01

Представление потенциала однородного кругового тора рядом по степеням геометрического параметра

© Б.П. Кондратьев

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119239 Москва, Россия
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: work@boris-kondratyev.ru

(Поступило в Редакцию 17 января 2017 г.)

Поставлена и решена задача о разложении пространственного потенциала однородного гравитирующего (или заряженного статическим электрическим зарядом) кругового тора в ряд по степеням геометрического параметра тора q. Первый член этого ряда при q в нулевой степени совпадает с потенциалом тонкого кругового кольца, имеющего массу исходного тора и радиус его осевой линии. Установлено, что все коэффициенты ряда с нечетной степенью геометрического параметра q обращаются в нуль. Четные члены разложения потенциала тора получены в аналитическом конечном виде и выражены через стандартные полные эллиптические интегралы. Важно, что данный ряд представляет потенциал тора во всем пространстве, включая и точки его внутренней области. Данный метод представления потенциала позволил найти гравитационную энергию однородного кругового тора. В качестве приложений впервые была найдена масса каждого из двух колец уникального астероида Chariklo. Масса внутреннего кольца найдена равной $M_{r1} \approx 9.8 \cdot 10^{18}$ g, а ее отношение к массе астероида $\frac{M_{r1}}{M_0} \approx 0.001$; аналогично для внешнего кольца астероида получено $M_{r2} \approx 10^{18}$ g и $\frac{M_{r1}}{M_0} \approx 10^{-4}$.

DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45584.2169

Введение

Во многих задачах астрономии, физики и гидродинамики важно знать притяжение (или потенциал) однородного гравитирующего (или заряженного электрическим зарядом) кругового тора с поверхностью

$$(r - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{1}$$

Здесь используется система цилиндрических координат (r, x_3) с началом в центре симметрии тора, R_0 и r_0 есть радиусы осевой линии и рукава тора соответственно. Впервые пространственный потенциал тора был найден в интегральном виде через суммирование вкладов от однородных круговых дисков [1]. Данный подход позволил получить потенциал тора через однократный интеграл от полных эллиптических интегралов:

$$\frac{\varphi_{\text{tor}}(r, x_3)}{2\sqrt{2}G\rho R_0 r_0} = \int_0^{2\pi} \left\{ \left[c + 2\left(R_1^2 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \right] K(k_1) + (a - c)E(k_1) - 2\,\frac{(x_3 - r_0 \sin\theta)^2}{R_0^2}\, \Pi[n, k_1] \right\} \times \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{a - c}}. \tag{2}$$

Здесь

$$R_1 = 1 + \frac{r_0}{R_0}\cos\theta, \quad a = \frac{2\big(r^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2\big)}{R_0^2},$$

$$n = \frac{a - b}{2\,\frac{r^2}{R_0^2}},$$

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{2} - R_1^2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - R_1^2\right)^2 + 4R_1^2\,\frac{(x_3 - r_0\sin\theta)^2}{R_0^2}}, \tag{3}$$

а модуль всех эллиптических интегралов

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \le 1,$$

$$k' = \sqrt{\frac{(r - R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}{(r + R_1)^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}} \le 1. \tag{4}$$

Формула (2) представляет потенциал тора во всем пространстве как вне, так и внутри его.

Заметим, однако, что нахождение потенциала тора в интегральной форме указанным методом через диски не является единственно возможным. Его потенциал можно также найти, например, методом интегрирования вкладов от тонких оболочек кругового тора (см. также [1]). Именно второй метод и применяется в настоящей работе.

Важно подчеркнуть, что наряду с полным выражением потенциала, часто возникает необходимость знать потенциал какого-то конкретного тела в виде рядов [2]. Отметим, что представления „внешнего" и „внутреннего" потенциалов тора в ряд по степеням координат пробной точки (в ряд Лапласа) с коэффициентами в конечном аналитическом виде недавно были получены в работах [3,4]. Кроме того, в работе [5] был развит метод решения задачи Дирихле для потенциалов тел с топологией тора, когда граничные условия заданы в виде рядов по сферическим функциям на кусках двух сферических поверхностей. Этот метод впервые позволил представить потенциал тора вне вещества в особой („промежуточной") сферической зоне.

В настоящей работе ставится новая задача о представлении пространственного потенциала тора в виде ряда по степеням геометрического параметра тора

$$q = \frac{r_0}{R_0}. \tag{5}$$

Этот геометрический параметр может изменяться в пределах

$$0 \le q \le 1. \tag{6}$$

При $q \to 0$ тор вырождается (с сохранением при определенных условиях массы) в тонкий круглый обруч, а в пределе $q \to 1$ получается тор без сквозного отверстия.

Кроме ряда Лапласа, для практических целей важно также представить потенциал тора рядом по степеням его геометрического параметра. Этот ряд имеет вид

$$\varphi_{\text{tor}}(r, x_3) = \varphi_0 + \sum_n \varphi_n q^n. \tag{7}$$

Наша задача заключается в нахождении коэффициентов φ_0 и φ_n.

Постановка и решение задачи

Для решения поставленной задачи мы применим формулу из монографии [1] для пространственного потенциала пустотелого тора

$$\varphi_{\text{hollow tor}}(r, x_3) = 4G\sigma r_0 \times \int\limits_0^{2\pi} \frac{R_1(\theta)K\big(k(\theta)\big)d\theta}{\sqrt{[R_1(\theta)+r]^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}}, \tag{8}$$

где введены следующие обозначения:

$$R_1(\theta) = R_0 + r_0\cos\theta,$$

$$k(\theta) = \sqrt{\frac{4rR_1(\theta)}{[R_1(\theta)+r]^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}}, \tag{9}$$

а σ — однородная поверхностная плотность вещества тонкой оболочки. Тогда потенциал сплошного однородного (с объемной плотностью ρ) кругового тора получим, произведя в (8) замену $\sigma \to \rho dr_0$ и интегрируя затем по параметру r_0 в интервале $(0, r_0)$:

$$\varphi_{\text{tor}}(r, x_3) = 4G\rho \int\limits_0^{r_0} r_0 dr_0 \times \int\limits_0^{2\pi} \frac{R_1(\theta)K\big(k(\theta)\big)d\theta}{\sqrt{[R_1(\theta)+r]^2 + (x_3 - r_0\sin\theta)^2}}. \tag{10}$$

Подчеркнем, что в отличие от (2), интегрирование в (10) двойное, однако в силу симметрии тора (так как сам тор естественным образом слагается из подобных друг другу оболочек), пользоваться формулой (10) для разложения потенциала по нормированному r_0 будет удобнее, нежели исходить прямо из формулы (2).

Первый член разложения (7) получается из (10) предельным переходом

$$r_0 \to 0; \quad 2\pi r_0\sigma \to \mu_0 = \frac{M}{2\pi R_0}.$$

В итоге находим

$$\varphi_0 = \frac{2GM}{\pi b} K(k), \tag{11}$$

где M — масса кольца, равная массе исходного тора. Здесь и ниже для сокращения записи приняты обозначения

$$b = \sqrt{(r+R_0)^2 + x_3^2}, \quad \tilde{b} = \sqrt{(r-R_0)^2 + x_3^2},$$

$$k = \frac{2\sqrt{R_0 r}}{b}. \tag{12}$$

Далее переходим к нахождению членов ряда (7) более высокого порядка. Это весьма трудоемкая операция. Прежде всего, важно подчеркнуть, что в разложении (7) все коэффициенты φ_{2n+1} при нечетных степенях q^{2n+1} обращаются в нуль. Таким образом, мы приходим в выводу о том, что искомый ряд для потенциала тора содержит только четные коэффициенты и поэтому будет иметь вид

$$\varphi_{\text{tor}}(r, x_3) = \varphi_0 + \varphi_2 q^2 + \varphi_4 q^4 + \varphi_6 q^6 + \ldots \tag{13}$$

Далее после трудоемких преобразований и вычислений мы получаем следующие коэффициенты из (13):

$$\varphi_2 = \frac{\pi G\rho R_0^3}{16b\tilde{b}^2}\left\{[r^2 - R_0^2 + x_3^2]E(k) - \tilde{b}^2 K(k)\right\}, \tag{14}$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi G\rho R_0^3}{192b^3\tilde{b}^2} \times \left\{ \frac{[(r^2-2R_0^2)(r^2-R_0^2)^2+(3r^4+R_0^4)x_3^2+(3r^2+4R_0^2)x_3^4+x_3^6]}{[(r-R_0)^2+x_3^2]} \times E(k) - \left[(r^2-R_0^2)^2 + (2r^2+3R_0^2)x_3^2 + x_3^4\right] K(k) \right\}, \tag{15}$$

$$\varphi_6 = \frac{\pi G\rho R_0^5}{960 b^3 \tilde{b}^4}$$
$$\times \left\{ \frac{[(r^2-2R_0^2)(r^2-r_0^2)^2+(3r^4+R_0^4)x_3^2+(3r^2+4R_0^2)x_3^4+x_3^6]}{\tilde{b}^2} \right.$$
$$\left. \times E(k) - \left[(r^2-R_0^2)^2 + (2r^2+3R_0^2)x_3^2 + x_3^4\right] K(k) \right\}. \tag{16}$$

Все найденные коэффициенты были тщательно проверены нами численно.

Важным для практических приложений свойством ряда (13) является то, что при малом значении геометрического параметра $q = \frac{r_0}{R_r} \approx 1$ вклад членов ряда (13) в потенциал тора быстро убывает.

Гравитационная энергия тора при малых q

По определению гравитационная (потенциальная) энергия однородного тела равна

$$W = -\frac{1}{2}\rho \iiint\limits_V \varphi\, dV. \tag{17}$$

Вводя среднее (по объему тела) значение потенциала $\tilde{\varphi} \equiv \langle\varphi\rangle$ запишем выражение (17) в виде

$$W = -\frac{1}{2} M\tilde{\varphi}. \tag{18}$$

Разработанный математический аппарат мы применяем далее к кольцам уникального астероида Chariklo (Карикло). Для изучения колец этого астероида мы будем моделировать их торами. Известно [6], что система колец астероида Chariklo состоит из плотного внутреннего кольца шириной D_1 и радиусом R_{r1}, а также внешнего кольца шириной D_2 и радиусом R_{r2}. Кольца имеют четкие границы и между ними существует щель в 9 km. Геометрические параметры колец Chariklo известны

$$R_{r1} \approx 390.6 \pm 3\,\mathrm{km}, \quad D_1 \approx 6.5\,\mathrm{km},$$
$$R_{r2} \approx 404.8 \pm 3.3\,\mathrm{km}, \quad D_2 \approx 2\,\mathrm{km}. \tag{19}$$

Сразу заметим, что кольца этого астероида очень тонкие, поэтому соответствующий им геометрический параметр весьма мал

$$q_{r1} \approx 0.008; \quad q_{r2} \approx 0.0025. \tag{20}$$

Для столь малых q достаточно (и в этом мы убедились численно) выписать только два коэффициента ряда (13)

$$\varphi_0 = \frac{2GM}{\pi b} K(k),$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi G\rho R_0}{16 b\tilde{b}^2}\left\{[r^2 - R_0^2 + x_3^2]E(k) - \tilde{b}^2 K(k)\right\}. \tag{21}$$

Масса этих колец остается пока неопределенной. Поэтому важной задачей является нахождение массы колец астероида. Из теоремы вириала следует [7], что массу колец можно выразить через их гравитационную энергию, т. е. через средний потенциал $\tilde{\varphi}$ соответствующего тора

$$M_r = \frac{3\pi}{4} M_0 \frac{r^2}{R_r^2}\tilde{\varphi}. \tag{22}$$

Важной особенностью применяемого метода является то, что в формуле (22) искомая масса M_r кольца выражается через известную нам массу центрального тела астероида M_0.

В силу круговой симметрии колец для нахождения значения $\tilde{\varphi}$ надо усреднить потенциал (18) только в плоскости меридионального кругового сечения тора

$$r'^2 + x_3^2 = r_0^2, \quad r' = r - R_0. \tag{23}$$

В принятой модели средний радиус кольца мы принимаем за R_0. Теперь задача сводится к нахождению среднего нормированного потенциала тора

$$\tilde{\varphi}_m = \left\langle \frac{\varphi}{\frac{GM_r}{2\pi R_r}} \right\rangle = I_1 + I_2. \tag{24}$$

где, согласно (21):

$$I_1 = \frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi d\alpha \int\limits_\varepsilon^1 \frac{K(k)}{b} R dR,$$

$$I_2 = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^\pi d\alpha \int\limits_\varepsilon^1 \frac{R dR}{b}\left[\left(1 + \frac{2\cos\alpha}{qR}\right)E(k) - K(k)\right],$$
$$b = \sqrt{4 + q^2R^2 + 4qR\cos\alpha}, \quad \tilde{b} = qR_rR,$$
$$k = \frac{2\sqrt{1 + qR\cos\alpha}}{b}. \tag{25}$$

Заметим, что в (25) нижний предел ε во внутреннем интеграле введен для исключения при расчетах бесконечности (дело в том, что при $\varepsilon = 0$ для точки интегрирования в центре кругового сечения тора имеет место $R = 0$, и тогда модуль $k = 1$; но, как известно, эллиптический интеграл первого рода при $K(1)$ имеет логарифмическую расходимость). При достаточно малом ε мы избегаем указанной сингулярности и можем получить значения I_1 и I_2 с требуемой для расчетов точностью.

Численные расчеты по формулам (25) дали следующие результаты. Для модели первого кольца астероида Chariklo мы нашли:

$$\varepsilon = 4 \cdot 10^{-6},$$
$$I_1 \approx 14.737,$$
$$I_2 \approx -0.215,$$
$$\varphi_m = I_1 + I_2 \approx 14.522. \tag{26}$$

Аналогично для модели второго кольца астероида:

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5},$$

$$I_1 \approx 17.166,$$

$$I_2 \approx -0.253,$$

$$\varphi_m = I_1 + I_2 \approx 16.913. \qquad (27)$$

В итоге масса внутреннего кольца и ее отношение к массе астероида оказались соответственно равными

$$M_{r1} \approx 9.8 \cdot 10^{18}\,\text{g}, \quad \text{а} \quad \frac{M_{r1}}{M_0} \approx 0.001; \qquad (28)$$

аналогично для внешнего кольца

$$M_{r2} \approx 10^{18}\,\text{g} \quad \text{и} \quad \frac{M_{r2}}{M_0} \approx 10^{-4}. \qquad (29)$$

Отношение масс колец равно 10, что типично для спутников астероидов и карликовых планет.

Подчеркнем, что вычисление среднего потенциала $\tilde{\varphi}$ фактически эквивалентно нахождению гравитационной энергии W однородного кругового тора. Действительно, гравитационная энергия колец будет равна [8]:

$$W_{r1} = -\frac{GM_{r1}^2}{4\pi R_{r1}}\,\tilde{\varphi}_1,$$

$$W_{r2} = -\frac{GM_{r2}^2}{4\pi R_{r2}}\,\tilde{\varphi}_2. \qquad (30)$$

Обсуждение

В настоящей работе потенциал тора впервые был представлен рядом по степеням его геометрического параметра в любой точке пространства, включая и точки внутри самого тора. Указанный ряд быстро сходится, поэтому в конкретных примерах можно ограничиться небольшим числом его членов. Первый член ряда при q в нулевой степени совпадает с потенциалом однородного кругового кольца (обруча), имеющего массу рассматриваемого тора и радиус, равный его осевой линии. Для практических приложений важно заметить, что это элементарное кольцо в отдаленных от тора точках дает потенциал, очень мало отличающийся от потенциала самого тора.

Установлено, что все коэффициенты ряда (13) с нечетной степенью геометрического параметра q обращаются в нуль. Четные члены разложения потенциала представлены в аналитическом конечном виде через стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра.

Разработанный метод позволил найти гравитационную энергию однородного кругового тора. Кроме того, в настоящей работе найдена также масса двух колец астероида–кентавра Chariklo. Масса внутреннего кольца найдена равной $M_{r1} \approx 9.8 \cdot 10^{18}\,\text{g}$, а ее отношение к массе астероида $\frac{M_{r1}}{M_0} \approx 0.001$; аналогично для внешнего кольца $M_{r2} \approx 10^{18}\,\text{g}$ и $\frac{M_{r2}}{M_0} \approx 10^{-4}$.

Список литературы

[1] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007.

[2] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.

[3] *Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицына Н.Г., Мухаметшина Э.Ш.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 17–21.

[4] *Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г.* // ЖТФ. 2010. Т. 81. Вып. 1. С. 23–26.

[5] *Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицына Н.Г.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 12. С. 7–10.

[6] *Braga-Ribas F., Sicardy B., Ortiz J.L.* et al. // Nature. 2014. Vol. 508. P. 72–75.

[7] *Kondratyev B.P.* // Astrophys. Space Sci. 2016. Vol. 351. N 5. P. 9.

[8] *Kondratyev B.P.* // Astrophys. Space Sci. 2016. Vol. 361. N 12. P. 1–8.