

# 01 Сложная динамика неавтономного осциллятора с управляемой фазой внешнего воздействия

© Е.П. Селезнев<sup>1,2</sup>, Н.В. Станкевич<sup>1,3,4,¶</sup>

<sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

<sup>2</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

<sup>3</sup> Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия

<sup>4</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

¶ E-mail: stankevichnv@mail.ru

Поступило в Редакцию 25 июля 2018 г.

Исследуется динамика неавтономного осциллятора, в котором фаза внешнего воздействия зависит линейно от динамической переменной. Такое управление фазой внешнего воздействия приводит к тому, что в поведении осциллятора наблюдается иерархия различных периодических и хаотических колебаний. Изучена структура пространства управляющих параметров. Показано, что в динамике системы наблюдаются колебательные режимы, аналогичные режимам неавтономного осциллятора с потенциалом в виде периодической функции.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.02.47227.17473

Во многих системах, включая радиофизические, биологические и др., наблюдаются колебательные процессы, при которых один объект, входящий в систему, воздействует на другой периодическим сигналом, но при изменении условий функционирования частота воздействия изменяется. Например, в системах передачи информации для обеспечения высокой устойчивости используется так называемая фазовая автоподстройка частоты [1]. Система сердечно-сосудистой регуляции живых организмов при изменении нагрузки увеличивает или уменьшает частоту сердцебиений [2]. При такого рода взаимодействиях зависимость фазы от динамической переменной может привести к возникновению в системе сложной динамики.

В качестве простейшего объекта исследования такой системы выберем классическую модель теории колебаний [3] —  $RLC$ -контур, возбуждаемый внешним колебанием:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = V \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где  $x, \dot{x}$  — динамические переменные,  $\alpha$  — коэффициент диссипации,  $\omega_0$  — собственная частота колебаний контура,  $V, \omega$  и  $\varphi$  — амплитуда, частота и фаза внешнего воздействия. Если  $\varphi = \text{const}$ , то уравнение (1) описывает поведение линейного неавтономного осциллятора. Если фаза зависит от динамической переменной, то уравнение (1) становится нелинейным. Рассмотрим наиболее простой вариант, когда фаза меняется по линейному закону

$$\varphi(t) = kx(t), \quad (2)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент,  $x(t)$  — динамическая переменная уравнения (1).

После перехода к безразмерному времени  $\tau = \omega_0 t$  уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + x = V \sin(p\tau + kx), \quad (3)$$

где  $p = \omega/\omega_0$  — нормированная частота внешнего воздействия. По сравнению с предыдущими случаями уравнение (3) содержит нелинейность типа  $\sin(kx)$ . В такой системе возможно появление сложных периодических и хаотических колебаний [4–7]. Особо отметим недавнюю работу [8], в которой было показано формирование мультистабильных хаотических аттракторов в неавтономной системе с синусоидальной нелинейностью.

Перейдем к численному исследованию системы (3). Анализ характера вынужденных колебаний осуществлялся на основе оценки спектра показателей Ляпунова, а также с помощью анализа сечения Пуанкаре. В качестве управляющих параметров использовались амплитуда  $V$ , частота  $p$  и коэффициент фазовой перестройки  $k$ . Для анализа на устойчивость уравнение (3) было преобразовано в систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -2\alpha y - x + V \sin z, \\ \dot{z} &= p + ky. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 1, *a* представлена карта динамических режимов системы (4) на плоскости параметров  $(k, p)$  при значении амплитуды воздействия  $V = 1$ . Различными оттенками серого цвета обозначены области периодических колебаний в соответствии с палитрой, представленной на рис. 1 внизу; хаотические колебания отмечены черным цветом. Штриховыми линиями отмечены резонансная и кратные ей частоты системы (3). Как видно из рис. 1, *a*, область сложных колебаний ограничена частотами воздействия, значения которых

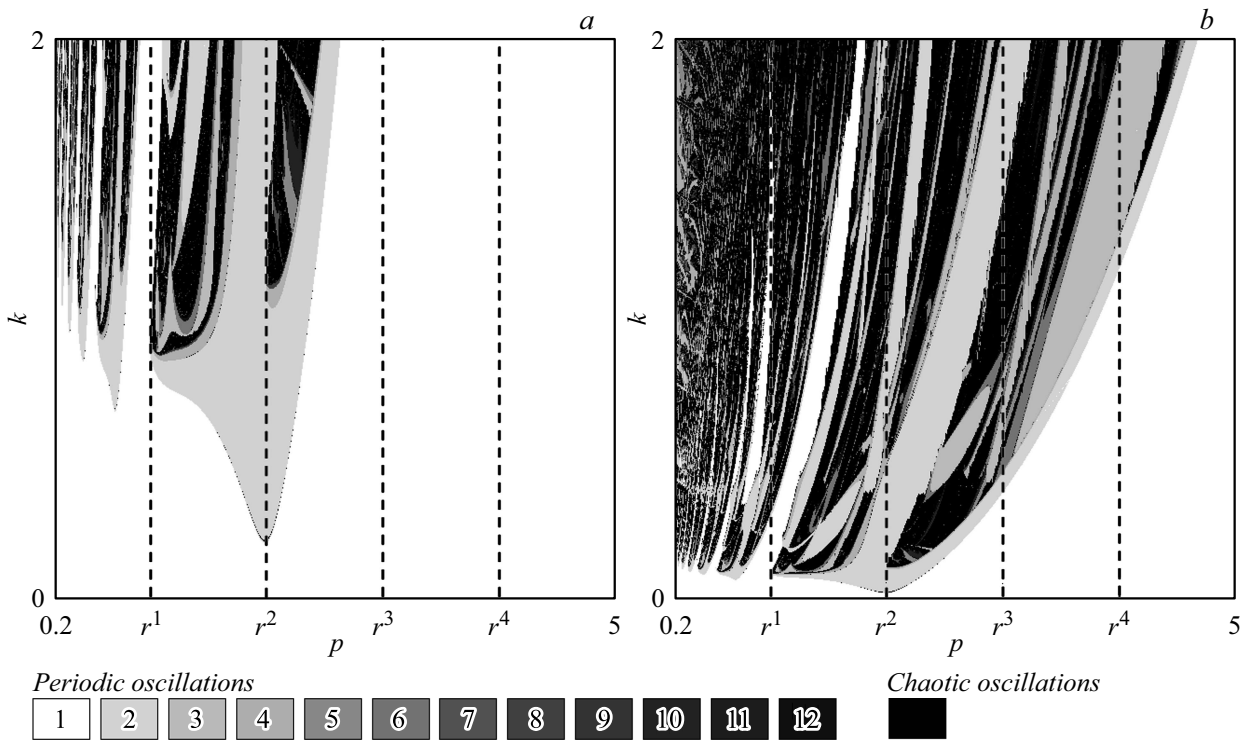


Рис. 1. Карты динамических режимов модели (4) при  $\alpha = 0.1$ .  $V = 1$  (a) и 10 (b).

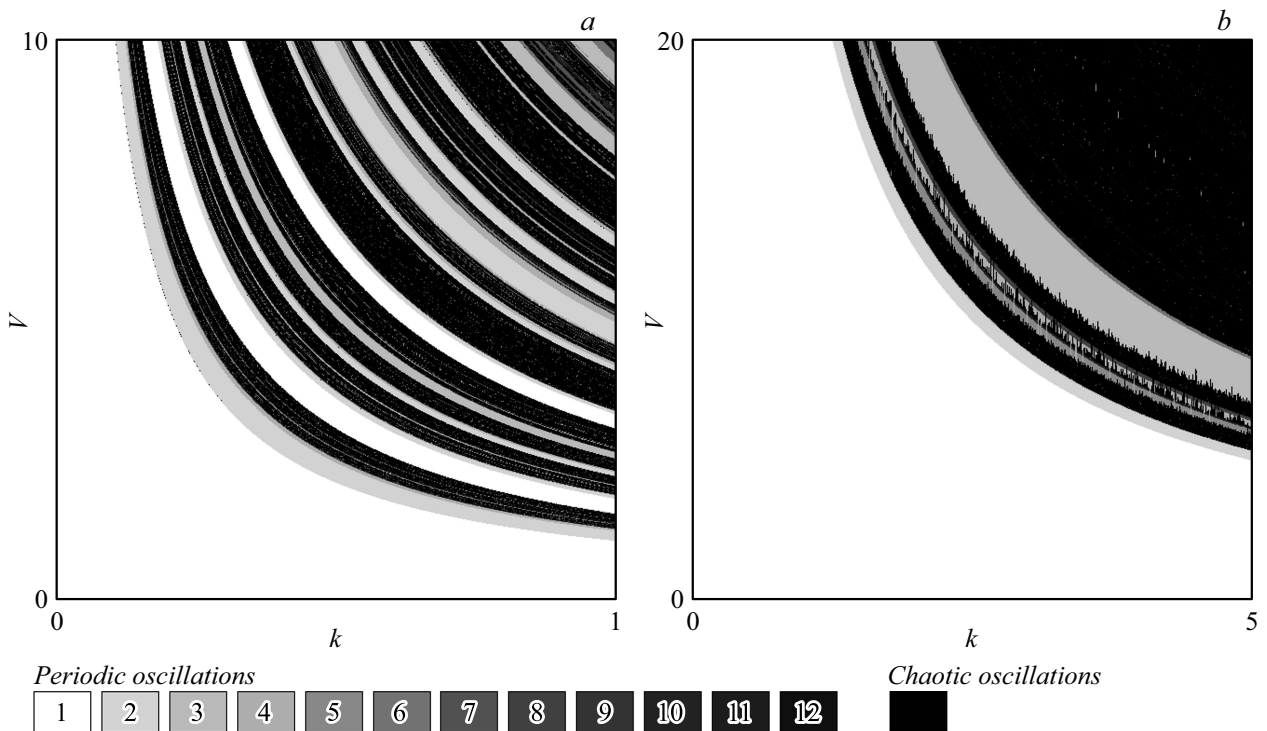
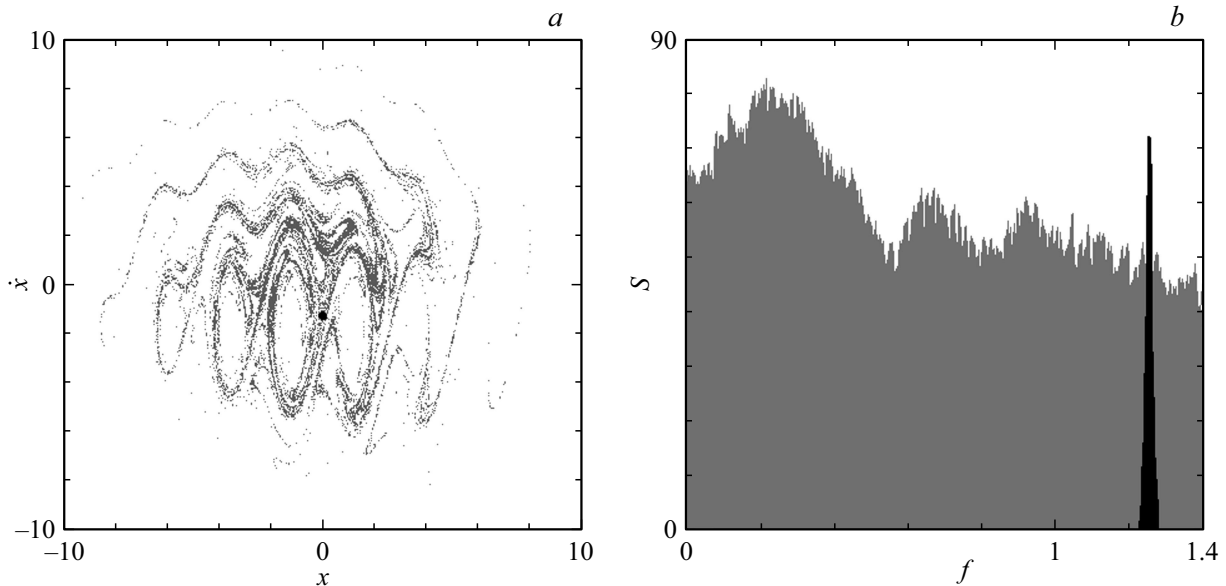


Рис. 2. Карты динамических режимов модели (4) при  $\alpha = 0.1$ .  $p = 0.25$  (a) и 5 (b).

меньше третьей резонансной частоты  $r^3$ . На малых частотах на плоскости параметров в динамике системы наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода, завершающаяся переходом к хаосу. Линии

бифуркаций удвоения периода имеют характерный вид языков с некоторым порогом по параметру  $k$ . Так, для первой линии удвоения периода минимум расположен на удвоенной резонансной частоте  $r^2$ , что характерно



**Рис. 3.** *a* — фазовый портрет модели (4) в стробоскопическом сечении при  $\alpha = 0.1$ ,  $p = 5$ ,  $k = 2.5$ ,  $V = 8.4$ ,  $x_0 = -0.0267$ ,  $y_0 = -1.2176$  (черный цвет — периодический режим) и  $x_0 = 2.1878$ ,  $y_0 = -4.8897$  (серый цвет — хаотический режим); *b* — спектры Фурье сосуществующих режимов.

для структуры пространства управляющих параметров неавтономного нелинейного осциллятора [2–7]. С уменьшением частоты воздействия наблюдаются аналогичные линии удвоения периода на частотах, отвечающих субрезонансам. С уменьшением частоты порог бифуркации удвоения периода увеличивается.

С увеличением параметра  $k$  наблюдается развитие хаоса, обусловленное уменьшением связности хаотического аттрактора, чередуемое с появлением зон периодических колебаний. В целом структура плоскости управляющих параметров (рис. 1, *a*) во многом напоминает аналогичную для неавтономного нелинейного осциллятора [6,7]: можно выделить отдельные зоны сложного поведения, связанные с так называемыми резонансами на высших гармониках.

На рис. 1, *b* представлена карта режимов колебаний системы (4) на плоскости параметров  $(k, p)$  при значении амплитуды воздействия  $V = 10$ . Из сравнения с рис. 1, *a* видно, что увеличение амплитуды привело к расширению областей существования сложных колебательных режимов, а также к появлению в области существования хаоса новых зон периодических колебаний. Но минимум первой линии бифуркации удвоения периода по-прежнему находится на удвоенной резонансной частоте  $r^2$ , как и при малой амплитуде. Возникновение зон периодических режимов в области существования хаоса носит жесткий характер. При этом в динамике системы появляются режимы колебаний, соответствующие так называемой динамике нелинейного осциллятора с „многоямной“ потенциальной функцией. В частности, подобная динамика наблюдается в обобщенном уравнении Дуффинга [2–5]. Переход от периодического режима к хаосу также происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Обратимся к анализу плоскости параметров амплитуда воздействия–фазовая расстройка. На рис. 2, *a* и *b* представлены карты динамических режимов на плоскости параметров  $(V, k)$  для двух значений параметра  $p$ :  $p = 0.25$  (*a*) и  $5$  (*b*). С ростом  $V$  и  $k$  в поведении исследуемой системы (рис. 2, *a*) наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний. В области хаоса жестким образом формируются новые области периодических колебаний, переход от которых к хаосу также происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода. При значении параметра  $p = 5$  (рис. 2, *b*) структура карты параметров качественно повторяется, что иллюстрирует многообразие зон существования различных режимов колебаний. Как и на рис. 2, *a*, с ростом параметров  $V$  и  $k$  в поведении исследуемой системы наблюдается переход к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний; в области хаоса формируются новые области колебаний периодов 3 и 5; имеется обширная область хаоса с узкими зонами периодических колебаний.

При больших значениях параметра  $p$  на карте хорошо видны жесткие переходы между различными динамическими режимами. Такая картина указывает на наличие в системе мультистабильности. Анализ системы на мультистабильность показал, что в системе возможно возникновение различных типов сосуществующих аттракторов. Могут сосуществовать периодические аттракторы с различным периодом, возможна также мультистабильность между периодическими и хаотическими колебаниями.

На рис. 3, *a* представлены сосуществующие аттракторы: с предельным циклом периода 1 (черный цвет) и хаотический аттрактор (серый цвет). На рисунке показаны аттракторы в стробоскопическом сечении, т.е. через период внешнего воздействия, построенные для

одних и тех же параметров  $\alpha = 0.1$ ,  $p = 5$ ,  $k = 2.5$ ,  $V = 8.4$ , но для различных начальных значений численного интегрирования: при  $x_0 = -0.0267$ ,  $y_0 = -1.2176$  фазовая траектория приходит на устойчивый предельный цикл периода 1, а при  $x_0 = 2.1878$ ,  $y_0 = -4.8897$  — на хаотический аттрактор. Как видно из рисунка, в стробоскопическом сечении предельному циклу соответствует одна неподвижная точка. Хаотический аттрактор представляет собой сложную структуру, аналогичную структуре аттрактора неавтономной системы в работе [8]. На рис. 3, *b* представлены спектры Фурье сосуществующих режимов: по-прежнему серый цвет соответствует хаотическому режиму, черный — периодическому. Из рис. 3, *b* хорошо видно, что спектральный состав сигналов сильно различается. Основной пик хаотического колебания находится на более низких частотах, при этом спектр довольно широкий. Хаотический аттрактор характеризуется следующими показателями Ляпунова:  $\Lambda_1 = 0.2332$ ,  $\Lambda_2 = 0.0$ ,  $\Lambda_3 = -0.3431$ .

Таким образом, введение линейной зависимости фазы внешнего воздействия от динамической переменной в неавтономном осцилляторе приводит к формированию в динамике системы иерархии периодических и хаотических колебаний. При малой амплитуде воздействия область существования сложных колебаний ограничена по частоте значением, примерно равным утроенной резонансной частоте. Увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к расширению областей существования сложных режимов колебаний, а также к появлению в области существования хаоса новых зон периодических колебаний. При этом в динамике системы появляются режимы колебаний, соответствующие так называемой динамике нелинейного осциллятора с периодическим потенциалом. Наблюдаются также мультистабильности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 17-12-01008).

## Список литературы

- [1] Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2013. 336 с.
- [2] Гайтон А.К., Холл Дж.Э. Медицинская физиология / Пер. с англ. под ред. В.И. Кобрин. М.: Логосфера, 2008. 1296 с.
- [3] Рожнев А.Г., Трубецков Д.И. Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. 416 с.
- [4] Li T.Y., Yorke J.A. // Am. Math. Monthly. 1975. V. 82. P. 985–992.
- [5] Humieres D.D., Beasley M.R., Huberman B.A., Libhaber A. // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. N 6. P. 3484–3496.
- [6] Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П. // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. № 12. С. 2558–2566.
- [7] Безручко Б.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. В. 19. С. 75–79.
- [8] Tang Y.-X., Khalaf A.J.M., Rajagopal K., Pham V.-T., Jafari S., Tian Y. // Chin. Phys. B. 2018. V. 27. N 4. P. 040502.