затухания волн Рэля. Из рис. 2 следует, в частности, что дисперсия фазовой скорости на шероховатой поверхности, как и в изотропном случае, может быть больше, чем на плоской, при $\xi \sim 1$ и ψ в диапазоне углов падения от ≈ 55 до 90° . В длинноволновом пределе $\xi \ll 1$ выполнены численные расчеты коэффициентов $\Phi(\psi)$ и $\Lambda(\psi)$, графики которых показаны на рис. 4 и 5 соответственно.

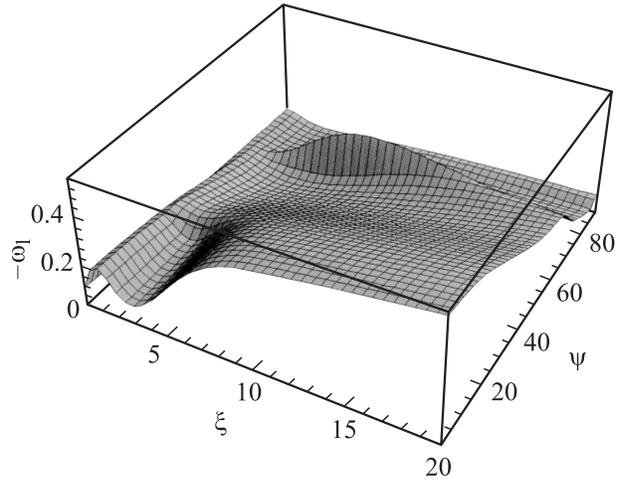


Рис. 2. График зависимости вещественной части комплексного сдвига частоты $-\omega_1$ от безразмерной переменной ξ и угла падения ψ рэлеевской волны для кристалла ZnO.

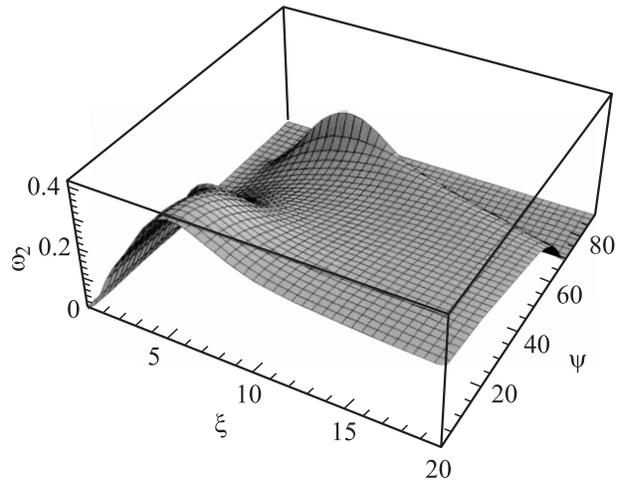


Рис. 3. График зависимости мнимой части комплексного сдвига частоты ω_2 от безразмерной переменной ξ и угла падения ψ рэлеевской волны для кристалла ZnO.

Из них видно, в частности, что при распространении волн Рэля под большими углами падения ψ они слабо затухают, в то время как дисперсия отлична от нуля. Заметим, что выражение (20) было просчитано численно для большинства известных гексагональных кристаллов, при этом полученные графики качественно совпадают.

Итак, выше в аналитическом виде найдены выражения для дисперсии и затухания волн Рэля, распространяющихся вдоль произвольного направления свободной статистически шероховатой поверхности гексагонального кристалла. При этом считается, что ось симметрии шестого порядка перпендикулярна поверхности кристалла (Z -срез), а рассматриваемая шероховатость — шероховатость одномерного типа (канавки случайной решетки).

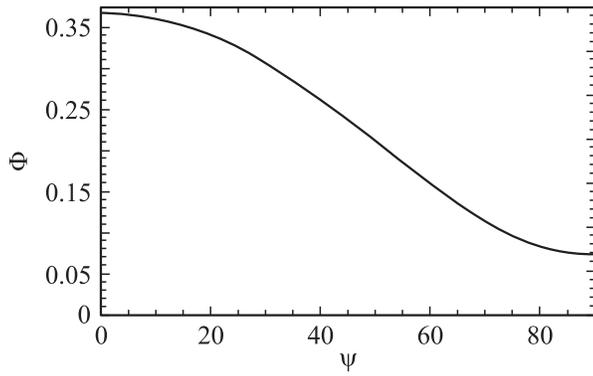


Рис. 4. Зависимость функции Φ от угла падения ψ для ZnO в пределе длинных волн ($\xi \ll 1$).

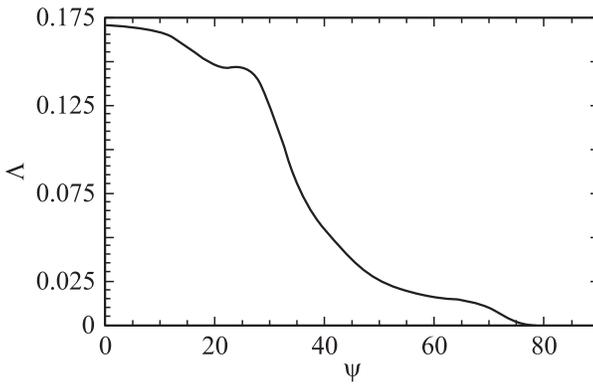


Рис. 5. Зависимость функции Λ от угла падения ψ для ZnO в пределе длинных волн ($\xi \ll 1$).

Выражения получены на основании результатов [1] для дисперсии и затухания волн Рэлея на шероховатости двумерного типа с помощью методики, описанной в [16]. Полученное дисперсионное соотношение (20) в случае изотропной среды переходит в выражение (5.12) работы [16]. Относительное изменение фазовой скорости и обратная длина затухания рэлеевской волны просчитаны численно для большинства известных гексагональных кристаллов во всем диапазоне длин волн, достижимых в рамках теории возмущений, при любых углах падения на канавки решетки. Полученные графики для различных гексагональных кристаллов качественно совпадают между собой и с графиками для изотропной среды [16] и отличаются лишь количественно, что связано с изотропией Z-среза гексагонального кристалла. Найдено, что, как и в изотропном случае, дисперсия фазовой скорости на шероховатой поверхности может быть больше, чем на плоской. Аналитически и численно исследован длинноволновый предел, при этом для аналитических результатов получено, что обратная длина затухания пропорциональна четвертой, а относительное изменение фазовой скорости — первой степени частоты рэлеевской волны, что совпадает с изотропным случаем.

Приложение

$$A(\xi, \psi) = \int_{\frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2 \tilde{a}_{11}(t)} \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (\varepsilon + th^2) D_0(t, \psi) - \varepsilon \sqrt{t} h D_1(t, \psi) - \frac{\varepsilon^{3/2}}{2} D_2(t, \psi) + h \varepsilon \sqrt{t} D_3(t, \psi) - \frac{h^2 \sqrt{\varepsilon} t}{2} D_4(t, \psi) \right\}, \quad (\text{П1})$$

$$B(\xi, \psi) = -P \int_{\frac{\sin^2 \psi}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{2} dt \frac{\tilde{\alpha}_p(t)}{\tilde{\alpha}_m(t) + (1 - a_1 t) \sqrt{t - 1}} \times \sum_{n=0}^4 \Phi_n(t) D_n(t, \psi), \quad (\text{П2})$$

$$E(\xi, \psi) = i \pi d \frac{2 \cos(\psi)}{\varepsilon} \left\{ \left(a_1^2 - 2a_1 h + \frac{3}{2} h^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} + (a_1 - \varepsilon)^2 - (a_1 - h) \gamma \right) D_0\left(\frac{1}{\varepsilon}, \psi\right) + \varepsilon (\gamma + h - 2a_1) \times D_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, \psi\right) + \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + 2h(a_1 - h) - h\gamma \right) D_2\left(\frac{1}{\varepsilon}, \psi\right) - h \varepsilon D_3\left(\frac{1}{\varepsilon}, \psi\right) + \frac{h^2}{2} D_4\left(\frac{1}{\varepsilon}, \psi\right) \right\}, \quad (\text{П3})$$

$$l = -\frac{d}{\alpha_p \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \left(\varepsilon \left(1 + \frac{c_{13}}{c_{33}} \right) - a_1 \right) \left(\varepsilon \left(\frac{c_{13}}{c_{33}} - 1 \right) + a_1 \right), \quad (\text{П4})$$

$$d = \frac{(1 - \varepsilon) \left(\frac{c_{11}}{c_{44}} - \varepsilon \right) \alpha_p \sqrt{\varepsilon}}{\left(2a_1 - \frac{c_{11}}{c_{44}} + 1 \right) \varepsilon^2 - \varepsilon a_1 \left(\frac{c_{11}}{c_{44}} + 3 \right) + 2a_1 \frac{c_{11}}{c_{44}}}. \quad (\text{П5})$$

В выражениях (П1)–(П5) использованы следующие обозначения:

$$D_n(t, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon t - \sin^2 \psi}} \times \left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{4} \left(\cos \psi - \sqrt{\varepsilon t - \sin^2 \psi} \right)^2\right) \cos(n\Theta(\eta, \psi)) + \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} \left(\cos \psi + \sqrt{\varepsilon t - \sin^2 \psi} \right)^2\right) \cos(n\Theta(-\eta, \psi)) \right],$$

$$\cos(\Theta(\eta, \psi)) = \frac{\eta \cos \psi + \sin^2 \psi}{\sqrt{\varepsilon t}},$$

$$\eta = \sqrt{\varepsilon t - \sin^2 \psi}, \quad \psi \in [0, \pi/2],$$

$$\Phi_0(t) = t \sqrt{t - 1} \frac{2(a_1 - h)^2 + h^2}{2} + \frac{\varepsilon \sqrt{t - 1}}{2} + \frac{t 2(a_1 - h)}{\varepsilon \alpha_p \tilde{\alpha}_p(t)} \times \left(\varepsilon \frac{c_{33} + c_{13}}{c_{33}} - a_1 \right) \left(\tilde{\alpha}_m(t) - \frac{c_{13}}{c_{33}} \sqrt{t - 1} \right) + \tilde{\alpha}_m(t) (a_1 - \varepsilon),$$

$$\Phi_1(t) = -\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\varepsilon}\alpha_p\tilde{\alpha}_p(t)}\left(\varepsilon\frac{c_{33}+c_{13}}{c_{33}}-a_1\right)$$

$$\times\left(\tilde{\alpha}_m(t)-\frac{c_{13}}{c_{33}}\sqrt{t-1}\right)-\sqrt{\varepsilon t(t-1)}(2a_1-h),$$

$$\Phi_2(t) = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{t-1}+2h(a_1-h)t\sqrt{t-1}+\frac{2ht}{\varepsilon\alpha_p\tilde{\alpha}_p(t)}$$

$$\times\left(\varepsilon\frac{c_{33}+c_{13}}{c_{33}}-a_1\right)\left(\tilde{\alpha}_m(t)-\frac{c_{13}}{c_{33}}\sqrt{t-1}\right),$$

$$\Phi_3(t) = -h\sqrt{\varepsilon t(t-1)}, \quad \Phi_4(t) = \frac{h^2}{2}t\sqrt{t-1},$$

$$\alpha_p = \tilde{\alpha}_p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \tilde{\alpha}_p(t) = \tilde{\alpha}_{t1} + \tilde{\alpha}_{t2}, \quad \tilde{\alpha}_m(t) = \frac{\tilde{\alpha}_{t1}\tilde{\alpha}_{t2}}{\sqrt{t-1}},$$

$$\tilde{\alpha}_{t1}^2 = \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 4y_2}\right), \quad \tilde{\alpha}_{t2}^2 = \frac{1}{2}\left(z - \sqrt{z^2 - 4y_2}\right),$$

$$\operatorname{Re} \tilde{\alpha}_{t1,t2} > 0, \quad \operatorname{Im} \tilde{\alpha}_{t1,t2} < 0,$$

$$y_2 = \frac{c_{11}}{c_{33}}(t-1)\left(t - \frac{c_{44}}{c_{11}}\right),$$

$$z = \left(a_1 - 2\frac{c_{13}}{c_{33}}\right)t - \left(1 + \frac{c_{44}}{c_{33}}\right),$$

$$\tilde{\alpha}_{tt}(t) = \begin{cases} \sqrt{ht-1}, & ht-1 \geq 0, \\ -i\sqrt{1-ht}, & ht-1 < 0, \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}c_{44}}, \quad h = \frac{c_{11} - c_{12}}{2c_{44}},$$

$$\gamma = \frac{2\varepsilon\left(\varepsilon\left(1 + \frac{c_{13}}{c_{33}}\right) - a_1\right)^2}{a_1^2(1-\varepsilon) - \left(1 + \frac{2c_{13}+c_{11}}{c_{33}} - a_1\right)\varepsilon^2},$$

$$\left(1 - \frac{c_{44}}{c_{33}}\right)\varepsilon^3 + \left(\frac{c_{11}}{c_{33}} - 1 - 2a_1\right)\varepsilon^2$$

$$+ a_1(2 + a_1)\varepsilon - a_1^2 = 0, \quad 0 < \varepsilon < \min(1, a_1).$$

В выражении (П2) символ P обозначает интегрирование в смысле главного значения Коши, а полюс находится в точке $t_0 = \frac{1}{\varepsilon}$.

Список литературы

- [1] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин. ФТТ **45**, 2, 369 (2003).
- [2] В.И. Гигорьевский, Ю.В. Гуляев, И.М. Котелянский, Р.А. Мишкиникс, В.П. Плесский, П.Ф. Рутковский. Акуст. журн. **31**, 5, 711 (1985).
- [3] А.Д. Лапин. Акуст. журн. **28**, 3, 359 (1982).
- [4] R. Sato, J. Seismolog. Soc. Jap. Zisin. B **1**, 8 (1955).
- [5] I.I. Abubakar. Proc. Camb. Phil. Soc. **58**, 1, 136 (1962).
- [6] Ф.Г. Басс, И.М. Фукс. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. Наука, М. (1972). 391 с.
- [7] А.Г. Воронович. Акуст. журн. **30**, 6, 747 (1984).
- [8] Ю.Н. Лысанов. Акустика океана. Наука, М. (1974). 231 с.
- [9] M. De Billy, G. Quentin, E. Varon. J. Appl. Phys. **61**, 6, 2140 (1987).

- [10] A.A. Maradudin, X. Huang. Phys. Rev. B **36**, 15, 7827 (1987).
- [11] В.В. Косачёв, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. Препринт МИФИ № 034-88. М. (1988).
- [12] A.P. Mayer, M. Lehner. Waves in Random Media **4**, 3, 321 (1994).
- [13] В.В. Косачёв, Ю.Н. Лохов, В.Н. Чуков. ФТТ **32**, 7, 2045 (1990).
- [14] V.V. Kosachev, Yu.N. Lohov, V.N. Chukov. Solid State Commun. **73**, 8, 535 (1990).
- [15] С.З. Дунин, Г.А. Максимов. Препринт МИФИ № 032-88. М. (1988).
- [16] V.V. Kosachev, A.V. Shchegrov. Ann. Phys. **240**, 2, 225 (1995).
- [17] A.G. Eguiluz, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **28**, 2, 728 (1983).
- [18] O.L. Anderson. Phys. Acoust. B **3**, 80 (1965).