

01

## Реконструкция ансамблей осцилляторов с нелинейными запаздывающими связями

© И.В. Сысоев<sup>1,2</sup>, В.И. Пономаренко<sup>1,2</sup>, М.Д. Прохоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

<sup>2</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
E-mail: ivssci@gmail.com

Поступило в Редакцию 30 июля 2018 г.

Предложен метод реконструкции ансамблей нелинейных осцилляторов, связанных между собой нелинейными связями с запаздыванием. Метод позволяет восстановить по временным рядам собственные нелинейные функции всех элементов ансамбля, а также архитектуру связей между осцилляторами и параметры всех сигмоидных функций связи, включая время запаздывания.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.22.46922.17479

Задача реконструкции модельных уравнений и определения параметров колебательных систем по их экспериментальным временным рядам актуальна для многих научных дисциплин [1]. Для решения этой задачи разработаны различные методы, причем в последние годы все большее внимание уделяется реконструкции не отдельных систем, а ансамблей связанных между собой осцилляторов [2–8]. При этом помимо восстановления собственных параметров элементов ансамбля возникает задача выявления наличия, структуры и характеристик связей между элементами. Недавно нами были предложены методы реконструкции архитектуры и величины связей в ансамблях линейно связанных нелинейных систем с запаздыванием [9–11] и в ансамблях нелинейно связанных линейных осцилляторов [12]. В настоящей работе рассмотрен более общий случай ансамбля нелинейных осцилляторов, связанных между собой нелинейными связями с запаздыванием, и предложен метод, позволяющий по временным рядам реконструировать собственные нелинейные функции всех элементов ансамбля, а также

архитектуру связей и нелинейные функции связи между каждой парой осцилляторов ансамбля.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из нелинейно связанных нелинейных осцилляторов, каждый из которых описывается дифференциальным уравнением первого порядка следующего вида:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \tanh(g_{i,j}(x_j(t - \tau_{i,j}) - c_{i,j})), \quad (1)$$

где  $i = 1, \dots, D$ ;  $D$  — число осцилляторов в ансамбле;  $f_i$  — нелинейная функция осциллятора;  $k_{i,j}$  — коэффициенты связи, характеризующие воздействие  $j$ -го элемента на  $i$ -й; сигмоидная функция связи описывается гиперболическим тангенсом с масштабным коэффициентом  $g_{i,j}$  и параметром сдвига  $c_{i,j}$ ;  $\tau_{i,j}$  — время запаздывания в связи от  $j$ -го элемента к  $i$ -му. Уравнение (1) является обобщением уравнения, предложенного в [13] для ансамбля линейных осцилляторов, не имеющих задержек в связях.

Пусть даны временные ряды  $\{x_i(t_n)\}_{n=1}^N$  длиной  $N$  точек всех осцилляторов ансамбля, измеренные с шагом выборки  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Для простоты обозначим  $x_i(t_n) = x_i(n)$  и  $\dot{x}_i(t_n) = \dot{x}_i(n)$ . Введем дискретные времена запаздывания в связях  $\theta_{i,j} = \tau_{i,j}/\Delta t$  и обозначим максимальное из  $\theta_{i,j}$  для данного  $i$  как  $\theta_i$ . Теперь выразим нелинейную функцию  $f_i$  из уравнения (1) в виде

$$f_i(x_i(n)) = \dot{x}_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D k_{i,j} \tanh(g_{i,j}(x_j(n - \theta_{i,j}) - c_{i,j})), \quad (2)$$

где  $n \in [\theta_i + 1, N]$ . Введем отображение  $Q$ , которое производит сортировку значений  $x_i(n)$  по возрастанию и ставит в соответствие номеру  $n$  величины  $x_i(n)$  в исходном временном ряду ее номер  $Q_i(n)$  в отсортированном ряду. Обратное отображение, ставящее в соответствие номеру  $Q_i(n)$  величины  $x_i(n)$  в отсортированном ряду ее номер  $n$  в исходном временном ряду, обозначим как  $Q^{-1}$ . Тогда две соседние точки в отсортированном ряду, имеющие номера  $Q_i(n)$  и  $Q_i(n) - 1$ , будут иметь номера  $n$  и  $p_n$  в исходном ряду, где  $p_n = Q_i^{-1}(Q_i(n) - 1)$ .

В предположении непрерывности функции  $f_i$  близким значениям  $x_i(n)$ , имеющим в исходном ряду порядковые номера  $n$  и  $p_n$ , соответствуют близкие значения функции  $f_i(x_i(n))$  и  $f_i(x_i(p_n))$ . Разность

значений функции в точках  $n$  и  $p_n$  обозначим  $\delta_i(n)$

$$\delta_i(n) = f_i(x_i(n)) - f_i(x_i(p_n)) = \Delta \dot{x}_i(n) - \sum_{j=1, j \neq i}^D \Delta h_{i,j}(n - \theta_{i,j}), \quad (3)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(n) - \dot{x}_i(p_n), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{j,j}(n - \theta_{i,j}) &= k_{i,j} \tanh\left(g_{i,j}(x_j(n - \theta_{i,j}) - c_{i,j})\right) \\ &- k_{i,j} \tanh\left(g_{i,j}(x_j(p_n - \theta_{i,j}) - c_{i,j})\right). \end{aligned} \quad (5)$$

При  $N \rightarrow \infty$  разности  $\delta_i(n) \rightarrow 0$ . Предположим сначала, что нам известны все времена запаздывания  $\theta_{i,j}$  в связях, а параметры  $k_{i,j}$ ,  $g_{i,j}$  и  $c_{i,j}$  являются неизвестными. Эти неизвестные параметры, характеризующие связь осцилляторов ансамбля, можно восстановить, решая задачу минимизации следующей целевой функции:

$$S_i(k_{i,1}, \dots, k_{i,D}, g_{i,1}, \dots, g_{i,D}, c_{i,1}, \dots, c_{i,D}) = \sum_{n=\theta_i+1}^N \delta_i^2(n). \quad (6)$$

Минимум функции (6) дает оценку параметров  $k_{i,j}$ ,  $g_{i,j}$  и  $c_{i,j}$ , точность которой зависит от длины ряда, наличия шумов и точности оценки производной. Для нахождения производной  $\dot{x}_i(n)$  по временному ряду мы использовали численный метод Савицкого–Голея [14]. Задача минимизации функции (6) сводится к нелинейному методу наименьших квадратов, для реализации которого мы использовали метод Левенберга–Марквардта [15] и метод отображения доверительных областей [16]. Оба метода дали близкие результаты. Восстановив все коэффициенты связи и параметры функций связи элементов ансамбля, можно восстановить собственные нелинейные функции  $f_i$  всех осцилляторов по формуле (2). Следует отметить, что описанный подход позволяет восстанавливать нелинейные функции  $f_i$  произвольного вида.

Проиллюстрируем эффективность метода на примере ансамбля восьми связанных осцилляторов вида (1), имеющих кубическую нелинейную функцию

$$f_i(x_i) = a_i x_i + b_i x_i^3. \quad (7)$$

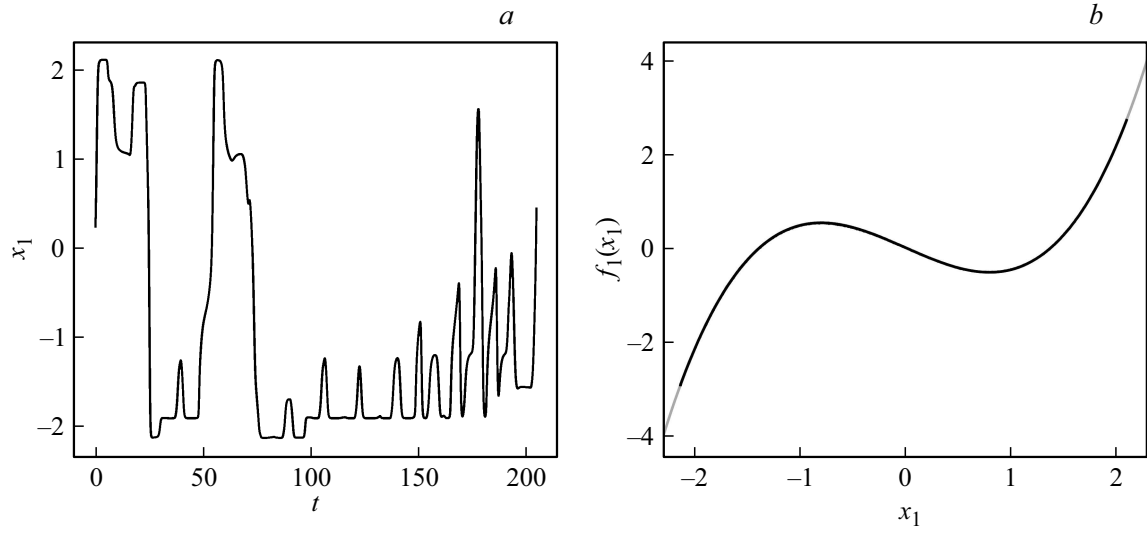
Все осцилляторы ансамбля являются неидентичными. Параметры нелинейных функций и функций связи принимают случайные значения из

равномерного распределения на следующих отрезках:  $a_i \in [0.5, 1.5]$ ,  $b_i \in [0, 1]$ ,  $g_{i,j} \in [0.5, 1.5]$ ,  $c_{i,j} \in [-1, 1]$ ,  $\theta_{i,j} \in [130, 200]$ . Из 56 возможных связей между осцилляторами ансамбля половина случайно выбранных связей была положена равной нулю ( $k_{j,j} = 0$ ), а остальные 28 коэффициентов  $k_{i,j}$  были заданы случайным образом из нормального распределения с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением, равным  $6/\sqrt{D}$ . Для численного решения уравнений использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка с адаптивным шагом и  $\Delta t = 0.05$ . Длина временных рядов  $N = 2^{12}$ .

На рисунке, *a* приведен хаотический временной ряд первого осциллятора. Восстановленная нелинейная функция первого осциллятора показана на рисунке, *b*. Она практически совпадает с истинной нелинейной функцией  $f_1$ . На рисунке, *c* восстановлена одна из функций связи первого осциллятора, которая описывает воздействие второго осциллятора на первый. Как видно из этого рисунка, восстановленная функция связи достаточно близка к истинной функции связи  $h_{1,2}$ . Хорошее качество реконструкции нелинейных функций  $f_1$  и  $h_{1,2}$  свидетельствует о высокой точности восстановления параметров  $k_{i,j}$ ,  $g_{i,j}$  и  $c_{i,j}$ . Аналогичным образом проводится реконструкция остальных функций связи первого осциллятора, а также собственных нелинейных функций и функций связи остальных элементов ансамбля.

Всего было рассмотрено четырнадцать реализаций ансамбля из восьми связанных осцилляторов при различных значениях параметров. В семи случаях архитектура связей в ансамбле была восстановлена без ошибок, в четырех случаях была найдена одна лишняя связь, а в остальных трех случаях имелись как лишние, так и пропущенные связи. На рисунке, *d* приведена диаграмма восстановленной архитектуры связей в ансамбле, соответствующая случаю абсолютно точной реконструкции.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда времена запаздывания в связях  $\theta_{i,j}$  заранее неизвестны. Зададим стартовые догадки  $\tilde{\theta}_{i,j}$  при фиксированном индексе  $i$  и найдем для них минимум  $S_{i0}$  целевой функции (6). Затем для одной из связей увеличим дискретное время задержки  $\tilde{\theta}_{i,j}$  на 1 и найдем минимум  $S_{i+}$  функции (6), после чего вернем прежнее значение  $\tilde{\theta}_{i,j}$ . Повторим эту процедуру по очереди для каждой связи. Далее найдем минимумы  $S_{i-}$  функции (6) при поочередном уменьшении каждого  $\tilde{\theta}_{i,j}$  на 1. Из  $D - 1$  минимумов  $S_{i+}$  и  $D - 1$  минимумов  $S_{i-}$  найдем наименьший  $S_{i \min}$ . Если  $S_{i \min} < S_{i0}$ , то



$a$  — временной ряд колебаний первого осциллятора;  $b$  — восстановленная (черная кривая) и истинная (серая кривая) функция  $f_1$ ;  $c$  — восстановленная на плоскости  $(x_2, y_{1,2})$  (черная кривая), где  $y_{1,2} = k_{1,2} \tanh(g_{1,2}(x_2 - c_{1,2}))$ , и истинная (серая кривая) функция связи  $h_{1,2}$ ;  $d$  — диаграмма восстановленной архитектуры связей, где черным цветом показаны правильно восстановленные связи, а белым — правильно диагностированные отсутствующие связи.

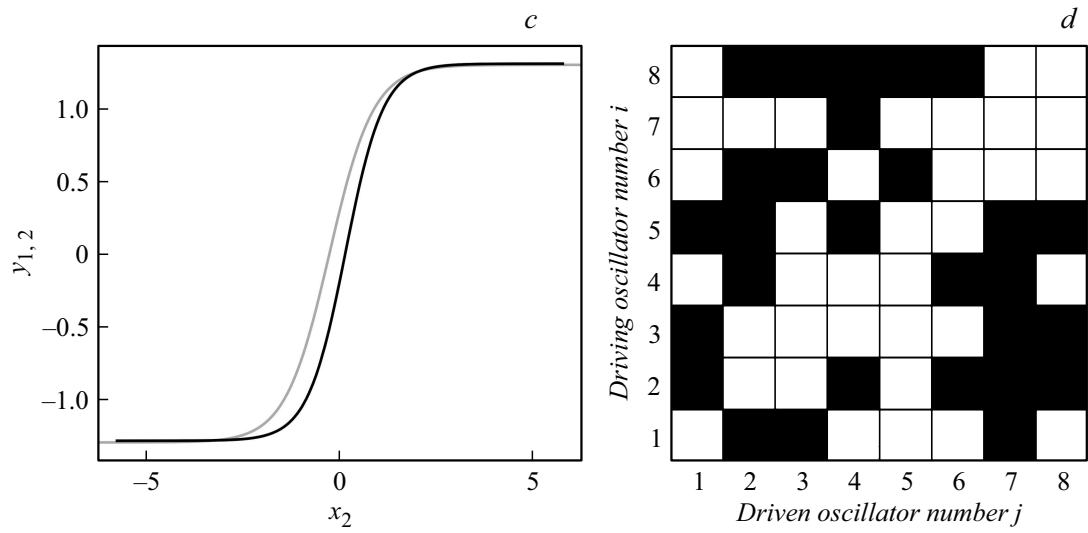


Рисунок (продолжение).

значения  $\tilde{\theta}_{i,j}$ , соответствующие  $S_{i \min}$ , принимаются за новые стартовые догадки и процедура повторяется, пока  $S_{i \min}$  не достигнет минимума.

Недостатком такого подхода является возможность попадания в локальный минимум целевой функции (6). В рассмотренных нами примерах алгоритм позволял точно восстановить  $\theta_{i,j}$ , если стартовые догадки  $\tilde{\theta}_{i,j}$  отличались от  $\theta_{i,j}$  менее чем на 5%. С увеличением разности  $|\theta_{i,j} - \tilde{\theta}_{i,j}|$  растет вероятность ошибок при реконструкции  $\theta_{i,j}$ . Такие ошибки можно исправить, сканируя область стартовых догадок для  $\theta_{i,j}$  с некоторым шагом, что требует существенного увеличения вычислительных затрат.

Итак, нами предложен метод реконструкции архитектуры и параметров связей в ансамблях нелинейных осцилляторов, связанных нелинейными связями с запаздыванием. Помимо функций связи между каждой парой осцилляторов в ансамбле метод позволяет восстановить по временным рядам собственные нелинейные функции произвольного вида для каждого осциллятора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-02-00091).

## Список литературы

- [1] *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Extracting knowledge from time series. An introduction to nonlinear empirical modeling. Berlin: Springer, 2010. 405 p.
- [2] *Han X., Shen Z., Wang W.-X., Di Z.* // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 114. N 2. P. 028701.
- [3] *Yang X.L., Wei T.* // Nonlinear Dynamics. 2015. V. 82. P. 319–332.
- [4] *Pikovskiy A.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 93. N 6. P. 062313.
- [5] *Koutlis C., Kugiumtzis D.* // Chaos. 2016. V. 26. N 9. P. 093120.
- [6] *Wang W.-X., Lai Y.-C., Grebogi C.* // Phys. Rep. 2016. V. 644. P. 1–76.
- [7] *Cestnik R., Rosenblum M.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. N 1. P. 012209.
- [8] *Ma H., Leng S., Tao C., Ying X., Kurths J., Lai Y.-C., Lin W.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. N 1. P. 012221.
- [9] *Сысоев И.В., Прохоров М.Д., Пономаренко В.И., Безручко Б.П.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 10. С. 16–26.
- [10] *Sysoev I.V., Ponomarenko V.I., Kulminskiy D.D., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. N 5. P. 052207.
- [11] *Сысоев И.В., Кульминский Д.Д., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24. N 3. С. 21–37.

- 
- [12] *Сысоев И.В., Пономаренко В.И.* // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. N 4. С. 567–576.
- [13] *Sompolinsky H., Crisanti A., Sommers H.-J.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61. N 3. P. 259–262.
- [14] *Savitzky A., Golay M.* // Anal. Chem. 1964. V. 38. P. 1627–1639.
- [15] *Marquardt D.* // SIAM J. Appl. Math. 1963. V. 11. P. 431–441.
- [16] *Coleman T.F., Li Y.* // SIAM J. Optimiz. 1996. V. 6. P. 418–445.