

03

Формирование слабых особенностей на поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле

© Е.А. Кочурин

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
E-mail: kochurin@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 24 октября 2018 г.

Проведено численное моделирование процесса взаимодействия нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в сильном тангенциальном электрическом поле (эффектами силы тяжести и капиллярности пренебрегается). Показано, что на границе жидкости за конечное время формируются особые точки, в которых существенно увеличивается кривизна границы, испытывая разрыв. Амплитуда и углы наклона границы остаются малыми. О сингулярном поведении системы свидетельствуют спектральные функции поверхности жидкости; они приобретают степенную зависимость. Вблизи сингулярности кривизна границы демонстрирует автомодельное поведение, характерное для слабых корневых особенностей.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.03.47262.17573

Описание нелинейной динамики границ жидкостей — чрезвычайно сложная для аналитического исследования задача. Во многих нелинейных моделях движения жидкостей со свободными или контактными границами могут возникать так называемые слабые особенности, при формировании которых на границе жидкости образуются области с бесконечной кривизной. Для таких особенностей амплитуда и крутизна границы (углы наклона) остаются малыми. Слабые особенности могут возникать при развитии неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца [1,2], Тонкса–Френкеля [3,4] и даже при инерционном движении жидкости со свободной границей [5] (сила тяжести и капиллярные силы не включаются в рассмотрение). Важно, что при описании слабых особенностей не нарушаются критерии применимости слабо нелинейных моделей, позволяющих получать точные решения уравнений движения на основе метода характеристик. Другим типом являются сильные особенности, для которых разрыв испытывают амплитуда или крутизна границы. Примерами таких особенностей являются сильно нелинейные структуры (каспы, конусы, углы и т.п.), формирующиеся, например, на поверхности жидкости в поле тяжести [6], на границах жидкостей в сильном электрическом поле [7–9], а также в ситуациях, когда граница жидкости движется без ускорения [10,11].

Пограничные гидродинамические неустойчивости могут подавляться внешним электрическим полем, направленным тангенциально к невозмущенной границе непроводящих жидкостей [12]. С этим свойством горизонтального электрического поля связан значительный интерес к исследованию его влияния на нелинейную динамику границ жидкостей (см. [13–16]). В работах [17–19] найдены точные частные решения уравнений движения диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью, помещенной в сильное горизонтальное электрическое поле (влияние капиллярных и гравитационных сил пренебрежимо мало). Эти решения описывают распространение нелинейных поверхностных волн без искажений в направлении или против направления внешнего поля.

Численное моделирование сильно нелинейной динамики поверхности жидкости показало, что взаимодействие встречных волн приводит к формированию на границе особых точек, в которых напряженность поля и скорость жидкости испытывают разрыв, а кривизна поверхности неограниченно возрастает [20]. Формирование таких разрывов сопровождается опрокидыванием поверхностных волн (углы наклона стремятся к $\pi/2$), что затрудняет аналитическое описание границы жидкости.

В настоящей работе рассмотрена динамика поверхности непроводящей жидкости в тангенциальном электрическом поле на основе более простой — слабо нелинейной модели. Далее показано, что при взаимодействии встречных волн граница жидкости демонстрирует поведение, очень близкое к формированию слабых особенностей, наблюдаемых в различных физических ситуациях [1–5]. Этот факт свидетельствует в пользу интегрируемости полных уравнений электрогидродинамики жидкости со свободной поверхностью в сильном тангенциальном электрическом поле.

Рассмотрим потенциальное течение глубокой несжимаемой идеальной диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью, помещенной во внешнее однородное горизонтальное электрическое поле. Поскольку в исследуемой задаче есть анизотропия, связанная с выделенным направлением электрического поля, будем рассматривать только плоскосимметричные поверхностные волны, распространяющиеся параллельно внешнему полю. Положим, что напряженность поля направлена вдоль оси x (ось y декартовой системы координат направлена по нормали к ней) и по абсолютной величине равна E . Функция $\eta(x, t)$ будет задавать отклонение границы от невозмущенного состояния $y = 0$. Дисперсионное соотношение для линейных волн на границе имеет вид [17–19]:

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad c = E \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon / \rho},$$

где ω — частота, k — модуль волнового вектора, ε_0 — электрическая постоянная, ε и ρ — проницаемость

и плотность жидкости соответственно ($\varepsilon \gg 1$), c — скорость распространения волн. Для дальнейшего анализа удобно ввести безразмерные переменные: $\eta \rightarrow \eta/k_0$, $x \rightarrow x/k_0$, $t \rightarrow t/k_0c$, где k_0 — характерное значение волнового числа. В безразмерных переменных скорость распространения волн равна единице.

Уравнения движения границы с точностью до квадратично-нелинейных слагаемых имеют вид [17]:

$$\psi_t = \hat{H}\eta_x + \hat{H}(\eta\hat{H}\eta_x)_x + (\eta\eta_x)_x + \frac{1}{2}(\hat{H}\eta_x^2 - \eta_x^2) + \frac{1}{2}(\hat{H}\psi_x^2 - \psi_x^2), \quad (1)$$

$$\eta_t = -\hat{H}\psi_x - \hat{H}(\eta\hat{H}\psi_x)_x - (\eta\psi_x)_x, \quad (2)$$

где ψ — функция, определяющая потенциал скорости жидкости на границе, \hat{H} — преобразование Гильберта, в фурье-пространстве его действие определяется как $\hat{H}f_k = i\text{sign}(k)f_k$. Уравнения движения границы (1), (2) допускают пару точных решений в виде $\psi = \pm\hat{H}\eta$. Эти решения описывают бездисперсионное распространение нелинейных волн в направлении либо против направления внешнего электрического поля (в зависимости от знака перед $\hat{H}\eta$). Энергия системы выражается в следующем виде:

$$H = H_0 + H_1 = -\frac{1}{2} \int (\psi\hat{H}\psi_x + \eta\hat{H}\eta_x) dx - \frac{1}{2} \int \eta([\hat{H}\psi_x^2 - \psi_x^2] + [\hat{H}\eta_x^2 - \eta_x^2]) dx,$$

где H_0 — слагаемое, соответствующее линейному приближению, H_1 — квадратично-нелинейному.

Для моделирования системы (1), (2) возьмем начальные условия в виде

$$\eta(x, 0) = \eta_1 + \eta_2 = a_1 \cos(k_1x) + a_2 \cos(k_2x),$$

$$\psi(x, 0) = \hat{H}\eta_1 - \hat{H}\eta_2.$$

В линейном приближении эти условия соответствуют двум периодическим волнам амплитуды $a_{1,2}$ и длины волны $\lambda_{1,2} = 2\pi/k_{1,2}$, распространяющимся в противоположных направлениях.

Итак, представим результаты численного решения системы (1), (2) для параметров $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.05$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Вычисления проводились при помощи псевдоспектральных методов расчета пространственных производных и интегральных операторов с полным числом гармоник $N = 2^{15} = 32768$. Интегрирование по времени производилось явным методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с шагом $dt = 5 \cdot 10^{-7}$. Для стабилизации численной схемы высшие гармоники с волновым числом $k \geq 10923$ приравнивались к нулю на каждом шаге интегрирования по времени. Отметим высокую точность используемых численных методов. К концу расчетного интервала относительное

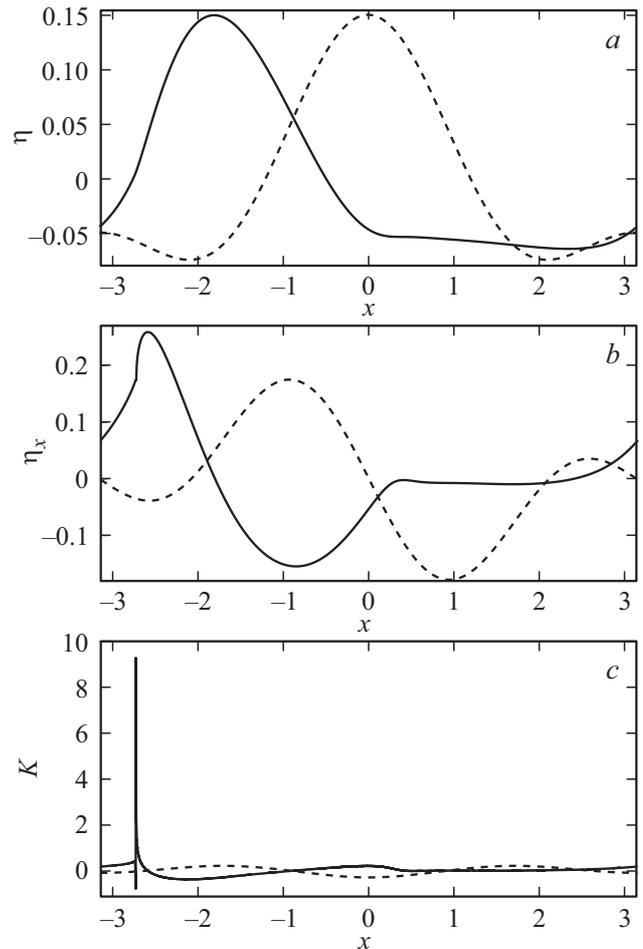


Рис. 1. Форма границы жидкости (а), крутизна (б) и кривизна (с) поверхности в начальный момент времени (штриховые линии) и в конце расчетного интервала $t_0 = 125.3$ (сплошные линии).

изменение полной энергии составило малую величину $\Delta H/H \propto 10^{-9}$.

Результаты моделирования свидетельствуют о формировании слабых особенностей на границе жидкости. На рис. 1 показаны форма границы жидкости, крутизна η_x и кривизна поверхности $K = \eta_{xx}/(1 + \eta_x^2)^{3/2}$. Наблюдаемое поведение системы очень близко к процессу формирования корневых особенностей на свободной границе жидкости при развитии гидродинамических неустойчивостей [1–4]. Из рис. 1 можно видеть, что к концу расчетного интервала на границе сформировалась область ($x_0 \approx -2.73$) с резким перепадом кривизны. При этом углы наклона остаются малыми, а максимальная амплитуда кривизны границы увеличивается примерно в 30 раз по сравнению с начальным значением.

О сингулярном поведении системы также свидетельствуют спектральные функции $|\eta_k|^2$, представленные в последовательные моменты времени на рис. 2. Для гладкой и непрерывной функции спектр должен убывать по экспоненциальному закону. Рис. 2 показывает, что к концу расчетного интервала ($t_0 \approx 125.3$) спектр

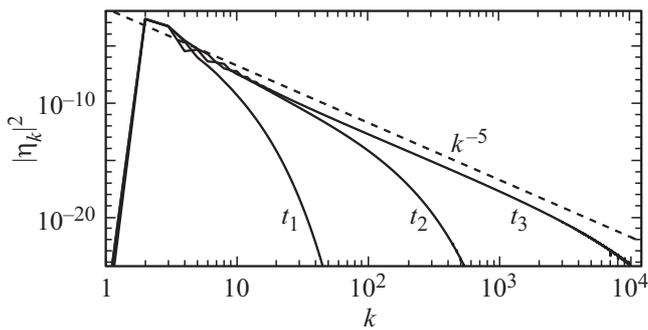


Рис. 2. Спектральные функции $|\eta_k|^2$ в последовательные моменты времени $t_1 = 15$, $t_2 = 110$, $t_3 = t_0 = 125.3$. Штриховая линия соответствует степенной зависимости k^{-5} .

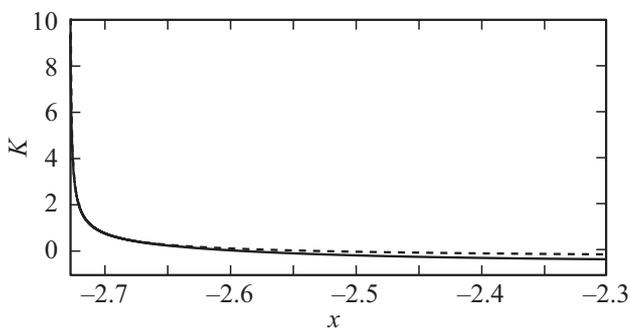


Рис. 3. Кривизна границы в момент времени $t_0 = 125.3$ (сплошная линия) и степенная зависимость $f(x) = 0.2(x - 2.7268)^{-1/2} - 0.45$ (штриховая линия).

поверхности затухает не экспоненциальным, а степенным образом: $|\eta_k|^2 \propto k^{-5}$, что однозначно указывает на формирование сингулярности. Как следствие, кривизна границы в фурье-пространстве также приобретает степенную зависимость: $|K_k| \propto k^{-1/2}$.

Отличительным свойством корневых особенностей является универсальное автомодельное поведение границы жидкости вблизи сингулярности. Так, независимо от физической природы [1–5] кривизна границы вблизи особенности должна описываться степенной функцией

$$K \approx \eta_{xx} \propto (x + x_0)^{-1/2}, \quad (3)$$

где x_0 — координата особой точки. На рис. 3 показана кривизна границы на отрезке $-2.73 \leq x \leq -2.3$. Штриховая линия на рисунке соответствует корневой зависимости (3). Можно видеть, что представленные функции практически совпадают друг с другом при приближении к точке x_0 . В отличие от зависимости (3) рассчитанная кривизна границы является конечной в точке x_0 . Этот факт может быть связан с конечной точностью используемых численных методов.

Таким образом, численное решение системы уравнений (1), (2) показывает, что на границе жидкости за конечное время формируются слабые особенности. Полученные данные свидетельствуют о том, что наиболее

вероятным кандидатом на роль таких сингулярностей являются корневые особенности, возникающие в различных моделях гидродинамических неустойчивостей [1–4]. Важно, что образование особенностей не нарушает малоугловое приближение и потенциально может быть описано аналитически. По всей видимости, наблюдаемые в работе слабые особенности могут переходить в сильно нелинейные области ударных фронтов, в которых разрыв претерпевают напряженность поля и скорость жидкости [20].

Автор выражает глубокую признательность Н.М. Зубареву за плодотворное обсуждение результатов работы.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-38-60002 мол_а_дк, а также при частичной поддержке темы госзадания 0389-2015-0023 и проектов РФФИ (17-08-00430, 19-08-00098).

Список литературы

- [1] Moore D.W. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1979. V. 365. P. 105–119.
- [2] Зубарев Н.М., Кузнецов Е.А. // ЖЭТФ. 2014. Т. 146. В. 1. С. 194–204.
- [3] Зубарев Н.М. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. В. 6. С. 2043–2054.
- [4] Zubarev N.M. // Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 128–131.
- [5] Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 1283–1290.
- [6] Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Korotkevich A.O. // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98. В. 11. С. 767–771.
- [7] Taylor G. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1964. V. 280. P. 383–397.
- [8] Kochurin E.A., Zubarev N.M. // Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 072101.
- [9] Zubarev N.M. // Phys. Fluids. 2006. V. 18. P. 028103.
- [10] Karabut E.A., Zhuravleva E.N. // J. Fluid Mech. 2014. V. 754. P. 308–331.
- [11] Зубарев Н.М., Карабут Е.А. // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. В. 7. С. 434–439.
- [12] Melcher J.R., Schwarz W.J. // Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 2604–2616.
- [13] Коровин В.М. // ЖТФ. 2017. Т. 87. В. 9. С. 1306–1311.
- [14] Tao B., Guo D.L. // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67. P. 627–635.
- [15] Tao B. // Comput. Math. Appl. 2018. V. 76. P. 788–798.
- [16] Зубарев Н.М., Кочурин Е.А. // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 2. С. 52–58.
- [17] Zubarev N.M. // Phys. Lett. A. 2004. V. 333. P. 284–288.
- [18] Зубарев Н.М., Зубарева О.В. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 20. С. 40–44.
- [19] Зубарев Н.М. // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 89. В. 6. С. 317–321.
- [20] Кочурин Е.А. // ПМТФ. 2018. Т. 59. № 1. С. 91–98.