

03

О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей

© Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: belonozhko@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 мая 2017 г.)

Построена аналитическая асимптотическая модель относительного массопереноса в системе двух идеальных несмешивающихся перемещающихся относительно друг друга жидкостей, по поверхности раздела которых распространяется капиллярно-гравитационная периодическая волна.

DOI: 10.21883/JTF.2018.05.45894.2315

Введение

Еще в XIX в. Г. Стокс сумел оценить скорость [1]

$$V_S = a^2 \omega k \exp(-2kd), \quad (1)$$

с которой происходит горизонтальный массоперенос, осуществляемый капиллярно-гравитационной волной, распространяющейся по свободной горизонтальной поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости. В стоковской модели амплитуда волны a считается малой по сравнению с ее длиной; параметр k характеризует волновое число, ω — круговую частоту. Скорость дрейфа Стокса направлена в сторону распространения волны, пропорциональна квадрату ее амплитуды и экспоненциально убывает с глубиной d . Обычно распространение периодической волны с амплитудой a связывают с вертикальными уменьшающимися с глубиной круговыми движениями материальных частиц среды [2–4] (для частичек, непосредственно прилегающих к поверхности, радиус витка примерно равен a). Но следует понимать, что из-за затухания движения с глубиной нижняя часть петли, описываемой материальной частичкой, оказывается меньше верхней. В результате через каждый период своего циклического движения частичка возвращается не в предыдущую верхнюю позицию, а в положение, несколько смещенное в направлении распространения волны [5]. С течением времени такие смещения складываются в средний дрейф, который неоднократно рассматривался в рамках самых различных моделей волнового массопереноса [6–10].

Между тем волновое движение на границе раздела двух сред — тема существенно более многоплановая, особенно если эти среды участвуют в относительном сдвиговом смещении [11,12]. Основное внимание здесь обычно уделяется неустойчивости границы раздела. В классическом случае говорят о неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, условия реализации которой

определяются из дисперсионного уравнения [13,14]:

$$\omega = \frac{k\rho'U_0 \pm \sqrt{kg(\rho^2 - \rho'^2) + k^3\gamma(\rho + \rho') - k^2\rho\rho'U_0^2}}{\rho + \rho'}, \quad (2)$$

связывающего круговую частоту волнового движения ω с волновым числом k . Амплитуда волны здесь, так же как и в теории дрейфа Стокса, считается малой по сравнению с длиной, а сама волна распространяется по горизонтальной поверхности раздела двух идеальных несжимаемых несмешивающихся жидкостей, находящихся в поле тяжести \mathbf{g} , ничем не ограниченных, кроме поверхности раздела. Считается, что плотность верхней жидкости меньше плотности нижней $\rho' < \rho$, а величина коэффициента поверхностного натяжения границы раздела характеризуется параметром γ . При отсутствии волнового возмущения граница раздела горизонтальна, нижняя среда покоится, а верхняя (в силу идеальности модели жидкости), не испытывая трения, движется относительно нее со скоростью U_0 (скорость U_0 существенно дозвуковая, чтобы обе жидкости можно было считать несжимаемыми [15]). Если U_0 недостаточно велика для отрицательности подкоренного выражения, входящего в (2), то любая простейшая периодическая волна распространяется по поверхности раздела без изменения своей амплитуды. Если же величина U_0 оказывается достаточно большой, чтобы появился интервал значений k , при которых под корнем возникает отрицательное число, амплитуда соответствующих волновых возмущений, пусть даже изначально незначительных, начинает экспоненциально расти во времени, инициируя начало развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [16,17].

В своем классическом виде теория волнового движения на горизонтальной поверхности тангенциального разрыва поля скоростей оставляет без внимания вопросы взаимосвязи волнового движения с возникающим при этом относительным горизонтальным массопереносом жидкостей. Настоящая работа нацелена на заполнение этого пробела: в рамках классической модели течения, отвечающего дисперсионному уравнению (2), бу-

дуг установлены принципы расчета траекторий жидких частиц, выведены простые аналитические соотношения, аналогичные выражению (1), для оценки интенсивности волнового массопереноса.

1. Формулировка задачи

Две идеальные несжимаемые несмешивающиеся жидкости, находясь в поле тяжести \mathbf{g} , заполняют в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Oz , направленной вертикально вверх, полупространства $z > 0$ и $z < 0$. Верхняя среда с плотностью ρ' поступательно движется вдоль горизонтальной оси Ox со скоростью U_0 относительно нижней более тяжелой, обладающей плотностью $\rho > \rho'$. Рассматривается периодическое волновое возмущение $z = \xi(x, t)$ границы раздела с волновым числом k , распространяющееся вдоль оси Ox . Течение для простоты считается независимым от второй горизонтальной координаты y . Коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела характеризуется параметром γ . Задача состоит в установлении характера перемещения материальных частиц обеих сред в зависимости от значения скорости U_0 , амплитуды и длины волнового возмущения.

Может показаться, что задачу следует сразу формулировать в переменных Лагранжа [13], в которых вектор $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, t)$ и скаляр $p_L(\mathbf{r}_0, t)$ описывают скорость малой материальной частички и давление в позиции ее текущего положения, а радиус-вектор \mathbf{r}_0 отмечает начальное положение этой частицы в момент времени $t = 0$. Но важно понимать, что в случае идеальных жидкостей с общей границей лагранжев подход плохо приспособлен к работе с условиями на поверхности их раздела. Действительно, пусть \mathbf{r}_0 — положение на границе раздела, к которому при $t = 0$ „прилегают“ с разных сторон две малые материальные частички, относящиеся к разным средам. Через конечное время t обе частички, совершив в общем случае разные (что допустимо на границе идеальных жидкостей) тангенциальные перемещения, окажутся в разных точках этой поверхности, а значит, в лагранжевых координатах функции давления $p_L(\mathbf{r}_0, t)$ и $p'_L(\mathbf{r}_0, t)$ в произвольный момент времени окажутся сопоставленными разным точкам границы. Ясно, что условие баланса давления вдоль поверхности совершенно недопустимо записывать в виде $p_L(\mathbf{r}_0, t) = p'_L(\mathbf{r}_0, t)$. Корректная же форма записи этого условия в рамках лагранжевого описания представляется далеко неочевидной.

В связи со сказанным, задачу целесообразнее формулировать и решать в переменных Эйлера, в которых скорость течения $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ связана с пространственной точкой \mathbf{r} в текущий момент времени t , через которую, сменяя друг друга, проходят разные жидкие частички. При этом скорость материальных частиц (переход к лагранжевому представлению) придется определять с помощью дополнительных соображений.

Движение идеальных жидкостей будем считать потенциальным с потенциалами скоростей φ и φ' в нижней и верхней областях: $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\varphi$, $\mathbf{V}'(\mathbf{r}, t) = U_0\mathbf{e}_x + \nabla\varphi'$. Потенциал φ' определяет малую добавку к постоянной компоненте поля скоростей $U_0\mathbf{e}_x$ в верхней области (\mathbf{e}_x — направляющий орт Ox). Задача определения потенциалов φ и φ' имеет вид:

$$z > \xi: \quad \Delta\varphi' = 0;$$

$$P' = p_0 - \rho'gz - \rho'\partial_t\varphi' - (\rho'/2)[(\partial_x\varphi' + U_0)^2(\partial_z\varphi')^2], \quad (3)$$

$$\partial_t\xi + \partial_x\xi\partial_x\varphi = \partial_z\varphi; \quad \partial_t\xi + (\partial_x\varphi' + U_0)\partial_x\xi = \partial_z\varphi';$$

$$P - P' = -\gamma\partial_{xx}\xi(1 + (\partial_x\xi)^2)^{-3/2}, \quad (4)$$

$$z < \xi: \quad \Delta\varphi = 0;$$

$$P = p_0 - \rho gz - \rho\partial_t\varphi - (\rho/2)[(\partial_x\varphi)^2 + (\partial_z\varphi)^2], \quad (5)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla\varphi' \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla\varphi \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь p_0 — постоянное внешнее давление, которое в случае сред вода–воздух равно атмосферному; P и P' — гидродинамические давления в нижней и верхней средах.

Задача решалась методом разложения по малому параметру $\varepsilon = ka$, пропорциональному отношению амплитуды волны a к ее длине $\lambda = 2\pi/k$. В дальнейшем для краткости, подразумевая малость по ε , будем просто говорить о порядке малости по амплитуде волны. Поскольку уже в простейшем случае, рассмотренном Стоксом, дрейфовые компоненты течения имеют второй порядок малости по амплитуде волны, целесообразно рассмотреть разложение до второго порядка малости:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + O(\varepsilon^3); \quad \varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3). \quad (7)$$

Здесь O — символ порядка: $\varphi_q = O(\varepsilon^q)$, $\varphi'_q = O(\varepsilon^q)$, $\xi_q = O(\varepsilon^q)$.

Выражая неизвестные функции и их производные, определенные на границе $z = \xi(x, t)$ через степенное разложение по ξ в окрестности $z = 0$, граничные условия (4) несложно свести к условиям на уровне $z = 0$, после чего с помощью (7) разбить (3)–(6) на задачи разных порядков малости.

Задача первого по ε порядка малости имеет вид

$$z > 0: \quad \Delta\varphi'_1 = 0; \quad z < 0: \quad \Delta\varphi_1 = 0;$$

$$z = 0: \quad \partial_t\xi_1 - \partial_z\varphi_1 = 0; \quad \partial_t\xi_1 + U_0\partial_x\xi_1 - \partial_z\varphi'_1 = 0;$$

$$g\xi_1(\rho' - \rho) - \rho\partial_t\varphi_1 + \rho'\partial_t\varphi'_1 + \rho'U_0\partial_x\varphi'_1 + \gamma\partial_x\xi_1 = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla\varphi'_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \nabla\varphi_1 \rightarrow 0.$$

Задачи второго порядка малости задаются соотношениями:

$$z > 0: \quad \Delta\varphi'_2 = 0; \quad z < 0: \quad \Delta\varphi_2 = 0;$$

$$z = 0: \quad \partial_t\xi_2 - \partial_z\varphi_2 = \xi_1\partial_{zz}\varphi_1 - \partial_x\varphi_1\xi_1;$$

$$\partial_t \xi_2 + U_0 \partial_{xx} \xi_2 - \partial_z \varphi'_2 = \xi_1 \partial_{zz} \varphi'_1 - \partial_{xx} \varphi'_1 \partial_{xx} \xi_1; \quad (8)$$

$$g \xi_2 (\rho' - \rho) - \rho \partial_t \varphi_2 + \rho' \partial_t \varphi'_2 + \rho' U_0 \partial_x \varphi'_2 + \gamma \partial_{xx} \xi_2 = \rho \xi_1 \partial_z \varphi_1 + (\rho/2) ((\partial_x \varphi_1)^2 + (\partial_z \varphi_1)^2) - \rho' \xi_1 \partial_z \varphi'_1 - (\rho'/2) ((\partial_x \varphi'_1)^2 + (\partial_z \varphi'_1)^2 + 2U_0 \xi_1 \partial_{xx} \varphi'_1); \quad (9)$$

$$z \rightarrow \infty : \nabla \varphi'_2 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty : \nabla \varphi_2 \rightarrow 0.$$

Как и в большинстве классических аналитических построений периодических волновых профилей на поверхности идеальных жидкостей, вместо начального условия использовалась концепция поиска решения, которое в аналитическом плане наиболее просто описывает периодическую бегущую волну с волновым числом k .

2. Свойства решения

В первом приближении по амплитуде волны простейшее волновое решение задачи имеет вид

$$\xi_1 = \frac{1}{2} a \exp(i(\omega t - kx)) + \text{с.с.}; \quad (10)$$

$$\varphi'_1 = -\frac{1}{2} \frac{i}{k} (\omega - kU_0) a \exp(i(\omega t - kx)) \exp(-kz) + \text{с.с.}; \quad (11)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{i\omega}{k} a \exp(i(\omega t - kx)) \exp(kz) + \text{с.с.} \quad (12)$$

Здесь i — мнимая единица, а „с.с.“ означает комплексно сопряженные слагаемые. Частота ω удовлетворяет дисперсионному уравнению (2).

Из (11), (12) легко выразить эйлерово поле скоростей в первом приближении по амплитуде волны. Для нижней среды горизонтальная u_1 и вертикальная v_1 компоненты скорости описываются выражениями

$$u_1 = \frac{1}{2} a \omega \exp(i(\omega t - kx)) \exp(kz) + \text{с.с.};$$

$$v_1 = -\frac{i}{2} a \omega \exp(i(\omega t - kx)) \exp(kz) + \text{с.с.} \quad (13)$$

В верхней области, включая в выражение для горизонтальной скорости постоянную составляющую $U_0 \mathbf{e}_x$, имеем соотношения

$$u'_1 = U_0 - \frac{1}{2} a (\omega - kU_0) \exp(i(\omega t - kx)) \exp(-kz) + \text{с.с.};$$

$$v'_1 = \frac{i}{2} a (\omega - kU_0) \exp(i(\omega t - kx)) \exp(-kz) + \text{с.с.} \quad (14)$$

Из дисперсионного уравнения (2) следует, что если

$$U_0^2 \leq U_{cr}^2(k) = \frac{k^2 \gamma (\rho + \rho') + g(\rho^2 - \rho'^2)}{k \rho \rho'}, \quad (15)$$

то частота ω будет действительным числом и, значит, компоненты скорости обеих жидкостей являются периодическими функциями $\propto \cos(\omega t - kx)$ или

$\propto \sin(\omega t - kx)$. Если же $U_0^2 > U_{cr}^2(k)$, то частота ω становится комплексной, и компоненты скорости оказываются пропорциональны $\propto \exp(\pm \text{Im}(\omega)t) \cos(\text{Re}(\omega)t - kx)$ или $\propto \exp(\pm \text{Im}(\omega)t) \sin(\text{Re}(\omega)t - kx)$, что соответствует волновым движениям с экспоненциально изменяющейся амплитудой. В обоих случаях, принимая во внимание наличие периодического множителя, будем говорить о циклическом характере выражений. При выполнении условия $U_0^2 > U_{cr}^2(k)$ одним из решений задачи является волновое возмущение с волновым числом k и экспоненциально растущей амплитудой. Именно такие возмущения формируют начальную стадию развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, о которой говорилось во введении.

Подставляя соотношения (10)–(12) в правые части граничных условий (8), (9) задачи второго порядка малости, несложно установить, что неоднородности граничных условий становятся циклическими выражениями $\propto \exp(2i(\omega t - kx))$. Этим же свойством будет обладать и само решение задачи второго порядка малости. В дальнейшем принципиальную роль будет играть именно это свойство решения задачи второго порядка малости, а не конкретный вид этого решения.

3. Переход к переменным Лагранжа

Чтобы рассчитать движение материальных частичек, необходимо перейти к лагранжевому представлению поля скоростей. В условиях, когда причиной движения является периодическое малоамплитудное волновое возмущение неподвижной жидкости, лагранжева скорость $\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, t)$ выражается через эйлерову $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, взятую в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, соответствующей начальному положению материальной частицы, по известной формуле [14,18–21]:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t) + \left(\left(\int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, \tau) d\tau \right) \nabla_0 \right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t). \quad (16)$$

Индекс „0“ при операторе Гамильтона ∇ означает, что соответствующие производные должны вычисляться при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ — в начальном положении отслеживаемой материальной частички. В основе вывода формулы (16) лежит разложение эйлеровой скорости по малому смещению материальной частицы от положения \mathbf{r}_0 в момент времени t [12]. Поэтому важным условием применимости (16) является малость удаления материальной частички от начального положения: за конечное время t она не должна сместиться на расстояние, большее амплитуды волны. Сама формула (16) справедлива во втором приближении амплитуде волны.

В первом по амплитуде приближении применение (16) к полю скоростей (13) сводится к добавлению

индекса „0“ к символам координат:

$$u_{L1} = \frac{1}{2} a\omega \exp(i(\omega t - kx_0)) \exp(kz_0) + \text{с.с.};$$

$$v_{L1} = -\frac{i}{2} a\omega \exp(i(\omega t - kx_0)) \exp(kz_0) + \text{с.с.} \quad (17)$$

Теперь (x_0, z_0) это не точка, в которой определяется вектор скорости течения в текущий момент времени, а координаты начального положения материальной частицы — изменился статус координатных переменных. Формальное совпадение выписанных выражений для лагранжевой и эйлеровой скоростей в первом по амплитуде приближении хорошо известно и неоднократно использовалось для установления примерно круговой формы траекторий частиц, участвующих в волновом движении [2,3].

Прямое применение формулы (16) к вектору скорости верхней среды (14) недопустимо, поскольку ее частицы в системе координат $Oxyz$ участвуют в общем горизонтальном сдвиге со скоростью U_0 и за конечное время t значительно смещаются от своего начального положения. Для исправления ситуации следует перейти в новую систему координат $O^*x^*y^*z^*$, которая совпадает с $Oxyz$ при $t = 0$ и с течением времени переносится со скоростью U_0 вдоль оси Ox . Учитывая связь старой и новой горизонтальной координаты $x = x^* + U_0t$, несложно заметить, что с переходом в новую координатную систему в полном соответствии с эффектом Доплера изменяется частота волнового движения:

$$\omega t - kx = \omega t - k(x^* + U_0t) = \Omega t - kx^*; \quad \Omega = \omega - kU_0; \quad (18)$$

$$\cos(\omega t - kx) \rightarrow \cos(\Omega t - kx^*);$$

$$\sin(\omega t - kx) \rightarrow \sin(\Omega t - kx^*).$$

Эйлерово поле скоростей в первом приближении по амплитуде волны в движущейся системе координат будет описываться соотношениями

$$u_1^* = -\frac{1}{2} a\Omega \exp(i(\Omega t - kx^*)) \exp(-kz^*) + \text{с.с.};$$

$$v_1^* = \frac{i}{2} a\Omega \exp(i(\Omega t - kx^*)) \exp(-kz^*) + \text{с.с.}$$

Теперь применение формулы (16) правомерно и в первом приближении по амплитуде волны снова сводится к приписыванию к координатным переменным индекса „0“, означающего изменение статуса координат на лагранжевые. Обратный переход в систему $Oxyz$ дает искомые компоненты лагранжевой скорости в неподвижной системе:

$$u'_{L1} = U_0 - \frac{1}{2} a\Omega \exp(i(\Omega t - kx^*)) \exp(-kz_0) + \text{с.с.};$$

$$v'_{L1} = \frac{i}{2} a\Omega \exp(i(\Omega t - kx^*)) \exp(-kz_0) + \text{с.с.} \quad (19)$$

В связи с совпадением $O^*x^*y^*z^* = Oxyz$ при $t = 0$ для лагранжевых координат выполняются равенства $x_0 = x_0^*$, $z_0 = z_0^*$ и никаких преобразований, обратных к (18), влекущих изменение частоты Ω , не возникает, поскольку теперь речь идет не о частоте волнового движения в распределенной системе, а о частоте циклических движений отдельной материальной частицы. Здесь можно провести аналогию с частотой колебаний маятника: в рамках классической механики она одинакова во всех системах отсчета.

4. Дрейфовые и циклические составляющие скорости

Из (16) следует, что горизонтальная скорость частицы нижней среды во втором приближении по амплитуде волны рассчитывается по формуле:

$$u_L(x_0, z_0, t) = u_1(x_0, z_0, t) + u_2(x_0, z_0, t) + \left(\int_0^t u_1(x_0, z_0, \tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial x} \right) + \left(\int_0^t v_1(x_0, z_0, \tau) d\tau \right) \left(\frac{\partial u_1(x, z, t)}{\partial z} \right)_0. \quad (20)$$

Для выделения из этого выражения дрейфовой компоненты следует заметить, что слагаемые $u_1(x_0, z_0, t)$ и $u_2(x_0, z_0, t)$ являются циклическими (см. (13) и заключительный тезис разд. 2), и поэтому никакого вклада в дрейф не вносят. Вычисление интегральных слагаемых с подстановкой в них соотношений (13) приводит к выражению, которое наряду с циклическими слагаемыми содержит искомую компоненту скорости горизонтального дрейфа в направлении оси Ox (в направлении распространения волны):

если

$$U_0^2 \leq U_{cr}^2(k) : \quad V_S = a^2\omega k \exp(2kz); \quad (21)$$

если

$$U_0^2 > U_{cr}^2(k) : \quad V_S = a^2\sigma k \exp(2rt) \exp(2kz). \quad (22)$$

При $U_0^2 > U_{cr}^2(k)$ (см. (15)) частота ω , вычисленная с помощью дисперсионного уравнения (2), оказывается комплексным числом. Для ее действительной и мнимой частей использованы вспомогательные обозначения:

$$U_0^2 > U_{cr}^2(k) : \quad \sigma = \text{Re}(\omega); \quad r = \text{Im}(\omega); \quad (23)$$

$$\sigma = \frac{k\rho'U_0}{\rho + \rho'};$$

$$r = \frac{\sqrt{k^2\rho\rho'U_0^2 - kg(\rho^2 - \rho'^2) - k^3\gamma(\rho + \rho')}}{\rho + \rho'}.$$

Параметр r положителен для одного корня дисперсионного уравнения и отрицателен для другого. Здесь и в

дальнейшем интересно взять корень с $r > 0$, характеризующий инкремент развития неустойчивости волнового возмущения с волновым числом k . Соотношение (21) с точностью до обозначений совпадает с выражением (1) для классического дрейфа Стокса (для сравнения с (1) нужно учесть, что в (21) $z < 0$).

Расчет скорости дрейфа в верхней среде осуществляется аналогично. Но перед применением формулы (16) по причинам, изложенным в предыдущем разделе, следует перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с верхней средой, а потом вновь вернуться в неподвижную систему. При этом частота циклических выражений изменится по правилам, описанным в разд. 3. Несложно получить, что скорость дрейфового горизонтального переноса материальных частиц верхней среды в проекции на направление Ox вычисляется по формулам:

если

$$U_0^2 \leq U_{cr}^2(k) : V'_S = U_0 + a^2(\omega - kU_0)k \exp(-2kz); \quad (24)$$

если

$$U_0^2 > U_{cr}^2(k) : V'_S = U_0 + a^2(\sigma - kU_0)k \exp(2rt) \exp(-2kz). \quad (25)$$

Интересно обратить внимание на то, что, несмотря на свою малость, дрейф (21), через достаточно длительный по сравнению с периодом циклических движений материальных частиц промежуток времени, снесет частички нижней среды вдоль Ox на расстояние, значительно превышающее амплитуду волны. Формула (16) на таких временах перестает быть справедливой. Для полной корректности ее следовало бы применить к эйлеровой скорости в системе отсчета, движущейся вместе со средним дрейфом материальной частички, а потом перейти назад в неподвижную систему. Применяя эту идею к полю скоростей (13) и не забывая изменить частоту (см. предыдущий разд.) новым значением $\omega - kV_S$, несложно найти, что в нижней жидкости циклические компоненты скорости правильнее записывать в усовершенствованной форме:

$$u_{L1} = \frac{1}{2} a \omega \exp(i((\omega - kV_S)t - kx_0)) \exp(kz_0) + \text{с.с.};$$

$$v_{L1} = -\frac{i}{2} a \omega \exp(i((\omega - kV_S)t - kx_0)) \exp(kz_0) + \text{с.с.} \quad (26)$$

Согласно (26), период $\tau = 2\pi/(\omega - kV_S)$ циклического движения материальной частицы больше периода $T = 2\pi/\omega$ волнового движения границы раздела (10). Этот факт принципиален в вопросе согласования движения границы раздела (10) как геометрического места точек, разделяющих среды, с движением материальных частиц, прилегающих к этой поверхности и участвующих как в циклической циркуляции (26), так и в дрейфовом переносе (21).

Действительно, пусть положение материальной частички в начальный момент времени t_0 характеризуется

горизонтальной координатой x_0 , и частичка располагается на вершине одного из горбов (назовем его первым) периодической волны (10), распространяющейся в направлении оси Ox . Через период своего циклического движения τ эта частичка должна снова оказаться в верхнем положении. За время τ она совершает петлеобразное движение: сначала „ныряет“ вниз вдоль Ox ; затем по нижней части витка перемещается против Ox ; переходит на верхнюю дугу петли и снова двигается вдоль Ox , возвращаясь в свое самое верхнее положение в тот момент, когда в эту же точку прибывает вершина второго горба, следовавшего за первым. Поскольку время τ больше периода волнового движения T , вершина второго горба в момент времени $t = t_0 + \tau$ окажется не над координатой x_0 , а в положении $x = x_0 + V_{ph}(\tau - T)$, где $V_{ph} = \omega/k$ — фазовая скорость волны (10). Таким образом, за период собственного циклического движения τ материальная частичка сместится по горизонтали на расстояние $\Delta x = \omega(\tau - T)/k$. Разделив Δx на τ , получим скорость систематического смещения материальной частицы вдоль Ox . Из (10) и (26) следует, что периоды рассматриваемых типов движений: $T = 2\pi/\omega$ и $\tau = 2\pi/(\omega - kV_S)$. Несложно убедиться, что

$$\frac{\Delta x}{\tau} = \frac{(\tau - T)\omega}{k\tau} = \left(\frac{2\pi}{\omega - kV_S} - \frac{2\pi}{\omega} \right) \frac{\omega}{k} \frac{(\omega - kV_S)}{2\pi} = V_S.$$

Таким образом, именно при указанных значениях τ и T циклическое движение (26) частиц среды и волновое движение границы раздела (10) оказываются согласованными с дрейфовым перемещением материальных частиц нижней среды (21). Если не учитывать разницу между частотой циклического движения самой частицы и частотой волнового движения распределенной системы частиц, модель получится рассогласованной: совершающая витки и перемещающаяся вдоль горизонтали материальная частичка не будет с течением времени оставаться на смещающемся с фазовой скоростью профиле волнового искажения.

Аналогичные рассуждения вносят поправку в формулы (19) для скорости циклического движения материальных частиц верхней среды

$$u'_{L1} = U_0 - \frac{1}{2} a \Omega \exp(i(\Omega - kV'_S)t - kx_0) \exp(-kz_0) + \text{с.с.};$$

$$v'_{L1} = \frac{i}{2} a \Omega \exp(i(\Omega - kV'_S)t - kx_0) \exp(-kz_0) + \text{с.с.} \quad (27)$$

Соотношения (21)–(27) определяют дрейфовые и циклические компоненты скорости материальных частиц верхней и нижней сред. В таком виде они максимально согласованы с соотношением (10) — законом изменения во времени формы границы раздела сред. Циклические компоненты имеют первый порядок малости по амплитуде волны и описаны только главными линейными по амплитуде слагаемыми своего асимптотического представления. Дрейфовые же компоненты скорости в

линейном по амплитуде приближении равны нулю. Для их учета в смысле главных членов разложения по амплитуде волны нужно использовать выражения, пропорциональные квадрату амплитуды. Качественно различные элементы динамического поведения — циркуляционное и переносное движения материальной частицы — оказываются совместно учтенными, посредством сохранения в каждом случае своего главного члена асимптотического разложения.

5. Примеры расчета траекторий материальных частиц

Траектории материальных частиц вычисляются интегрированием по времени циклических и дрейфовых компонент поля скоростей в представлении Лагранжа. Чтобы не загромождать изложение, ограничимся уравнениями формы границы раздела и траекторий движения материальных частиц, непосредственно прилегающих к этой границе, в условиях, когда $U_0^2 \leq U_{cr}^2(k)$ (при этом параметр ω является действительным числом), т.е. для волнового возмущения, представляющего собой периодическую бегущую волну постоянной амплитуды:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx); \quad (28)$$

$$X = x_0 + a(\sin(kx_0) + \sin(\omega(1 - a^2k^2)t - kx_0)) + a^2k\omega t; \quad (29)$$

$$Z = a \cos(\omega(1 - a^2k^2)t - kx_0); \quad (30)$$

$$X' = x'_0 + U_0 t - a(\sin(kx'_0) + \sin((\omega - kU_0) \times (1 - a^2k^2)t - kx'_0)) + a^2k(\omega - kU_0)t; \quad (31)$$

$$Z' = a \cos((\omega - kU_0)(1 - a^2k^2)t - kx'_0). \quad (32)$$

Здесь $X \equiv X(x_0, z_0, t)$ и $Z \equiv Z(x_0, z_0, t)$ — текущие координаты материальной частицы нижней среды, начавшей двигаться из положения (x_0, z_0) . Текущие координаты частицы верхней среды отмечены штрихом. Само положение $(x_0, z_0) = (x_0, \xi(x_0, 0)) = ((x_0, a \cos(kx_0)))$ — точка на поверхности раздела, к которой частицы сред прилегают снизу и сверху при $t = 0$. При построении (28)–(32) амплитудные множители циклических слагаемых упрощались до своего главного первого приближения по амплитуде волны. Например:

$$\begin{aligned} a \exp(\pm kz_0) &= a \exp(\pm k\xi(x_0, t)) \\ &= a(1 \pm ka \cos(\omega t - kx_0) + \dots) \approx a. \end{aligned}$$

В соотношении (28) координата x не снабжена индексом „0“, поскольку этой формулой описывается эволюция формы поверхности, как геометрического места точек пространства.

Несложно заметить, что отношение скорости $V_S = a^2k\omega$, с которой дрейфует прилегающая к границе

раздела материальная частица нижней среды (см. последнее слагаемое в (29)), к фазовой скорости волнового движения $V_{ph} = \omega/k$ равно a^2k^2 . За период $T = \lambda/V_{ph}$ материальная частица переносится на расстояние $S_T = V_S T = a^2k^2\lambda$. Таким образом, справедливы формулы:

$$\frac{V_S}{V_{ph}} = \frac{S_T}{\lambda} = a^2k^2.$$

Для того чтобы переместиться на расстояние, равное длине волны λ , частице нижней среды требуется время $t_\lambda = \lambda/V_S = \lambda/(V_{ph}a^2k^2) = T/(a^2k^2)$. В долях периода волнового движения имеем

$$\frac{t_\lambda}{T} = \frac{1}{a^2k^2}. \quad (33)$$

Несложно получить аналогичные формулы для материальной частицы верхней среды, дрейфующей со своей стороны границы раздела:

$$\frac{V'_S}{V_{ph}} = \frac{S'_T}{\lambda} = \beta + a^2k^2(1 - \beta);$$

$$\frac{t'_\lambda}{T} = \frac{1}{\beta + a^2k^2(1 - \beta)}; \quad \beta = \frac{U_0}{V_{ph}}. \quad (34)$$

Рассмотрим примеры расчета движений материальных частиц верхней и нижней сред, прилегающих к искаженной периодическим волновым движением границе раздела. Расчеты выполнялись при значениях параметров задачи, соответствующих границе вода–воздух в нормальных условиях: $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$; $\rho' = 0.001 \text{ g/cm}^3$; $\gamma = 72 \text{ dyn/cm}$. В качестве величины волнового числа использовалось значение:

$$k = k_* = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{\gamma}} \approx 3.69 \text{ cm}^{-1},$$

при котором правая часть соотношения (15), рассматриваемая как функция от k , достигает минимума. Это соответствует длине волны $\lambda_* = 2\pi/k_* \sin 1.70 \text{ cm}$, наиболее „чувствительной“ к дестабилизирующему влиянию движения верхней среды. Для такого волнового искажения критическое значение скорости верхней среды $U_{cr} = U_{cr}(k_*) \sim 730 \text{ cm/s}$ (см. (15)), по превышении которого амплитуда волны становится растущей во времени, является наименьшим в сравнении с волновыми возмущениями, обладающими другими значениями $k \neq k_*$. Амплитуда волны принималась равной полмиллиметра, что составляет примерно 0.03 ее длины. С одной стороны это обеспечивает требуемую в модели существенную малость амплитуды по сравнению с длиной, а с другой — такое значение амплитуды оказывается вполне достаточным для наглядной иллюстрации основных свойств движения приповерхностных материальных частиц обеих сред.

Рис. 1 показывает, как происходит движение поверхности и прилегающих к ней материальных частиц в

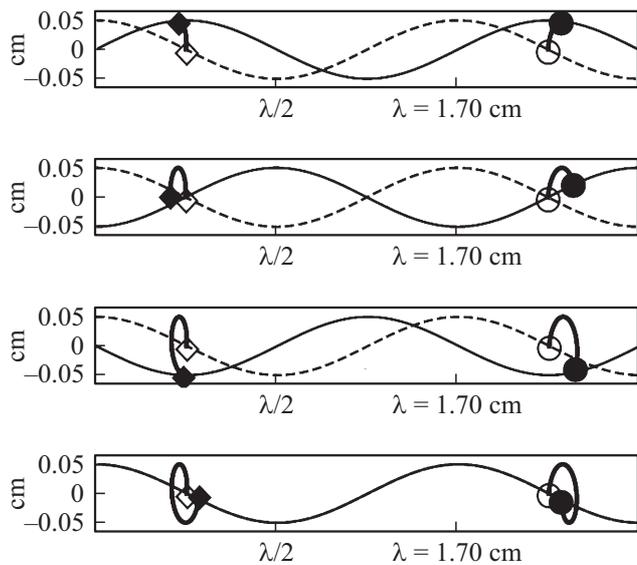


Рис. 1. Положения профиля волны (сплошная линия) и прилегающих к нему материальных частиц, рассчитанные по формулам (28)–(32) в отсутствие сдвигового течения $U_0 = 0$ cm/s; при $\rho = 1$ g/cm³; $\rho' = 0.001$ g/cm³; $\gamma = 72$ dyn/cm; $k = 3.7$ cm⁻¹ в последовательные моменты времени t — сверху вниз: $t = T/4$; $T/2$; $3T/4$; T ($T = 2\pi/\omega$ — период волнового движения); \circ и \diamond — положения материальных частиц нижней и верхней сред при $t = 0$, \bullet и \blacklozenge — их текущие положения; штрихи — профиль волнового искажения при $t = 0$.

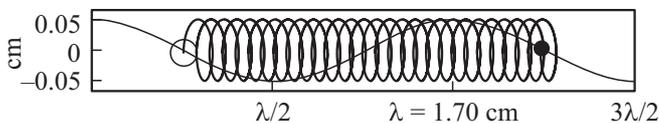


Рис. 2. Траектория частицы нижней среды, описанная за время $t = 29T$, рассчитанная по формулам (29), (30) при тех же значениях параметров и в тех же обозначениях, что и на рис. 1.

условиях, когда относительное движение сред отсутствует ($U_0 = 0$), а косинусоидальное начальное возмущение границы раздела (штриховой профиль) со временем перемещается вправо (сплошной профиль). Показаны последовательные положения прилегающих к границе материальных частиц верхней и нижней сред с временным шагом $\Delta T = T/4$ в четверть периода волнового движения $T = 2\pi/\omega$. Незачерненные кружок и ромбик отмечают начальные положения материальных частиц нижней и верхней сред соответственно. Аналогичные зачерненные символы обозначают текущие положения тех же частиц. Видно, что при отсутствии в системе сдвигового течения частички обеих сред совершают противоположно ориентированные петлеобразные движения. Вертикальный „размах“ обоих витков равен удвоенной амплитуде волны. Обе частички с течением времени смещаются в направлении распространения волны с одинаковой средней дрейфовой скоростью (см. последние слагаемые в (29) и (31)).

На рис. 2, построенном с помощью (28)–(30), показана петлеобразная траектория частички нижней среды за 29 периодов волнового движения $T = 2\pi/\omega$. Согласно (33), $t_\lambda/T = a^{-2}k^{-2} \sim 29.4$ — время в единицах периода, за которое средний дрейф сносит частицу на длину волны. Если время измерять в долях периода волнового движения, то рис. 2 останется неизменным при увеличении скорости верхней среды вплоть до критического значения $U_{cr}(k_*) \sim 730$ cm/s.

Рис. 3 построен с помощью соотношений (28), (31), (32) и показывает, что даже незначительное увеличение скорости сдвигового течения до $U_0 = 10$ cm/s (направлена вправо) существенно изменяет форму траектории движения его материальных частиц. Петлеобразные движения разворачиваются в дугообразные с существенным смещением частицы в направлении общего движения верхней среды. При этом, согласно (34), в условиях, когда $U_0 < V_{ph}$, частичка верхней среды за период волнового движения сносится по горизонтали меньше, чем на длину волны, а дополнительный к общему движению со скоростью U_0 дрейф (см. последнее слагаемое (31)) направлен в ту же сторону, что и общее движение верхней жидкости. Период циклического движения ма-

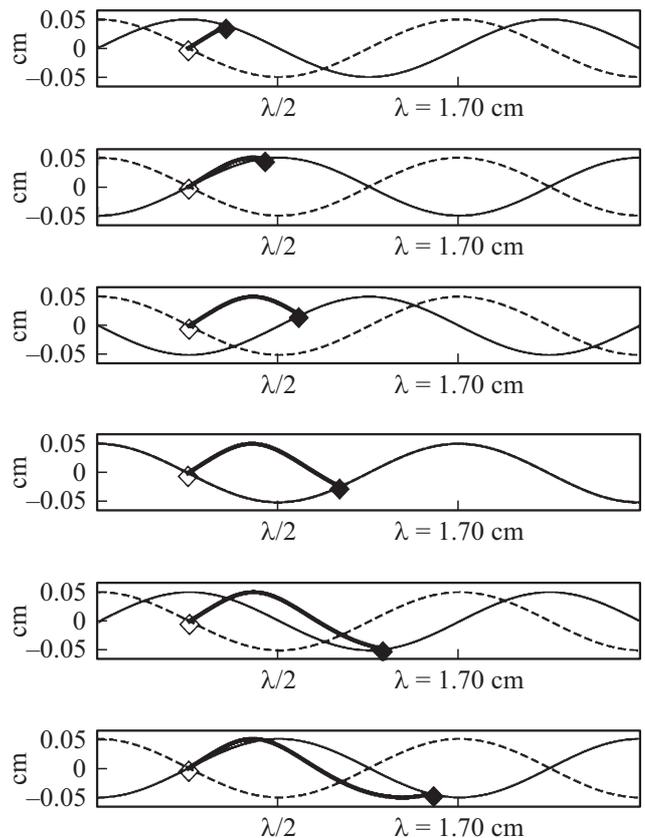


Рис. 3. Положение профиля волны и траектории прилегающей к нему материальной частицы верхней среды, рассчитанные по формулам (28), (31), (32) при $U_0 = 10$ cm/s в последовательные моменты времени t — сверху вниз: $t = T/4$; $T/2$; $3T/4$; T ; $5T/4$; $3T/2$. Значения остальных параметров и обозначения такие же, как для рис. 1.

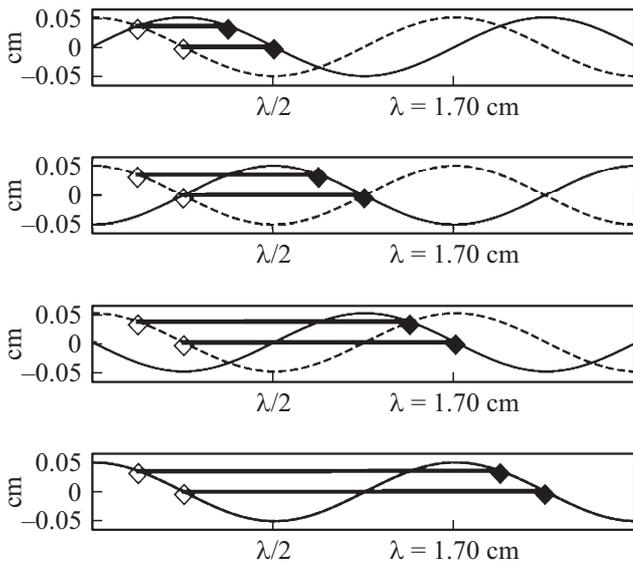


Рис. 4. Положение профиля волны и траектории прилегающей к нему материальной частицы верхней среды, рассчитанные по формулам (28), (31), (32) при $U_0 = 23$ cm/s в последовательные моменты времени t — сверху вниз: $t = T/4; T/2; 3T/4; T$. Значения остальных параметров и обозначения такие же, как для рис. 1.

териальной частицы (измеряемый, например, временем между двумя ее последовательными верхними положениями) при $U_0 < V_{ph}$ оказывается больше периода волнового движения T . С дальнейшим ростом U_0 дрейфовая добавка, описываемая последним слагаемым (31), в верхней среде уменьшается и при $U_0 = V_{ph} = \omega/k$ обнуляется, а период циклического движения частицы верхней среды $T/(\omega - kU_0)$ растет до бесконечности. При $U_0 = V_{ph}$ частицы верхней среды двигаются равномерно и прямолинейно (рис. 4) с фазовой скоростью волны $V_{ph} \sim 23$ cm/s.

Рис. 5 иллюстрирует, как перемещается прилегающая к возмущенной волновым движением границе сред частичка верхней области течения в условиях, когда $V_{ph} < U_0 < U_{cr}(k_*)$ ($U_0 = 50$ cm/s). Видно, что частичка верхней среды двигается по сильно растянутой вдоль горизонтали дугообразной траектории. За период волнового движения она проходит вдоль Ox расстояние, превышающее длину волны. При этом дрейфовая добавка (последнее слагаемое в (31)) в верхней среде оказывается направленной против течения U_0 , и чем больше величина U_0 , тем больше становится скорость этой составляющей.

Если $U_0 > U_{cr}$, то формулы (29)–(32) не справедливы. Теперь при интегрировании поля скоростей следует учитывать комплексность частоты ω , и, значит, экспоненциальный расчет амплитуды волнового возмущения с течением времени. Система быстро выходит за пределы применимости модели, подразумевающей малость амплитуды по сравнению с длиной волны. И все же, формулы (22) и (25) позволяют проследить тенденции

поведения дрейфового движения на начальной стадии развития неустойчивости. Используя выражение для σ (см. (23)), несложно убедиться, что (22) и второе слагаемое формулы (25) имеют противоположные знаки. Это означает, что начальная стадия развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца проявляется не только в росте амплитуды волнового искажения границы раздела, но и в возникновении в обеих средах экспоненциально нарастающих со временем встречных по отношению друг к другу дрейфовых течений. В нижней среде нарастает дрейфовое течение (21), направленное вдоль направления сноса верхней среды, в которой в свою очередь перенос со скоростью U_0 ослабляется вторым слагаемым (25) — „встречным противодрейфом“. Получается, что в начале развития неустойчивости нижнее и верхнее дрейфовые течения эволюционируют таким образом, чтобы с течением времени уменьшить величину тангенциального скачка относительной скорости сред на их границе. Таким образом, уже на начальном этапе развития неустойчивости запускается механизм ее ослабления — уменьшения величины дестабилизирующего границу тангенциального скачка скорости. При этом искажение границы раздела растет со временем пропорционально $\sim a \exp(rt)$, а скорость встречных дрейфовых потоков, стремящихся сократить тангенциальный скачок скорости, нарастет быстрее: $\sim a^2 \exp(2rt)$. Качественно сказанное можно интерпретировать как наличие в рассматриваемой динамической системе отрицательной обратной связи, препятствующей неограниченному нарастанию неустойчивости.

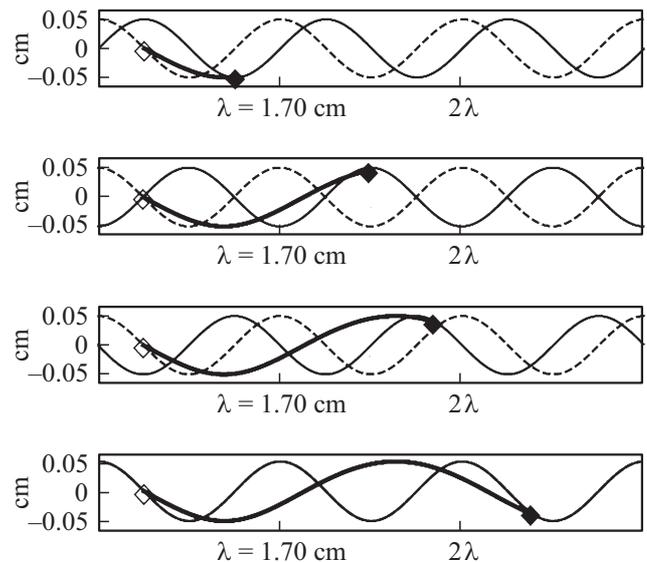


Рис. 5. Положение профиля волны и траектории прилегающей к нему материальной частицы верхней среды, рассчитанные по формулам (28), (31), (32) при $U_0 = 50$ cm/s в последовательные моменты времени t — сверху вниз: $t = T/4; T/2; 3T/4; T$. Значения остальных параметров и обозначения такие же, как для рис. 1.

Заключение

В настоящей работе предложена аналитическая асимптотическая методика расчета циклических и дрейфовых движений материальных частиц, находящихся по разные стороны от искаженной периодическим волновым возмущением границы раздела двух сред, участвующих в относительном сдвиговом смещении. Основные приемы расчета продемонстрированы в рамках модели идеальных жидкостей, ограниченных лишь поверхностью раздела, но концептуально применимы и в более сложных ситуациях. Установлены правила преобразования аналитических выражений для эйлерова поля скоростей, позволяющие перейти к аналитическому описанию движения отдельных материальных и в некоторых случаях установить новые свойства хорошо известного течения. В частности, обнаружилось новое свойство классической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца: она, как оказалось, проявляется не только в нарастании амплитуды искажения границы раздела двух смещающихся относительно друг друга сред, но и в появлении по разные стороны от этой границы усиливающихся со временем встречных приповерхностных дрейфовых течений, стремящихся сократить величину тангенциального скачка скорости, спровоцировавшего неустойчивость.

Список литературы

- [1] *Stoks G.G.* // Cambridge Phil. Soc. 1847. Vol. 8. N 4. P. 441–455.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [3] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1959. 699 с.
- [4] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1975. 552 с.
- [5] *Clamond D.* // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 589. P. 433–454.
- [6] *Longuet-Higgins M.S.* // Roy. Soc. Lond. Tr. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
- [7] *Longuet-Higgins M.S.* // J. Fluid. Mech. 1986. Vol. 173. P. 683–707.
- [8] *Weber J.E.* // J. Phys. Oceanogr. 1983. Vol. 13. P. 524–530.
- [9] *Weber J.E.* // J. Fluid. Mech. 1983. Vol. 137. P. 115–129.
- [10] *Craik A.D.D.* // J. Fluid. Mech. 1982. Vol. 116. P. 187–205.
- [11] *Степанянц Ю.А., Фабрикант А.* // УФН. 1989. Т. 159. Вып. 1. С. 83–123.
- [12] *Siddiqui M.H.K., Loewen M.R.* // J. Fluid. Mech. 2007. Vol. 573. P. 417–456.
- [13] *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 176 с.
- [14] *Белоножко Д.Ф., Козин А.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 2. С. 112–120.
- [15] *Бэтчелор Дж.К.* Введение в динамику жидкости. Москва–Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2004. 768 с.
- [16] *Фабер Т.Е.* Гидроаэродинамика. М.: Постмаркет, 2001. 560 с.
- [17] *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge (University Press., 2002. 278 p.).
- [18] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Ч. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
- [19] *Белоножко Д.Ф., Оциров А.А.* // ЭОМ. 2016. Т. 52. № 1. С. 91–97.
- [20] *Christensen K.H., Terrile E.* // J. Fluid Mech. 2009. Vol. 620. P. 313–332.
- [21] *Phillips O.M.* The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge University Press., 1977. 336 p.