Локализация нелинейных волн между интерфейсами

© И.В. Герасимчук, А.С. Ковалев*

Институт теоретической физики, Национальный научный центр
„Харьковский физико-технический институт“,
61108 Харьков, Украина
E-mail: igera@ukr.net

* Физико-технический институт низких температур
Национальной академии наук Украины,
61103 Харьков, Украина
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua

(Поступила в Редакцию 18 июня 2002 г.)

Проведено аналитическое исследование стационарных локализованных состояний нелинейных волн, распространяющихся в фокусирующей среде вдоль двух плоскопараллельных, отталкивающих волновой поток интерфейсов. Установлена возможность локализации нелинейного волнового пучка в области между такими интерфейсами.

В последнее время особое внимание уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям пространственной локализации нелинейных волн большой мощности в периодических (слоистых, модулированных) системах в направлении, перпендикулярном направлению их распространения [1–3]. В работе [4] в качестве основного шага при изучении пространственной локализации нелинейных волновых потоков в слоистых средах использовалось распространение нелинейного волнового пучка в ангармонической среде вдоль системы двух идентичных узких плоскопараллельных слоев, играющих роль волноводов, „притягивающих“ волны. При этом был предложен новый аналитический метод исследования проблемы и сведения ее к модели связанных ангармонических осцилляторов. В предположении, что волноводы и среда между ними являются нелинейными и отличаются значениями показателя преломления, были выведены дискретные нелинейные динамические уравнения, описывающие амплитуды поля в волноводах, и продемонстрирована возможность локализации нелинейного волнового потока в одном из волноводов. Эта задача имеет непосредственное отношение к нелинейной оптике, поскольку численные и натурные эксперименты по исследованию данной проблемы проводятся наиболее интенсивно именно в этой области физики реальных физических систем и системы параллельных оптических волноводов используются как оптические переключатели в реальных устройствах [5–8].

В настоящей работе исследуется противоположный предельный случай, когда нелинейный волновой поток локализован главным образом в области между „отталкивающими“ нелинейную волну дефектными плоскостями, моделирующими границы раздела оптических сред (интерфейсы). Однако теперь описание системы в терминах амплитуд поля в отдельных интерфейсах является непоследовательным, изучение поставленной задачи не приводит к системе связанных ангармонических осцилляторов. Нами показано, что при распространении нелинейной волны в фокусирующей среде вдоль системы двух отталкивающих волну параллельных тонких слоев возможна локализация волнового потока в области между этими плоскопараллельными интерфейсами.

Рассмотрим нелинейную фокусирующую среду с двумя узкими плоскопараллельными слоями, отличающимися по своим линейным свойствам от окружающей их матрицы, перпендикулярными оси z и расположенными на расстоянии $2a$ друг от друга, существенно превосходящем их толщину (рис. 1). Для предложенной системы уравнение, описывающее медленно меняющуюся со временем и с поперечной координатой огибающую $E(z,t)$ нелинейной монохроматической волны, распространяющейся в такой системе вдоль параллельных дефектных слоев (вдоль оси x), представляет собой стандартное нелинейное уравнение Шредингера с двумя δ-образными возмущениями

$$i\,\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+2\,|E|^2E=\lambda\big[\delta(z+a)+\delta(z-a)\big]E, \quad (1)$$

где предполагается, что параметр $\lambda>0$, т.е. дефектные слои отталкивают волновой поток и играют роль интерфейсов на границе раздела оптических сред (см., например, [9]).

Плотность функции Лагранжа, соответствующая уравнению (1), имеет следующий вид:

$$L=\frac{i}{2}\left(E^*\frac{\partial E}{\partial t}-E\,\frac{\partial E^*}{\partial t}\right)-\left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|^2+|E|^4 - \lambda\big[\delta(z+a)+\delta(z-a)\big]|E|^2. \quad (2)$$

Проблема сводится к решению однородного уравнения (1) в области вне выделенных слоев с граничными условиями возле них (при $z=\mp a$)

$$E\big|_{\mp a-0}=E\big|_{\mp a+0}, \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial z}\right|_{\mp a+0}-\left.\frac{\partial E}{\partial z}\right|_{\mp a-0}=\lambda\,E\big|_{\mp a} \quad (4)$$

и нулевыми асимптотиками на бесконечности ($z\to\pm\infty$). Мы огриничимся исследованием в такой

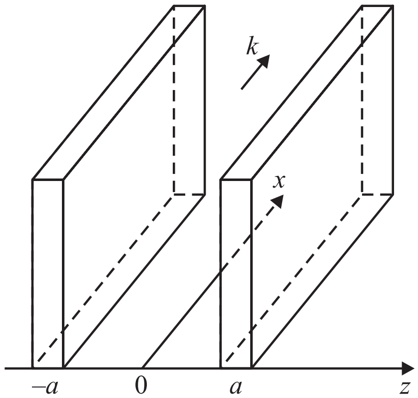

Рис. 1. Система двух плоскопараллельных дефектных плоскостей (интерфейсов).

системе лишь стационарных пространственно локализованных состояний вида

$$E(z,t) = E(z)\exp(-i\omega t) \tag{5}$$

и не будем рассматривать нестационарные явления.

Легко показать, что функция $E(z)$ в этом случае для пространственно локализованных состояний должна быть выбрана вещественной. Действительно, для комплексной функции $E(z) = A(z)\exp[i\varphi(z)]$ из уравнения (1) и граничных условий (3), (4) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{C}{A^2(z)},$$

где C — константа, а фаза φ и ее производная $d\varphi/dz$ непрерывны при $z = \mp a$. Из уравнения для функции $A(z)$ и условия ее убывания при $z \to \pm\infty$ следует, что $C = 0$ вне интерфейсов, а значит (из условия непрерывности $d\varphi/dz$ при $z = \mp a$), $C = 0$ и между ними, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Задачей настоящей работы является изучение влияния нелинейности среды на характер локализации волнового пучка в системе двух плоскопараллельных, отталкивающих волну интерфейсов. В такой системе возможна локализация волнового потока между ними. Соответствующие симметричные решения системы (1)–(5) в областях $z < -a$ (I), $z > a$ (II) и $-a < z < a$ (III) имеют следующий вид:

$$E_{\mathrm{I,II}}(z) = \frac{\varepsilon}{\mathrm{ch}[\varepsilon(z \mp z_0)]}, \quad E_{\mathrm{III}}(z) = q\eta\,\mathrm{cn}(\eta z, q), \tag{6}$$

где параметр ε характеризует амплитуду волны и связан с величиной ω: $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$; $\mathrm{cn}(p,q)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем q ($q' = \sqrt{1-q^2}$); параметр $\eta = \varepsilon/\sqrt{2q^2-1}$. Эллиптический модуль q меняется в пределах от $1/\sqrt{2}$ до 1, локализованному между интерфейсами состоянию соответствуют значения $z_0 > -a$. Решение (6) является однопараметрическим и полностью характеризуется значением параметра ε. Параметры q и z_0 выражаются через ε из граничных условий при $z = \mp a$.

Как и в работе [4], удобно ввести амплитуду поля в дефектных плоскостях $U = E(z = \mp a)$, хотя теперь она и не соответствует максимуму плотности волнового потока. Тогда из граничных условий (3), (4) и определения величины U получаем три соотношения между параметрами ε, q, z_0 и U:

$$U = \varepsilon\,\mathrm{sech}\big[\varepsilon(a + z_0)\big] = q\eta\,\mathrm{cn}(\eta a, q), \tag{7}$$

$$\sqrt{q^2q'^2\eta^4 + \varepsilon^2U^2 - U^4} - U\sqrt{\varepsilon^2 - U^2} = \lambda U. \tag{8}$$

В пределе $q \to 1$ ($q' \ll 1$) их этих соотношений следует связь модуля q с частотой решения (параметром ε)

$$q'^2 \approx \frac{4\lambda(\lambda + 2\varepsilon)}{\varepsilon^2}\exp(-2\varepsilon a), \tag{9}$$

откуда получаем неравенство $\varepsilon a \gg 1$. В работе [4] это неравенство соответствовало слабой связи плоскопараллельных дефектных слоев. В рассматриваемом случае из неравенства $q' \ll 1$ следует, что распространяющийся поток имеет типичный солитонный профиль

$$E_{\mathrm{III}}(z) \approx \frac{\varepsilon}{\mathrm{ch}(\varepsilon z)} \tag{10}$$

и ширина локализованного потока много меньше расстояния между интерфейсами: $\Delta \sim 1/\varepsilon \ll a$. Взаимодействие локализованной волны с отталкивающими границами экспоненциально мало: $E(a)/E(0) \sim \exp(-\varepsilon a)$.

При этом, воспользовавшись определением полной „мощности“ волнового потока

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |E|^2 dz, \tag{11}$$

можно получить характерную для солитонов зависимость величины N от частоты

$$N \approx 2\varepsilon. \tag{12}$$

Заметим, что соотношения $q' \ll 1$ и $\Delta \ll a$, соответствующие большому удалению локализованного потока от интерфейсов, выполняются и для значений частот $\varepsilon \cong \lambda/2$ (значение $\varepsilon = \lambda/2$ отвечает частоте волны, локализованной у изолированной дефектной плоскости в линейной среде [9]).

Другому предельному случаю $z_0 = -a$ с частотами ω, близкими к краю зоны линейных волн, соответствует значение модуля q, несколько превышающее $1/\sqrt{2}$,

$$q_c^2 \approx \frac{1}{2} + \frac{K^2(1/\sqrt{2})}{8\lambda^2 a^2}, \tag{13}$$

где $K(q)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

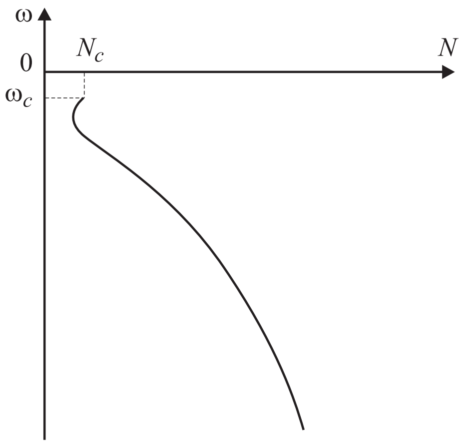

Рис. 2. Зависимость $\omega(N)$ для локализованного между интерфейсами состояния в нелинейной фокусирующей среде.

В этом пределе решение в центральной области имеет вид

$$E_{\mathrm{III}}(z) \approx \frac{K(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\,a}\,\mathrm{cn}\left[\frac{K(1/\sqrt{2})z}{a},\ 1/\sqrt{2}\right], \qquad (14)$$

частота потока определяется следующим значением параметра ε:

$$\varepsilon_c \approx \frac{K^2(1/\sqrt{2})}{2\lambda}\,\frac{1}{a^2}. \qquad (15)$$

При большом расстоянии между дефектными плоскостями $2a \gg 1$ имеем $\varepsilon_c \ll 1$, т.е. критическое значение частоты лежит вблизи края зоны линейных волн.

Из вида решений (14), (15) следует, что поток попрежнему в основном локализован в области между плоскими отталкивающими интерфейсами: амплитуда в центре потока $E(0) \sim 1/a$ много больше значения поля на интерфейсах $E(a) \sim 1/a^2$. Однако теперь характерная ширина волнового потока, как следует из (14), имеет порядок величины расстояния между интерфейсами: $\Delta \sim a$.

В критической точке $\varepsilon = \varepsilon_c$ решение меняет свой характер: появляются дополнительные максимумы амплидуты в областях I и II, т.е. волновой поток начинает выходить из области между отталкивающими волну дефектными плоскостями. Поскольку в [9] мы показали неустойчивость решений с двумя максимумами по разные стороны от такого интерфейса, будем считать, что, по-видимому, и данные состояния являются неустойчивыми по отношению к уходу волнового потока из системы интерфейсов. Поэтому не будем останавливаться на обсуждении этих дополнительных решений.

Вычисление полной „мощности“ волнового потока дает следующее ее значение в критической точке:

$$N_c \approx \frac{K(1/\sqrt{2})}{\sqrt{2}\,a}\,\frac{dK(1/\sqrt{2})}{dq}, \qquad (16)$$

а зависимость $\varepsilon(N)$ вблизи этой точки есть

$$\varepsilon - \varepsilon_c \approx -A\,\frac{N - N_c}{a^3} + B(N - N_c)^2 a^2, \qquad (17)$$

где

$$A \approx \frac{K^2(1/\sqrt{2})}{4\lambda^3}, \quad B \approx \frac{\lambda}{4K^2(1/\sqrt{2})}. \qquad (18)$$

Как видно из (17), в узкой области вблизи критической точки $\Delta N \sim 1/a^5 \ll 1$ происходит быстрое изменение зависимости $\varepsilon(N)$. Эта зависимость во всем интервале изменения частоты с учетом асимптотик (12) и (17) приведена на рис. 2.

Таким образом, в данной работе аналитически показано, что в факусирующей среде возможна локализация нелинейного волнового потока между плоскопараллельными интерфейсами, отталкивающими нелинейную волну.

Список литературы

[1] A.B. Aceves, C. De Angelis, T. Peschel, R. Muschall, F. Lederer, S. Trillo, S. Wabnitz. Phys. Rev. E **53**, *1*, 1172 (1996).
[2] H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A.R. Boyd, J.S. Aitchison. Phys. Rev. Lett. **81**, *16*, 3383 (1998).
[3] U. Peschel, R. Morandotti, J.S. Aitchison, H.S. Eisenberg, Y. Silberberg. Appl. Phys. Lett. **75**, *10*, 1348 (1999).
[4] И.В. Герасимчук, А.С. Ковалев. ФНТ **26**, *8*, 799 (2000).
[5] L. Thylen, E.M. Wright, G.I. Stegeman, C.T. Seaton. Opt. Lett. **11**, *11*, 739 (1986).
[6] S. Wabnitz, E.M. Wright, C.T. Seaton, G.I. Stegeman. Appl. Phys. Lett. **49**, *14*, 838 (1986).
[7] Y. Silberberg, G.I. Stegeman. Appl. Phys. Lett. **50**, *13*, 801 (1987).
[8] D.R. Heatley, E.M. Wright, G.I. Stegeman. Appl. Phys. Lett. **53**, *3*, 172 (1988).
[9] М.М. Богдан, И.В. Герасимчук, А.С. Ковалев. ФНТ **23**, *2*, 197 (1997).