

07,01

## Динамическая модель упруго-пластического нормального столкновения сферической частицы с полупространством с учетом адгезионного взаимодействия в зоне контакта

© Я.А. Ляшенко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Берлинский технический университет,  
Берлин, Германия

<sup>2</sup> Сумский государственный университет,  
Сумы, Украина

E-mail: i.liashenko@tu-berlin.de

(Поступила в Редакцию 20 августа 2018 г.  
В окончательной редакции 29 августа 2018 г.)

Численно решается задача столкновения сферической однородной частицы с полупространством. Рассчитан коэффициент восстановления нормальной скорости как функция начальной скорости при наличии диссипации механической энергии за счет пластических деформаций и адгезионного взаимодействия между поверхностями контактирующих тел. Проведен учет эффекта деформационного упрочнения, используя введенный ранее критерий нелокальной пластичности. Исследование проведено в безразмерных параметрах, что делает его универсальным. Найдено аналитическое выражение для критической начальной скорости, при превышении которой начинается пластическая деформация. Сравнение полученных в результате моделирования результатов с результатами имеющихся экспериментальных данных показывает хорошее соответствие.

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского сообщества (DFG), проект РО 810-55-1.

DOI: 10.21883/FTT.2019.02.47130.240

### 1. Введение

В последние десятилетия активно развиваются теоретические и численные методы исследования контактных явлений твердых и вязко-упругих тел при различных условиях в зоне контакта. Это связано в частности с практической важностью понимания особенностей контактного взаимодействия в промышленности при проектировании различных технологических процессов и оборудования. Одно из активно разрабатываемых на сегодняшний день направлений в контактной механике связано с исследованием динамического процесса соударения твердых тел. Указанные исследования проводятся в том числе и для описания особенностей динамического поведения гранулированных сред [1–3]. Как правило, конечной целью является оптимизация разнообразных технологических процессов (сушка и фасовка удобрений, приготовление гранулированных кормов, гранулированного твердого топлива из отходов деревообрабатывающей промышленности, гранулированных медицинских препаратов и т.п.). Вторым важным направлением, которое использует достижения физики столкновений, является моделирование природных явлений, сюда входят такие явления как землетрясения, перемещения ледников, оползни, формирование горных систем, и т.п. Более того, контактные явления оказывают существенное влияние при формировании астероидов и планетарных систем [4], а также при механических манипуляциях с наноразмерными систе-

мами [5], что в связи с современными тенденциями миниатюризации механических устройств имеет большую перспективу практического применения. Стоит отметить, что в общем случае описание контактных явлений представляет сложную задачу, поскольку здесь существенную роль играют адгезионные силы [5,6], шероховатости, наличие пластической деформации [7,8], наличие третьего тела в зоне контакта, и многие другие особенности.

Процессы, происходящие при столкновениях твердых частиц, изучаются также и экспериментально. Например, в работах [9,10] теоретически и экспериментально изучается отражение стального шарика от стеклянной пластины с учетом диссипации, связанной с распространением упругих волн в материале пластины. Авторы изучают влияние толщины пластины (которая в предлагаемой нами статье считается бесконечной, поскольку мы работаем в пределе полупространства), радиуса шара, а также начальной скорости шарика. В другой работе [11] дополнительно изучается канал диссипации энергии, связанный с вязко-упругими процессами, проходящими в зоне контакта. В [12] в ходе компьютерного эксперимента изучается столкновение упруго-пластического шара с несжимаемым полупространством, причем в указанной работе проведен учет эффекта деформационного упрочнения материала. В работе [13] построена динамическая модель упруго-пластического столкновения сферических частиц, которая показывает удовлетворительное совпадение с из-

вестными экспериментальными данными других авторов. Достоинством указанных работ несомненно является то, что авторы не только проводят эксперимент (либо компьютерное моделирование), но и строят соответствующую теорию, которая в достаточной мере его объясняет, или же используют имеющиеся в литературе теоретические подходы для объяснения результатов эксперимента. Краткое описание существующих на сегодняшний день теорий столкновений, а также некоторых экспериментов можно найти в недавно вышедшем обзоре [14]. Однако, несмотря на изобилие теоретических и экспериментальных работ, вопрос физики столкновений остается открытым, поскольку, как это показано, например, в работе [15], различные подходы зачастую дают весьма противоречивые результаты. Более того, результаты экспериментов также существенно разнятся, а связано это с различными типами контактного взаимодействия. В частности, с различными механизмами протекания пластической деформации. В предлагаемой статье мы рассматриваем один из них. Существуют также работы, в которых изучаются специфические условия столкновения. К примеру, в [16] рассматривается столкновение упругой частицы с упругой пластиной, на которую нанесен тонкий слой вязкой жидкости, что приводит к возникновению дополнительного канала диссипации механической энергии. Подобная ситуация изучалась ранее в [17].

В предыдущей работе [18] мы построили модель нормального столкновения сферической частицы с полупространством, используя введенный ранее в [19] критерий нелокальной пластичности. Такая модель позволила нам довольно точно описать результаты эксперимента, проведенного в работе [20]. Однако, в [18] описывается только один эксперимент и модель оперирует параметрами этого эксперимента. Полученное с высокой точностью совпадение с имеющимися экспериментальными данными доказывает адекватность построенной модели, однако за конкретными параметрами из виду теряется универсальность предложенного нами подхода, который способен описывать столкновения при наличии пластических деформаций в широком диапазоне параметров. Настоящая работа предпринята с целью универсализации динамической модели, предложенной в [18]. В отличие от работы [18] здесь исследование проведено в безразмерных параметрах, при этом удалось получить семейство кривых, которые описывают столкновения во всем диапазоне возможных параметров эксперимента. Однако, такая модель позволяет описать только те ситуации, в которых справедливым является критерий пластичности, предложенный в работе [19]. Стоит понимать, что пластическое деформирование является довольно сложным процессом и здесь возможно множество различных сценариев поведения, которые не укладываются в рамки построенной модели. Однако в тех ситуациях, в которых справедлив критерий пластичности [19], результаты экспериментов при их описании в рамках предлагаемого нами подхода воспроизводятся с высокой точностью.

## 2. Формулировка модели пластической деформации при нормальном индентировании параболического индентора в упругое полупространство

Одним из перспективных методов исследования механики столкновений является метод редукции размерности (MDR) [21]. В рамках этого метода было исследовано столкновение частиц без проскальзывания в зоне контакта [22], с конечным коэффициентом трения [23], а также при наличии сил адгезии между поверхностями контактирующих тел [24].

В рамках MDR в первую очередь необходимо заменить оригинальный трехмерный профиль контактирующего с полупространством тела  $z = f(r)$  на его одномерный эквивалент  $g(x)$  согласно правилу [21,25]

$$g(x) = |x| \int_0^{|x|} \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr. \quad (1)$$

Для сферического индентора  $f(r) = r^2/2R$  имеем зависимость  $g(x) = x^2/R$ . Далее полупространство и взаимодействующее с ним тело одновременно заменяются на упругое основание, состоящее из последовательности невзаимодействующих пружин с нормальной жесткостью [25]

$$k_z = E^* \Delta x, \quad (2)$$

где  $\Delta x$  — величина дискретизации (расстояние между пружинами). Эффективный модуль упругости определяется как

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (3)$$

где  $E_{1,2}$  — модули упругости, а  $\nu_{1,2}$  — коэффициенты Пуассона индентора и полупространства.

После этого можно приступать непосредственно к моделированию контактных явлений. Для этого производится вдавливание индентора с профилем  $g(x)$  в упругое основание на глубину  $d$ , в результате чего индивидуальные пружины приобретают смещения

$$u_z(x) = d - g(x) = d - \frac{x^2}{R}. \quad (4)$$

Радиус контакта  $a$  определяется условием  $u_z(a) = 0$ , откуда имеем [26]

$$a = \sqrt{Rd}. \quad (5)$$

Чтобы определить действующую нормальную силу  $F_z$ , необходимо сложить силы натяжения от каждой пружины в контакте

$$F_z = E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx = 2E^* \int_0^{\sqrt{Rd}} \left( d - \frac{x^2}{R} \right) dx = \frac{4E^* \sqrt{Rd^3}}{3}. \quad (6)$$

При численном моделировании будем пользоваться дискретным аналогом интеграла (6)

$$F_z = E^* \Delta x \sum_{\text{cont}} u_z(x_i), \quad (7)$$

где суммирование производится по всему контакту.

В работе [19] был предложен критерий нелокальной пластичности, который легко имплементировать в MDR. В [19] рассматривается случай, когда теряет смысл критическое напряжение текучести материала. Такая ситуация неизбежно наблюдается для малых радиусов контакта. В указанной ситуации „твердость“ зависит от размера контакта. Согласно [19], действующая в контакте нормальная сила может быть записана в виде

$$F_z = \pi q_c a, \quad (8)$$

где  $a$  — радиус контакта, а  $q_c$  имеет смысл критической линейной плотности силы, при превышении которой начинается пластическая деформация. Критическая сила  $f_c$ , действующая на одну пружину, определится выражением

$$f_c = \frac{F_z}{2a/\Delta x}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) найдем величину критической силы  $f_c$  [19]

$$f_c = \frac{\pi}{2} q_c \Delta x, \quad (10)$$

при превышении которой начинается пластическое деформирование выделенной пружины. После начала процесса пластического деформирования при дальнейшей деформации пружины упругая сила равна  $f_c$  (10) и не изменяется, а пластическая деформация при этом накапливается.

На рис. 1 для большей наглядности показана хорошо известная классическая схема нагружения индивидуальной пружины, предполагающая идеальную пластичность без эффекта упрочнения. Здесь до критического значения  $f_c$  (10) пружина деформируется упруго. Это упругий участок зависимости, на котором нормальная сила задается законом Гука

$$F_z(x_i) = [u_z(x_i) - u_z^{pl}(x_i)] E^* \Delta x, \quad (11)$$

в котором для рассматриваемого упругого участка  $u_z^{pl}(x_i) = 0$ . На упругом участке при разгрузке пружины она полностью восстанавливает свою первоначальную форму. Если же натяжение пружины превысит критическое значение

$$u_z(x_i) > u_z^{\text{crit}} = \frac{f_c}{E^* \Delta x}, \quad (12)$$

то при дальнейшем нагружении величина упругой силы становится тождественно равной критическому значению  $F_z(x_i) = f_c$ . Разгрузка пружины, которая пластически деформирована, происходит также по закону Гука

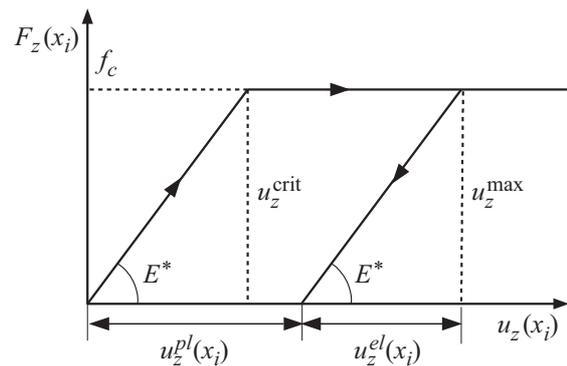


Рис. 1. Схематический вид кривой нагружения для выделенной пружины с координатой  $x_i$ .

участку (см. рис. 1), при этом пластическая составляющая смещения пружины может быть найдена как

$$u_z^{pl}(x_i) = u_z^{\text{max}} - u_z^{\text{crit}}. \quad (13)$$

В процессе разгрузки пружины нормальную силу следует вычислять по формуле (11), где при наличии пластической деформации  $u_z^{pl}(x_i) \neq 0$ .

При таком образом введенном критерии пластичности сначала будут деформироваться пружины, имеющую максимальную длину, когда глубина индентирования превысит критическую величину  $d_c$ . Это значение легко определить, если приравнять критическую силу  $f_c$  (10) к упругой силе, создаваемой центральной пружиной, натяжение которой определяется формулой (4) при  $x = 0$  (в центре контакта) и совпадает с критической глубиной индентирования  $d_c$ . Упругая сила натянутой пружины определяется как  $F = k_z d_c$ , где нормальная жесткость  $k_z$  задается формулой (2). Фактически при этом мы находим критическую величину натяжения пружины (12), где  $u_z^{\text{crit}} \equiv d_c$ . Отсюда имеем критическую глубину индентирования

$$d_c = \frac{\pi q_c}{2E^*}. \quad (14)$$

При  $d > d_c$  (14) начинается пластическое деформирование, если  $d < d_c$ , мы находимся в чисто упругой области.

На рис. 2 показана схема, показывающая индентирование жесткого профиля  $g(x)$  в упруго-пластическое основание. Здесь показан радиус контакта  $a$  (5). Общая глубина индентирования обозначена как и ранее буквой  $d$ . Критическая величина  $d_c$  (14) определяет радиус области пластической деформации  $b$ . Поскольку мы используем идеализированную модель пластического течения, показанную на рис. 2, в области  $-b < x < b$  все пружины дают эквивалентный вклад в упругую силу, определяемый выражением (10). В областях контакта  $b < x < a$  и  $-a < x < -b$  пружины деформированы упруго, а их вклад в нормальную силу определяется законом Гука (11). Используя (14) и выражение для радиуса контакта (5) легко найти критическое значение радиуса, при котором начинается пластическая

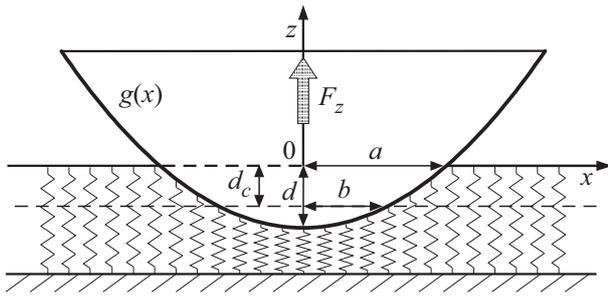


Рис. 2. Схема упруго-пластически деформированного основания.

деформация

$$a_c = \sqrt{\frac{\pi R q_c}{2E^*}}. \quad (15)$$

В случае отсутствия пластических деформаций сила, действующая на индентор со стороны полупространства, определяется записанным выше выражением (6). Однако при наличии пластического деформирования центральные пружины, находящиеся в области  $-b < x < b$ , показанной на рис. 2, будут давать меньший вклад в упругую силу. Для определения этой силы необходимо найти величину радиуса  $b$ , которая исходя из геометрических соображений (используем рис. 2 и выражения (4), (14)) определится как

$$b = \sqrt{Rd - \frac{\pi R q_c}{2E^*}}. \quad (16)$$

Отметим, что в ситуации, когда полупространство не обладает упругими свойствами и пластические деформации наступают в самом начале контакта ( $q_c = 0$ ), согласно (5) выражение (16) дает  $b \equiv a$ . Вклад в упругую силу от пружин в области  $-b < x < b$  может быть определен как количество пружин в этой зоне  $2b/\Delta x$ , умноженное на критическую силу  $f_c$  (10), поскольку согласно используемому критерию пластичности все пружины в этой зоне дают одинаковый вклад, равный  $f_c$ . Вклады от упруго натянутых пружин могут быть как и ранее найдены по формуле (6), однако с измененными пределами интегрирования, поскольку упругие области теперь задаются двумя симметричными относительно начала координат интервалами  $-a < x < -b$  и  $b < x < a$ . В итоге будем иметь

$$F_{z(el,pl)} = 2E^* \int_b^a \left( d - \frac{x^2}{R} \right) dx + \pi q_c b, \quad (17)$$

что с учетом определений (5) и (16) дает окончательное выражение

$$F_{z(el,pl)} = \frac{4E^* \sqrt{Rd^3}}{3} - \frac{H(2E^*d - \pi q_c)}{3} \sqrt{\frac{2R|2E^*d - \pi q_c|^3}{E^*}}, \quad (18)$$

где  $H(x)$  — функция Хевисайда. Выражение (18) отличается от (6) наличием второго слагаемого. Функция Хе-

висайда в (18) введена для того, чтобы описать переход от чисто упругой деформации (когда в (18) существует только первое слагаемое) к наличию пластической деформации в случае  $2E^*d - \pi q_c > 0$ . Для этой же цели в подкоренном выражении указанная разность взята по абсолютному значению, поскольку при отсутствии пластической деформации подкоренное выражение во втором слагаемом в (18) становится отрицательным. Легко видеть, что в случае  $q_c = 0$  выражение (18) дает значение  $F_{z(el,pl)} = 0$ , то есть упругая сила при этом, как уже указывалось выше, полностью отсутствует.

Таким образом, при чисто упругом индентировании справедлива формула (6). В случае, когда по всей области контакта наблюдается пластическая деформация, действует сила (8). При дальнейшем моделировании будем использовать выражение (18). Это выражение получено непосредственно с использованием критерия пластичности (10) и соответствует ситуации, когда пластически деформируются центральные пружины в контакте, для которых этот критерий выполняется, а на краях контакта пружины деформируются упруго. Приведем зависимости этих трех сил от глубины индентирования. Для универсальности представления результатов далее везде будем использовать безразмерные переменные. Все силы измерим в единицах критической силы  $f_c$ , которая численно равна упругой силе (6) в момент, когда начинается пластическая деформация (глубина индентирования  $d$  при этом тождественно равна критическому значению  $d_c$  (14))

$$F_c = \frac{2\pi q_c}{3} \sqrt{\frac{\pi R q_c}{2E^*}}. \quad (19)$$

На рис. 3 показаны зависимости сил (6), (8) и (18) от глубины индентирования  $d$ .

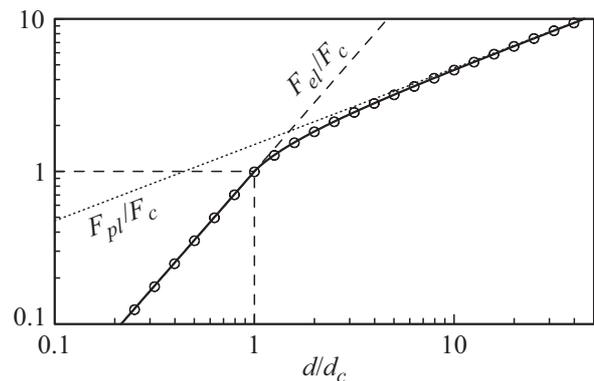


Рис. 3. Зависимости сил  $F_{el}$  (6) при чисто упругом индентировании (штриховая прямая),  $F_{pl}$  (8) при наличии пластической деформации по всей области контакта (пунктирная прямая) и силы  $F_{(el,pl)}$  (18), которая следует из критерия пластической деформации (10) (сплошная кривая + кружки) от безразмерной глубины индентирования  $d/d_c$ . Все приведенные на рисунке силы измерены в единицах  $F_c$  (19). Сплошная кривая получена по формуле (18), кружки — результат моделирования согласно описанной выше процедуре (1)–(13).

Из рисунка следует, что в области  $d/d_c < 1$  сила (18) совпадает с упругой силой (6), поскольку пластическая деформация полностью отсутствует. По мере расширения контакта и увеличения контактного радиуса (с ростом глубины индентирования  $d$ ) выражение (18) приближается к зависимости, задаваемой формулой (8). Однако при этом (8) является асимптотикой, поскольку при использовании критерия пластичности (10) всегда существуют области на краю контакта, которые деформируются упруго.

Штриховая (формула (6)) и пунктирная (формула (8)) линии на рис. 3 в безразмерном виде задаются уравнениями

$$\frac{F_{el}}{F_c} = \left(\frac{d}{d_c}\right)^{3/2}, \quad \frac{F_{pl}}{F_c} = \frac{3}{2} \left(\frac{d}{d_c}\right)^{1/2}. \quad (20)$$

Последние два уравнения представляют собой степенные функции, поэтому на рис. 3 в двойных логарифмических координатах они являются прямыми линиями. Согласно рисунку эти прямые пересекаются в точке  $d/d_c = 3/2$  и  $F_{el}/F_c = F_{pl}/F_c = 3\sqrt{6}/4$ , которую условно можно считать точкой перехода режима упругой деформации в режим деформации пластической. Хотя, как это видно из рисунка, определенной точки перехода между этими режимами нет и такой переход осуществляется плавно.

### 3. Моделирование динамики нормального столкновения однородной сферической частицы с упругим полупространством

Процесс нормального столкновения однородного сферического тела с упругим полупространством для удобства можно разбить на две фазы. Во время первой фазы происходит погружение шарика в полупространство. В процессе погружения (индентирования) нормальная скорость движения шарика будет уменьшаться вплоть до нулевого значения, а его кинетическая энергия переходить в упругую энергию сжатых пружин. В рамках постановки задачи часть энергии затрачивается на работу пластической деформации. Вторая фаза начинается в момент, когда нормальная скорость переходит через нулевое значение и изменяет знак, то есть фаза представляет непосредственно процесс отскока шарика. Во второй фазе скорость шарика увеличивается от нуля до значения, при котором исчезает контакт между шариком и полупространством. Отношение этой скорости (взятой с обратным знаком) к начальной называется коэффициентом восстановления нормальной скорости. Для нашего моделирования важно, что в таком образом выделенных фазах столкновения шарик всегда движется в противоположных направлениях. Это означает, что для каждой пружины, показанной на рис. 2, будет сначала осуществляться нагружение с монотонно увеличивающимся значением  $u_z(x_i)$ , а при разгрузке величина  $u_z(x_i)$  будет монотонно уменьшаться.

Рассмотрим непосредственно процесс столкновения сферы с полупространством. Как и выше будем обозначать начальную скорость шарика  $v_{z0}$ . Мы рассматриваем упрощенную ситуацию, в которой шарик не вращается (начальная циклическая частота равна нулю), поэтому тангенциальное движение отсутствует, а векторы начальной скорости и скорости отскока противоположно направлены и коллинеарны. При отлете от поверхности циклическая частота вращения шарика также равна нулю. Одной из основных величин в таких экспериментах является коэффициент восстановления нормальной скорости  $e_n$

$$e_n = -\frac{v_z}{v_{z0}}, \quad (21)$$

где  $v_z$  — скорость шарика, с которой он отлетает от поверхности полупространства. Поскольку скорости  $v_z$  и  $v_{z0}$  разнонаправлены и имеют противоположные знаки, значение  $e_n > 0$ . Для определения зависимости скорости шарика  $v_z$  от времени необходимо решить единственное уравнение движения

$$m\dot{v}_z = -F_z, \quad (22)$$

где нормальная сила  $F_z$  при контакте шарика с поверхностью согласно выражению (7) всегда положительна. Решая уравнение (22) с использованием описанной выше процедуры, можно найти конечную скорость шарика (при его отлете от поверхности полупространства), а значит и величину коэффициента восстановления  $e_n$  (21).

Существует большое количество работ, в которых изучаются особенности столкновений твердых тел при наличии пластической деформации. В частности, в [8,27] показано, что при столкновении сферического тела с упругим полупространством пластические эффекты начинают проявляться, если нормальная скорость превышает критическое значение

$$v_{z0}^{\text{crit}} = \left(\frac{\pi}{2E^*}\right)^2 \left(\frac{2}{5\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{2E^* a_c}{\pi R}\right)^{5/2}. \quad (23)$$

Здесь величина  $E^*$  определяется равенством (3),  $a_c$  — контактный радиус, при котором начинается пластическое течение, а  $\rho$  — плотность материала, из которого изготовлен шар, соударяющийся с полупространством. В рассматриваемом нами случае нелокальной пластичности критический радиус определяется введенным ранее соотношением (15).

В работе [8] коэффициент восстановления  $e_p$ , где кинетическая энергия теряется только за счет пластических деформаций, был определен как

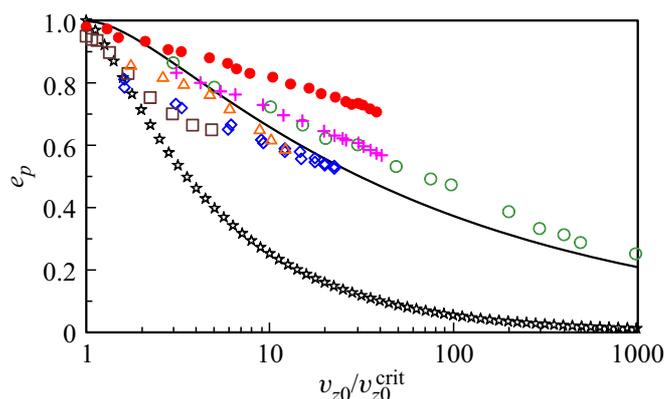
$$e_p = \left(\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{v_{z0}}{v_{z0}^{\text{crit}}}\right)^2\right]^{1/2} \times \left[1 + 2\sqrt{\frac{6}{5} \left(\frac{v_{z0}}{v_{z0}^{\text{crit}}}\right)^2 - \frac{1}{5}}\right]^{-1/4}. \quad (24)$$

Однако в предлагаемой работе мы рассматриваем случай нелокальной пластической деформации, когда твердость является функцией размера контакта [19]. Поэтому в нашем случае выражение (24) не верно и для определения коэффициента восстановления необходимо проводить численное моделирование. Но при этом будем определять скорость  $v_{z0}^{\text{crit}}$  также по формуле (23) и в процессе моделирования выясним, от каких параметров зависит коэффициент восстановления  $e_p$  в нашем случае. После подстановки в (23) выражения для критического радиуса  $a_c$  (15) будем иметь значение критической скорости в виде

$$v_{z0}^{\text{crit}} = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{5\rho}} \left( \frac{q_c}{R} \right)^{5/4} \left( \frac{\pi}{E^*} \right)^{3/4}. \quad (25)$$

Выражение (25) используется далее для представления результатов численного моделирования. На рис. 4 сплошной кривой показана зависимость коэффициента восстановления  $e_p$  от безразмерной скорости, которая определяется формулой (24), полученной в работе [8]. Звездочками (нижняя кривая) здесь обозначена аналогичная зависимость, полученная в результате численного моделирования при использовании критерия пластичности (10). Численно рассчитанная кривая состоит из символов, каждый из которых получен при различном наборе параметров, в которые входят плотность материала шарика  $\rho$ , эффективный модуль упругости  $E^*$  (3), радиус сферы  $R$ , а также параметр  $q_c$ . При моделировании для каждой последующей расчетной точки постепенно увеличивалась начальная скорость шарика  $v_{z0}$ , и для каждого значения скорости (расчетной точки на графике) все указанные выше параметры выбирались произвольным образом. После этого значение  $q_c$  вычислялось по формуле (25) таким образом, чтобы получить следующую точку на графике (на рис. 4 расстояния между любыми двумя соседними точками по оси абсцисс в логарифмическом масштабе одинаковы). Таким образом, каждая точка на графике соответствует произвольному набору параметров и начальных условий, однако вместе эти точки дают единую зависимость. Это говорит о том, что как и в случае, описываемом формулой (24), результирующий коэффициент восстановления зависит только от начальной нормальной скорости, нормированной на величину критической скорости (25), при которой начинаются пластические деформации.

Стоит отметить, что из рис. 4 следует, что в обоих случаях (сплошная кривая и звездочки) коэффициент восстановления начинает уменьшаться от единичного значения (отсутствие пластической деформации), когда начальная скорость превышает критическое значение  $v_{z0}^{\text{crit}}$ . Причем в случае аналитического результата (формула (24)) и проведенного моделирования эти скорости представляют различные значения, поскольку используемая в моделировании  $v_{z0}^{\text{crit}}$  (25) получена исходя из критерия пластичности (10), а изначальное выражение (23) получено исходя из других соображений. Это объясняет



**Рис. 4.** Коэффициент восстановления нормальной скорости  $e_p$ , рассчитанный по аналитической формуле (24) (сплошная кривая) и полученный в результате численного моделирования (нижняя кривая, показанная звездочками). Символами показаны результаты экспериментов различных авторов (см. описание далее в тексте).

тот факт, что приведенные на рисунке кривые так сильно отличаются.

На рис. 4 также показаны результаты некоторых экспериментов различных авторов. Ромбами показаны результаты экспериментальной работы [28], в которой исследовалось столкновение двух шариков, выполненных из стали, используемой для изготовления подшипников (диаметр шариков при этом составлял 25.4 mm). Треугольниками показаны результаты, описанные в работе [13], которые соответствуют отражению шарика, выполненного из амония флюоресцеина диаметром 4.4  $\mu\text{m}$ , при его отражении от силиконовой мишени. Пустые кружки — это результаты компьютерного моделирования в рамках метода конечных элементов [12]. Крестиками показаны результаты работы [29], где шарик из алюминиевого оксида диаметром 5 mm отражался от пластины, выполненной из алюминиевого сплава. Заполненные кружки (верхние символы на рисунке) — это результаты полностью аналогичного эксперимента по отражению шарика от стальной пластины [29]. И наконец квадратами на рисунке показаны результаты эксперимента, проведенного в работе [20], где изучалось отражение стального шарика диаметром 1.27 cm от стальной пластины. Здесь мы привели результаты лишь нескольких работ, на самом деле на сегодняшний день их гораздо больше.

Из рис. 4 видно, что большинство экспериментальных результатов удовлетворительно описывается теоретической кривой (24) и при этом все они очень далеки от кривой (кроме разве что показанных квадратами), которая получена в рамках предлагаемой нами численной модели (нижняя кривая, звездочки). Это связано в первую очередь с тем, что полученная нами кривая предполагает реализацию идеальной пластичности (см. рис. 1), а такая ситуация очень редко реализуется в природе, и для этого нужны специфические материалы

и условия эксперимента. Поэтому для описания реально наблюдаемых процессов при столкновении необходимо учитывать эффект деформационного упрочнения (см. следующий раздел статьи). Однако стоит также отметить и тот факт, что кривая (24) описывает не все эксперименты, результаты которых показаны на рис. 4. Это не делает модель (24) универсальной, поэтому даже сегодня интенсивно проводятся новые эксперименты и на их основе строятся новые теории. В нашем случае мы используем критерий нелокальной пластичности (10), который ранее для описания процесса столкновений не использовался (не считая нашу предыдущую работу [18]). Этот критерий справедлив не для всех ситуаций и условий, как это описано выше, поэтому предлагаемая нами модель также является частным случаем.

#### 4. Учет эффекта деформационного упрочнения

Ранее в работе [18] нами уже проводилось моделирование нормального столкновения с использованием критерия пластичности (10). А именно, мы теоретически описали эксперимент, проведенный в работе [20]. В этой работе экспериментально определялась зависимость коэффициента восстановления нормальной скорости  $e_n$  (21) от значения начальной нормальной скорости шарика  $v_{z0}$ . А именно, изучалось отражение шарика от гладкой стальной пластины, которую мы при моделировании считали полупространством. Поскольку в реальных экспериментах всегда присутствуют неровности поверхностей, которые деформируются при ударе, незначительная диссипация энергии присутствует даже в области упругого удара при  $v_{z0} < v_{z0}^{\text{crit}}$  (23). Более того, к диссипации приводит и трение при движении в воздушной среде (эксперимент в [20] проводился в воздухе). Авторам работы [20] после тщательной полировки поверхностей контактирующих объектов удалось достичь максимального значения коэффициента восстановления в упругой области  $e_n \approx 0.95$ , а это очень близко к 1, что говорит о высокой точности проведенных измерений.

Предлагаемая нами модель упруго-пластического столкновения предполагает идеально гладкие поверхности контактирующих тел, и в этом случае при малых скоростях нормального соударения (когда реализуется чисто упругое столкновение) коэффициент восстановления  $e_n = 1$ . Однако, как мы это указали выше, за счет влияния факторов, которые не учитываются в нашей модели, в работе [20] максимальное значение коэффициента восстановления нормальной скорости не превышало значение 0.95. Поэтому при расчетах в [18] мы производили нормировку коэффициента восстановления на это максимальное значение.

Отметим, что практически во всех реальных ситуациях при пластическом деформировании происходит деформационное упрочнение материала в зоне пластического течения. Как показано нами в работе [18], экспериментальные результаты из [20] могут быть описаны в

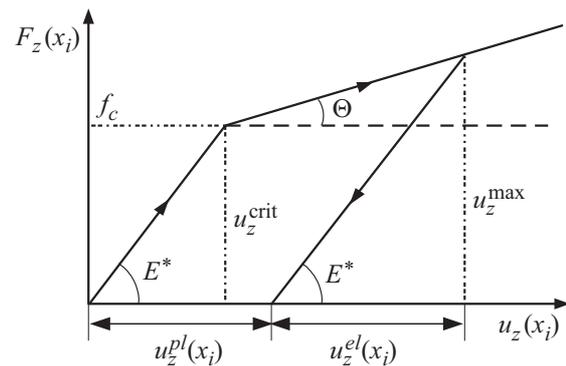


Рис. 5. Схематический вид кривой нагружения для выделенной пружины с координатой  $x_i$  с деформационным упрочнением материала.

рамках предлагаемой модели только при учете деформационного упрочнения материала. При учете упрочнения диаграмма нагружения имеет вид (ср. с рис. 1), показанный на рис. 5 [30]. Здесь отличие от диаграммы, показанной на рис. 1, состоит в том, что при превышении упругой силой критического значения  $f_c$  дальнейшее деформирование также происходит согласно закону Гука, но с более пологим наклоном, который задается коэффициентом упрочнения  $\Theta$ . Разгрузка, как это показано на рисунке, происходит по гуковскому участку с наклоном, задающимся эффективным модулем упругости  $E^*$ .

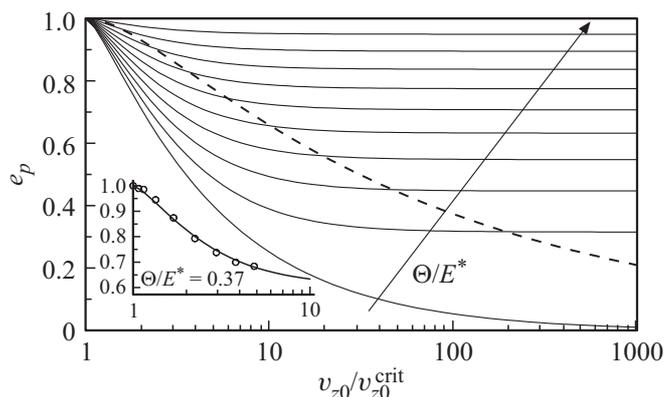
Введенные ранее формулы (11)–(13) для учета упрочнения необходимо преобразовать [18]. Итак, до критического значения  $f_c$  (10) пружина деформируется упруго, а нормальная сила задается законом Гука (11), в котором  $u_z^{\text{pl}}(x_i) = 0$ . На упругом участке при разгрузке пружины она полностью восстанавливает свою первоначальную форму. Поэтому если в процессе соударения начальная скорость шарика меньше критической и пластические деформации не наблюдаются, коэффициент восстановления равен 1, поскольку диссипация энергии отсутствует. Если же натяжение пружины превысит критическое значение  $u_z(x_i) > u_z^{\text{crit}}$  (12), то величина упругой силы  $F_z(x_i)$  задается соотношением (без учета упрочнения ранее использовалось соотношение  $F_z(x_i) = f_c$ , которое следует из (26) при  $\Theta = 0$ )

$$F_z(x_i) = f_c + [u_z(x_i) - u_z^{\text{crit}}]\Theta E^*. \quad (26)$$

При разгрузке пластически деформированной пружины по гуковскому участку (см. рис. 5) пластическая составляющая смещения пружины может быть найдена по формуле (ср. с (13))

$$u_z^{\text{pl}}(x_i) = (u_z^{\text{max}} - u_z^{\text{crit}}) \left(1 - \frac{\Theta}{E^*}\right). \quad (27)$$

В процессе разгрузки пружины нормальную силу следует вычислять по формуле (11), где  $u_z^{\text{pl}}(x_i)$  определяется согласно (27).



**Рис. 6.** Зависимости коэффициента восстановления нормальной скорости  $e_p$  (21) как функции нормированного значения начальной скорости шарика  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}}$ . Кривые, расположенные снизу вверх, построены при значениях  $\Theta/E^*$  от 0 до 0.9 с шагом 0.1. Увеличение параметра  $\Theta/E^*$  показано стрелкой. На вставке к рисунку приведена кривая для значения  $\Theta/E^* = 0.37$ , на которую наложены данные эксперимента (кружки), из работы [20], нормированные на максимальное наблюдаемое экспериментально значение  $e_p = 0.95$ . Пунктирной линией показано решение (24).

Таким образом, в рамках описанной процедуры (11), (26) и (27) дополнительно появляется безразмерный параметр  $\Theta/E^*$ , значение которого влияет на коэффициент восстановления нормальной скорости. При  $\Theta/E^* = 0$  имеем ситуацию, показанную звездочками на рис. 4. В другом предельном случае  $\Theta/E^* = 1$  коэффициент восстановления всегда равен единице, поскольку в этом случае удар абсолютно упругий. На рис. 6 показаны зависимости коэффициентов восстановления для различных значений отношения  $\Theta/E^*$ . Нижняя кривая на рисунке построена при значении  $\Theta/E^* = 0$  и соответствует ситуации отсутствия упрочнения (эта кривая полностью совпадает с кривой, показанной звездочками на рис. 4). С увеличением значения коэффициента упрочнения, как это видно из рисунка, коэффициент восстановления  $e_p$  возрастает. Это связано с тем, что с ростом параметра  $\Theta/E^*$  диссипация механической энергии уменьшается. В предельном случае  $\Theta/E^* = 1$  мы всегда имеем значение  $e_p = 1$ , поскольку в такой ситуации согласно рис. 5 реализуется только гуковский участок зависимости, а пластическая деформация при этом отсутствует. Таким образом, нами рассмотрен полный диапазон значений  $0 \leq \Theta/E^* \leq 1$ .

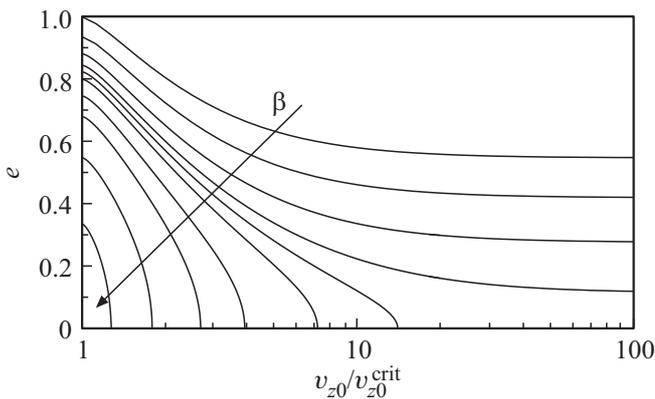
На вставке к рис. 6 показана зависимость коэффициента упрочнения от нормированной нормальной скорости для значения  $\Theta/E^* = 0.37$ . Для такой ситуации существуют экспериментальные данные, полученные в работе [20] и теоретически описанные нами ранее в статье [18] (показаны символами на вставке к рис. 6). Причем в [18] исследование приведено в размерных параметрах, при конкретном размере шарика, его плотности, фиксировался также параметр  $q_c$ . Здесь

же для теоретического расчета зависимости необходимо знать только значения  $\Theta/E^*$  и  $v_{z0}^{\text{crit}}$ . Величина  $v_{z0}^{\text{crit}}$  взята нами непосредственно из работы [20] (это минимальное начальное значение нормальной скорости  $v_{z0}$ , при которой начинаются пластические деформации). Параметр  $\Theta/E^*$  в [20] не приведен, поэтому в нашем рассмотрении он является подстроечным параметром. Помимо этого в [20] наблюдалось максимальное значение  $e_p = 0.95$ , поэтому результаты эксперимента, показанные на вставке к рис. 6, нормированы на эту величину. В эксперименте значение  $e_p = 1$  не достижимо, поскольку помимо рассматриваемого механизма пластической деформации существуют другие каналы диссипации энергии, связанные с шероховатостями поверхностей, наличием загрязнений в области контакта, трением при движении шарика в воздушной среде, адгезией и т.д. Указанная нормировка позволяет исключить влияние этих эффектов. При этом существуют эксперименты, в которых коэффициент восстановления  $e_p$  при малых скоростях даже больше 1, например [31] (см. также обзор [14]). Однако это практически всегда связано с неточностью проведения эксперимента, поскольку в описанных выше условиях такая ситуация соответствует нарушению закона сохранения энергии и не может быть реализована согласно первому закону термодинамики.

Дополнительно стоит отметить, что возможна также и ситуация, в которой  $\Theta/E^* < 0$ , то есть коэффициент упрочнения  $\Theta$  задает отрицательный наклон зависимости  $F_z(u_z)$ , показанной на рис. 5. При этом реализуется эффект разупрочнения, связанный с разрушением материала. Мы такой случай не рассматриваем, хотя применяемый нами метод позволяет провести моделирование при любой заданной зависимости  $F_z(u_z)$ . В случае разупрочнения и частичного разрушения материала коэффициент восстановления  $e_p$  будет уменьшаться, поскольку появляется дополнительный канал диссипации энергии. Отметим также, что на рис. 6 пунктирной линией показано решение (24), полученное в работе [8]. Как видно, эта кривая сильно расходится с показанными на этом же рисунке экспериментальными результатами. Это лишний раз показывает, что теория, предложенная в [8], не описывает все возможные сценарии пластической деформации.

## 5. Влияние адгезионного взаимодействия в зоне контакта

На динамику соударений существенное влияние оказывает адгезионное взаимодействие, которое приводит к дополнительной диссипации механической энергии во время контакта. В теоретической работе [8] предложена модель, которая описывает одновременно наличие адгезионных сил и пластической деформации (см. также обзор [14]). В случае наличия одних лишь адгезионных сил (модель адгезионного взаимодействия JKR [32,33]) без



**Рис. 7.** Зависимости коэффициента восстановления нормальной скорости  $e$  (30) как функции нормированного значения начальной скорости шарика  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}}$ , полученные при значении  $\Theta/E^* = 0.3$ . Кривые, расположенные сверху вниз, построены при значении параметра  $\beta = 0, 0.15, 0.19, 0.21, 0.22, 0.23, 0.25, 0.27, 0.3, 0.33$ . Увеличение параметра  $\beta$  дополнительно показано стрелкой.

пластической деформации коэффициент восстановления запишется как [8,24]

$$e_a = -\frac{v_z}{v_{z0}} = \sqrt{1 - \frac{\sqrt[3]{4\pi^5}}{10} (12 + \sqrt[3]{2})\beta^{5/2}}, \quad (28)$$

где коэффициент восстановления является функцией единственной переменной  $\beta$ , которая задается точным выражением [24]

$$\beta = \left( \frac{R^4 \Delta\gamma^5}{E^* m^3 v_{z0}^6} \right)^{2/15}, \quad (29)$$

где введена поверхностная энергия  $\Delta\gamma$ , а  $m$  — это масса шарика, как и в (22). Авторы работы [8] для учета адгезии и пластических деформаций предлагают аппроксимацию

$$e = \sqrt{e_p^2 + e_a^2} - 1, \quad (30)$$

где коэффициент восстановления  $e_p$  в [8] задавался формулой (24), а в рассматриваемом нами случае нелокальной пластической деформации он показан на рис. 6. Используя формулы (28)–(30) и результаты моделирования, показанные на рис. 6, легко рассчитать значение  $e$  (30) в общем случае адгезионного контакта с наличием пластической деформации и эффекта упрочнения. Стоит отметить, что аппроксимация (30) является приближением, которое описывает влияние адгезии скорее качественным образом, и для точного выяснения такого влияния необходимо проводить дополнительное моделирование. Однако для определения основных закономерностей поведения рассматриваемой системы использования формулы (30) вполне достаточно.

На рис. 7 показаны рассчитанные по формуле (30) зависимости коэффициента восстановления  $e$  от безразмерной скорости  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}}$ , где  $v_{z0}^{\text{crit}}$  определялась введенным выше соотношением (25). Здесь верхняя кривая ( $\beta = 0$ ) повторяет кривую при  $\Theta/E^* = 0.3$ , приведенную на рис. 6 (там это четвертая кривая снизу). Для  $\beta = 0$  адгезия отсутствует и диссипация механической энергии осуществляется только за счет пластической деформации. Согласно рисунку с увеличением параметра  $\beta$  коэффициент восстановления уменьшается, поскольку вклад адгезии в общую диссипацию энергии увеличивается. Поскольку на рис. 6 значение  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}} = 1$  соответствует скорости, при которой начинается пластическая деформация, в этой точке диссипация происходит только за счет адгезии. Видно, что с ростом параметра  $\beta$  коэффициент восстановления  $e$  при  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}} = 1$  также уменьшается. Из формулы (28) легко определить значение  $\beta$ , при котором вся механическая энергия будет затрачена на работу сил адгезии, в отсутствие пластических деформаций. Это значение получается из (28) при  $e_a = 0$ , что дает

$$\beta_c = \frac{5^{2/5} 2^{2/15}}{(12 + 2^{1/3})^{2/5} \pi^{2/3}} \approx 0.3461590663. \quad (31)$$

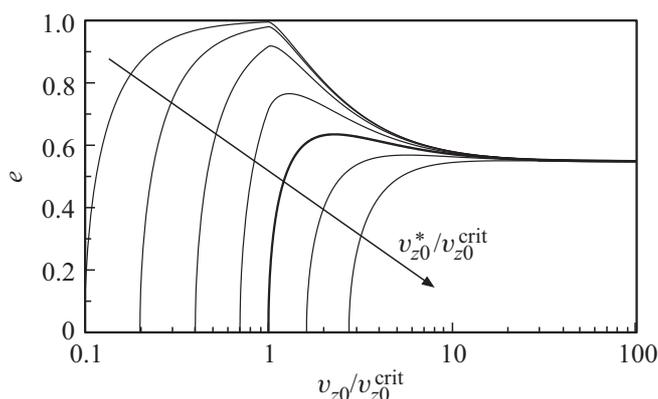
При  $\beta > \beta_c$  (31) частица не отражается от поверхности полупространства, а прилипает к ней за счет адгезии.

На рис. 7 нами показаны зависимости коэффициента восстановления  $e$  как функции безразмерной скорости  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}}$  и параметра  $\beta$  (29). Однако, в работе [8] авторы предлагают другую на наш взгляд интересную параметризацию такой задачи. Они приводят аналогичные зависимости, только фиксируют не параметр  $\beta$ , а другой безразмерный параметр, который равен отношению критической скорости, при которой за счет адгезионных сил происходит полная диссипация механической энергии  $v_{z0}^*$ , к ранее введенной величине  $v_{z0}^{\text{crit}}$ . Скорость  $v_{z0}^*$  может быть найдена из выражений (31) и (29), что приводит к соотношению вида [8]

$$v_{z0}^* = \sqrt{\frac{3(12 + 2^{1/3})}{20}} \left( \frac{\pi^2 \Delta\gamma^5}{2E^* R^5 \rho^3} \right)^{1/6}. \quad (32)$$

В случае  $v_{z0} < v_{z0}^*$  частица за счет адгезии остается на поверхности и не отражается от нее, даже в случае отсутствия пластических деформаций.

На рис. 7 все кривые начинаются со значения коэффициента восстановления  $e$ , которое не изменяется при уменьшении скорости ниже  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}}$ , поскольку для таких скоростей пластическая деформация отсутствует. Как мы указывали выше, в работе [8] фиксируется значение безразмерного параметра  $v_{z0}^*/v_{z0}^{\text{crit}}$ , а не параметра  $\beta$ . Такое представление результатов может давать в некотором смысле более наглядную картину. Зависимости коэффициента восстановления от значения  $v_{z0}/v_{z0}^{\text{crit}}$  при фиксированных величинах  $v_{z0}^*/v_{z0}^{\text{crit}}$  могут быть рассчитаны используя результаты, показанные на рис. 6. Для этого необходимо использовать формулу для



**Рис. 8.** Зависимости коэффициента восстановления нормальной скорости  $e$  (30) как функции нормированного значения начальной скорости шарика  $v_{z0}/v_{z0}^{crit}$ , при значении  $\Theta/E^* = 0.3$ . Кривые, расположенные сверху вниз, построены при значении параметра  $v_{z0}^*/v_{z0}^{crit} = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 1.4, 2.0$ . Увеличение параметра  $v_{z0}^*/v_{z0}^{crit}$  дополнительно показано стрелкой.

коэффициента восстановления при диссипации механической энергии за счет сил адгезии (28), которую можно записать также в ином виде [8]

$$e_a = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{z0}^*}{v_{z0}}\right)^2}. \quad (33)$$

Перепишем последнее выражение как

$$e_a = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{z0}}{v_{z0}^{crit}}\right)^{-2} \left(\frac{v_{z0}^*}{v_{z0}}\right)^2}. \quad (34)$$

Запись (34) является полным эквивалентом (33), однако выражение в такой форме позволяет использовать результаты, представленные на рис. 6, вычислить значение  $e_a$ , соответствующее набору фиксированных отношений  $v_{z0}/v_{z0}^{crit}$  и  $v_{z0}^*/v_{z0}^{crit}$ . Далее, используя аппроксимацию (30), легко можно найти значение коэффициента восстановления  $e$ . Рассчитанные таким образом зависимости показаны на рис. 8. Из рисунка следует, что с увеличением значения безразмерного параметра  $v_{z0}^*/v_{z0}^{crit}$  коэффициент восстановления  $e$  также уменьшается, за счет увеличения вклада адгезии в общую диссипацию механической энергии. Пластическая деформация здесь как и на предыдущих рисунках начинается после значения скорости  $v_{z0}/v_{z0}^{crit} > 1$ , поэтому до этого значения потери энергии осуществляются только за счет адгезии, а коэффициент восстановления определяется формулой (34). Для кривой, построенной при  $v_{z0}^*/v_{z0}^{crit} = 1$  (пятая кривая сверху, показана жирной линией на рисунке) выполняется соотношение  $v_{z0}^{crit} = v_{z0}^*$ , т.е. при значении скорости, при которой начинаются пластические деформации, вся энергия диссипируется за счет адгезии, поэтому в этой точке реализуется величина  $e = 0$ . С дальнейшим увеличением начальной скорости  $v_{z0}$  вклад в диссипацию энергии за счет адгезии

уменьшается, а коэффициент восстановления нарастает, несмотря на то, что вклад пластических деформаций с увеличением скорости в общую диссипацию энергии при этом возрастает (см. рис. 6 и 7). Результаты, показанные на рис. 8, качественно повторяют аналогичные результаты, полученные в работе [8]. Однако в нашем случае имеются существенные количественные отличия, поскольку мы рассмотрели случай нелокальной пластичности, задающийся критерием (10) и провели учет эффекта деформационного упрочнения, отсутствующего в [8].

## 6. Заключение

В работе предложена численная модель, описывающая нормальное столкновение сферических тел, с наличием пластических деформаций и сил адгезии в зоне контакта. Выяснено, от каких параметров зависит значение коэффициента восстановления нормальной скорости. Соответствующие параметры записаны в безразмерном виде и в широком диапазоне таких параметров проведено численное моделирование процесса столкновения. Интересно то, что полученные результаты с высокой точностью совпадают с экспериментальными результатами из работы [20]. Классические теории такого совпадения не показывают. Более того, нами был проведен учет деформационного упрочнения, которое практически всегда имеет место при пластических деформациях. Это является преимуществом по сравнению с классическими моделями теории столкновений. Показано, что коэффициент восстановления зависит от трех безразмерных параметров, которые зависят от начальной скорости, а также от геометрических, материальных и адгезионных характеристик контактирующих материалов. Полученное в работе семейство кривых способно описать эксперименты с различным набором параметров, которые определяют значения указанных безразмерных величин. Предложенное описание справедливо при реализации условий нелокальной пластичности, в области, где отсутствует канал диссипации энергии, связанный с разрушением и растрескиванием образца, то есть где реализуется пластическая область кривой нагружения.

Автор выражает благодарность В.Л. Попову за полезные обсуждения в процессе проведения исследования.

## Список литературы

- [1] M.P. Ciamarra, A.H. Lara, A.T. Lee, D.I. Goldman, I. Vishik, H.L. Swinney. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 194301 (2004).
- [2] P. Jop, Y. Forterre, O. Pouliquen. *Nature* **441**, 727 (2006).
- [3] N.V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel. *Phys. Rev. E* **53**, 5382 (1996).
- [4] F.G. Bridges, A. Hatzes, D.N.C. Lin. *Nature* **309**, 333 (1984).
- [5] N.V. Prodanov, A.V. Khomenko. *Surf. Sci.* **604**, 730 (2010).
- [6] I.A. Lyashenko. *FU Mech. Eng.* **14**, 313 (2016).
- [7] В.В. Ефименко. *Вестн. ФГОУ ВПО МГАУ* **2**, 41 (2009).
- [8] C. Thornton, Z. Ning. *Powder Technol.* **99**, 154 (1998).

- [9] P. Müller, R. Böttcher, A. Russell, M. Trüe, S. Aman, J. Tomas. *Adv. Powder Technol.* **27**, 1233 (2016).
- [10] P. Müller, R. Böttcher, A. Russell, M. Trüe, J. Tomas. *Chem. Eng. Sci.* **138**, 689 (2015).
- [11] S. Aman, P. Müller, J. Tomas, S. Kozhar, M. Dosta, S. Heinrich, S. Antonyuk. *Adv. Powder Technol.* **27**, 1244 (2016).
- [12] L.-Y. Li, C. Thornton, C.-Y. Wu. *Proc. Instn. Mech. Eng. Part C* **214**, 1107 (2000).
- [13] J. Xie, M. Dong, S. Li. *Aerosol Sci. Technol.* **50**, 321 (2016).
- [14] Я.А. Ляшенко, Э. Виллерт, В.Л. Попов. *Вестн. ПНИПУ. Механика* **2**, 44 (2018).
- [15] M.R.W. Brake. *Int. J. Solids Struct.* **62**, 104 (2015).
- [16] J. Ma, D. Liu, X. Chen. *Aerosol Air Qual. Res.* **16**, 1533 (2016).
- [17] T. Müller, F. Gollwitzer. *AIP Conf. Proc.* **1542**, 787 (2013).
- [18] Я.А. Ляшенко, В.Л. Попов. *ФТТ* **60**, 560 (2018).
- [19] V.L. Popov. *FU Mech. Eng.* **13**, 39 (2015).
- [20] J.M. Lifshitz, H. Kolsky. *J. Mech. Phys. Solids* **12**, 35 (1964).
- [21] V.L. Popov, M. Heß. *Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction.* Springer-Verlag, Berlin (2015). 265 p.
- [22] I.A. Lyashenko, V.L. Popov. *Sci. Rep.* **5**, 8479 (2015).
- [23] E. Willert, V.L. Popov. *Z. Angew. Math. Mech.* **96**, 1089 (2016).
- [24] I.A. Lyashenko, E. Willert, V.L. Popov. *Mech. Mater.* **92**, 155 (2016).
- [25] V.L. Popov, E. Willert, M. Heß. *FU Mech. Eng.* **16**, 99 (2018).
- [26] H.J. Hertz. *J. Reine Angew. Math.* **92**, 156 (1882).
- [27] R.M. Davies. *Proc. R. Soc. London A* **197**, 416 (1949).
- [28] H. Minamoto, S. Kawamura. *Int. J. Impact Eng.* **38**, 123 (2011).
- [29] A.H. Kharaz, D.A. Gorham. *Philos. Mag. Lett.* **80**, 549 (2000).
- [30] А.Д. Погребняк, С.Н. Братушка, В.М. Береснев, N. Levintant-Zayonts. *Успехи химии* **82**, 1135 (2013).
- [31] C.M. Sorace, M.Y. Louge, M.D. Crozier. *Mech. Res. Commun.* **36**, 364 (2009).
- [32] K.L. Johnson, K. Kendall, A.D. Roberts. *Proc. R. Soc. London A* **324**, 301 (1971).
- [33] A. Papangelo. *FU Mech. Eng.* **16**, 19 (2018).

*Редактор Т.Н. Василевская*