

07,01

## Динамическая модель упруго-пластического нормального столкновения сферических частиц при нелокальной пластичности

© Я.А. Ляшенко<sup>1,2</sup>, В.Л. Попов<sup>1,3,4,¶</sup>

<sup>1</sup> Берлинский технический университет,  
Берлин, Германия

<sup>2</sup> Сумский государственный университет,  
Сумы, Украина

<sup>3</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет,  
Томск, Россия

<sup>4</sup> Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
Томск, Россия

¶ E-mail: v.popov@tu-berlin.de

(Поступила в Редакцию 10 июля 2017 г.)

Рассмотрена задача нормального столкновения сферической частицы с полупространством. Проведен учет нелокальной пластической деформации, в случае, когда предел прочности зависит от радиуса контакта, а также эффекта упрочнения деформируемого материала. Численно рассчитана величина безразмерного коэффициента восстановления нормальной скорости, как функция начальной скорости сферической частицы. Полученные данные хорошо совпадают с имеющимися в литературе экспериментальными результатами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого научно-исследовательского сообщества (DFG), Министерства образования Российской Федерации и программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета. Я.А. Ляшенко выражает благодарность МОНУ за частичную финансовую поддержку в рамках проекта № 0116U006818.

DOI: 10.21883/FTT.2018.03.45562.229

### 1. Введение

Одной из актуальных задач контактной механики является точное описание процесса соударения твердых тел. Элементарные акты соударения во многом определяют поведение гранулированных сред [1–3]. Изучение динамики гранулированных сред имеет практическое значение как для оптимизации технологических процессов (например, сушка и фасовка удобрений), так и при моделировании некоторых природных явлений, таких как землетрясения, перемещения ледников и оползни. Взаимодействие между контактирующими частицами изучается также с целью описания формирования и эволюции планетарных систем. К примеру, в работе [4], основываясь на данных, полученных космическим кораблем „Вояджер“, изучается эволюция колец Сатурна с точки зрения столкновений микро-астероидов.

Однако, несмотря на кажущуюся простоту описания процесса столкновения сферических частиц, этот вопрос до настоящего времени далек от полного понимания. Ситуация усложняется еще и тем, что существенное влияние на процесс столкновения могут оказывать адгезионные силы [5,6], шероховатость поверхностей, пластические деформации [7,8], либо наличие третьего тела в зоне контакта (смазка, продукты износа). К примеру, при столкновении ледяных частиц они могут частично плавиться в зоне контакта, и при определенных условиях после столкновения частицы будут представлять единое целое. Подобная ситуация может наблюдаться и при

наличии сил адгезии между контактирующими поверхностями — если начальная скорость частиц меньше определенного значения, за счет работы адгезионных сил происходит диссипация механической энергии, и частицы слипаются. На сегодняшний день существует большое количество теорий и экспериментов по столкновению твердых частиц. К примеру, в работе [8] предложена теория описания столкновений частиц с учетом пластических деформаций. Однако сам механизм пластических деформаций может быть различным, поэтому указанная теория описывает лишь часть возможных сценариев.

Одним из перспективных и развивающихся методов исследования механики столкновений является метод редукции размерности (MDR) [9]. К примеру, в рамках метода MDR было исследовано столкновение частиц с бесконечным коэффициентом трения в зоне контакта (без учета скольжения) [10], с конечным коэффициентом трения [11], а также с наличием сил адгезии между контактирующими телами [12]. Причем в указанных случаях численно была найдена функция, которая задает кинетические параметры после удара (нормальную и тангенциальную компоненту скоростей и циклическую скорость вращения сферического тела) как функцию соответствующих параметров до удара. Указанная функция записана в безразмерных параметрах, которые содержат материальные и геометрические характеристики соударяющихся сфер, что позволяет использовать полученные результаты для описания систем с различны-

ми параметрами. Однако в стороне остался вопрос о влиянии пластических деформаций на процесс столкновения. В недавней работе [13] предложен критерий пластичности, и описаны особенности его применения в рамках метода MDR. Предлагаемая работа предпринята с целью описания упруго-пластического столкновения сферических тел и в особенности посвящена изучению влияния нелокальных пластических деформаций.

## 2. Формулировка модели нормальных столкновений в рамках метода MDR

В рамках метода редукции размерности для описания контакта аксиально симметричного упругого тела с упругим полупространством необходимо, во-первых, заменить оригинальный трехмерный профиль контактирующего с полупространством тела  $z = f(r)$  на его одномерный эквивалент, который задается преобразованием Абеля [9]

$$g(x) = |x| \int_0^{|x|} \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr. \quad (1)$$

Для сферического индентора  $f(r) = r^2/2R$  преобразование (1) приводит к зависимости  $g(x) = x^2/R$ . Взаимодействующие тела одновременно заменяются на упругое основание — последовательность невзаимодействующих пружин, имеющих нормальную жесткость

$$k_z = E^* \Delta x, \quad (2)$$

где  $\Delta x$  — величина дискретизации (расстояние между пружинами), а

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad (3)$$

где  $E_1$  — модуль упругости,  $\nu_1$  — коэффициент Пуассона индентора, а  $E_2$  и  $\nu_2$  — соответствующие параметры упругого полупространства.

Третьим шагом в процедуре MDR является вдавливание индентора в упругое основание на глубину  $d$ , в результате чего индивидуальные пружины испытывают смещения

$$u_z(x) = d - g(x) = d - \frac{x^2}{R}. \quad (4)$$

Радиус контакта  $a$  определяется условием  $u_z(a) = 0$ , откуда  $a = \sqrt{Rd}$ . Зная глубину индентирования  $d$ , можно определить действующую нормальную силу  $F_n$ . Для этого необходимо сложить силы натяжения от каждой пружины в контакте

$$\begin{aligned} F_z(a) &= E^* \int_{-a}^a u_z(x) dx \\ &= 2E^* \int_0^{\sqrt{Rd}} \left( d - \frac{x^2}{R} \right) dx = \frac{4E^* \sqrt{Rd^3}}{3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что при численном моделировании необходимо пользоваться дискретным представлением интеграла (5), т. е. использовать эквивалентную сумму

$$F_z = E^* \Delta x \sum_{\text{cont}} u_z(x_i), \quad (6)$$

где производится суммирование по всему контакту. Функция  $u_z(x_i)$ , как и ранее, задается выражением (4).

Поскольку целью настоящей работы является описание упруго-пластического столкновения, мы должны ввести в MDR критерий пластичности. Такой критерий был предложен в работе [13]. Причем в [13] рассматривается специфический случай нелокальной пластичности, когда теряет смысл критическое напряжение текучести материала. Такая ситуация наблюдается для малых радиусов контакта. Нелокальность критерия пластичности ведет к зависимости „твердости“ от размера контакта. Насколько нам известно, применимо к механике столкновений ранее указанный критерий нелокальной пластичности не рассматривался. Согласно [13] действующая в контакте нормальная сила может быть записана в виде

$$F_z = \pi q_c a, \quad (7)$$

где  $a$  — радиус контакта, а  $q_c$  имеет смысл критической линейной плотности силы, при превышении которой начинается пластическая деформация. Критическая сила  $f_c$ , действующая на одну пружину, может быть найдена как

$$f_c = \frac{F_z}{2a/\Delta x}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует выражение для определения величины  $f_c$  [13]

$$f_c = \frac{\pi}{2} q_c \Delta x, \quad (9)$$

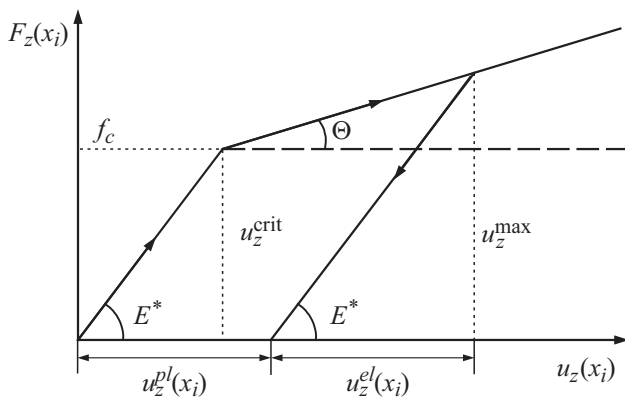
где  $f_c$  — критическая (максимальная) упругая сила, при превышении которой начинается пластическое деформирование пружины. Однако критерий (9) пока не учитывает упрочнение материала, который подвергается пластической деформации.

Рассмотрим подробно процесс пластического деформирования выделенной пружины с учетом упрочнения. На рис. 1 показана известная схема нагружения индивидуальной пружины [14]. Здесь до критического значения  $f_c$  (9) пружина деформируется упруго. Это упругий участок зависимости, на котором нормальная сила задается законом Гука

$$F_z(x_i) = [u_z(x_i) - u_z^{pl}(x_i)] E^* \Delta x, \quad (10)$$

в котором для рассматриваемого упругого участка  $u_z^{pl}(x_i) = 0$ . На упругом участке при разгрузке пружины она полностью восстанавливает свою первоначальную форму. Если же натяжение пружины превысит критическое значение

$$u_z(x_i) > u_z^{\text{crit}} = \frac{f_c}{E^* \Delta x}, \quad (11)$$



**Рис. 1.** Схематический вид кривой нагружения для выделенной пружины с координатой  $x_i$  с деформационным упрочнением материала.

то величина упругой силы задается соотношением

$$F_z(x_i) = f_c + [u_z(x_i) - u_z^{\text{crit}}]\Theta\Delta x. \quad (12)$$

Разгрузка пружины, которая пластически деформирована, происходит также по гуксовому участку (см. рис. 1), при этом пластическая составляющая смещения пружины может быть найдена как

$$u_z^{\text{pl}}(x_i) = (u_z^{\text{max}} - u_z^{\text{crit}})\left(1 - \frac{\Theta}{E^*}\right). \quad (13)$$

В процессе разгрузки пружины нормальную силу следует вычислять по формуле (10), где  $u_z^{\text{pl}}(x_i)$  определяется согласно (13). Отметим, что схема, представленная на рис. 1, не единственный способ описания перехода упругой деформации в пластическую. Например, в работе [15] нами использовалась функция, которая описывает плавный переход упругой деформации в пластическую, без разрыва первой производной  $\partial F_z(x_i)/\partial u_z(x_i)$  в точке упруго-пластического перехода. Однако использование такой функции оправдано скорее в случае, когда процесс деформирования исследуется аналитически, а мы строим численную модель. Поэтому мы остановились на более простом варианте, который также позволяет описать деформационное упрочнение.

Процесс нормального столкновения сферического тела с полупространством можно условно разбить на две фазы. Первая фаза — это погружение (индентирование) шарика в полупространство. На протяжении этой фазы нормальная скорость движения шарика будет уменьшаться до нулевого значения, а его кинетическая энергия переходит в упругую энергию сжатых пружин, а также частично затрачивается на работу пластической деформации. Вторая фаза — это отскок шарика. В этой фазе скорость шарика будет увеличиваться от нуля до значения, с которым он окончательно отделится от полупространства. Поскольку в обеих фазах шарик всегда движется в противоположных направлениях, для

каждой пружины будет сначала осуществляться нагружение с монотонно увеличивающимся значением  $u_z(x_i)$ , а при разгрузке величина  $u_z(x_i)$  будет монотонно уменьшаться.

Теперь рассмотрим процесс столкновения сферы с полупространством. Пусть начальная скорость шарика равна  $v_{z0}$ . Рассмотрим ситуацию, в которой шарик не вращается (начальная циклическая частота равна нулю). При этом он при отлете от поверхности также будет иметь нулевую циклическую частоту вращения. Одной из основных величин в таких экспериментах является коэффициент восстановления нормальной скорости  $e_n$ , вычисляемый как

$$e_n = -\frac{v_z}{v_{z0}}, \quad (14)$$

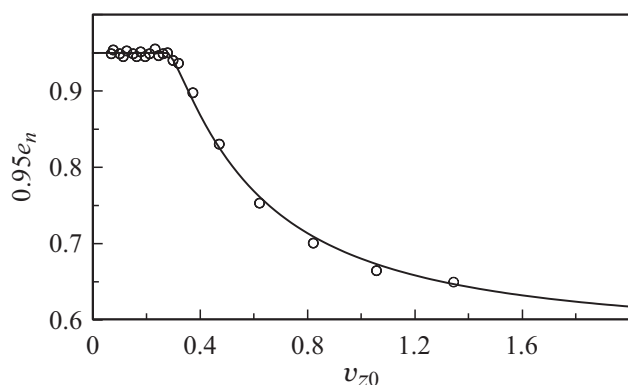
где  $v_z$  — скорость шарика, с которой он отлетает от поверхности полупространства (скорости  $v_z$  и  $v_{z0}$  разнонаправлены и имеют противоположные знаки, поэтому  $e_n > 0$ ). Для определения временной эволюции скорости шарика  $v_z$  необходимо решить единственное уравнение движения (поскольку отсутствует тангенциальное движение), записанное в виде

$$m\dot{v}_z = -F_z, \quad (15)$$

где нормальная сила  $F_z$  при контакте шарика с поверхностью согласно выражению (6) всегда положительна. Решая уравнение (15) с использованием описанной выше процедуры, можно найти конечную скорость шарика (при его отлете от поверхности полупространства), а значит и величину коэффициента восстановления  $e_n$  (14).

### 3. Результаты моделирования нормального соударения и сравнение с экспериментом

В работе [16] экспериментально определялась зависимость коэффициента восстановления нормальной скорости  $e_n$  (14) от значения начальной нормальной скорости  $v_{z0}$ . А именно, изучалось отражение шарика от гладкой стальной пластины размером  $25.4 \times 22.86$  см и толщиной 5.08 см. Диаметр шарика составлял 1.27 см. В работе [16] указывается, что коэффициент восстановления сильно зависит от качества обработки контактирующих поверхностей. Это вполне логично, поскольку в случае, когда поверхности контактирующих тел имеют шероховатости, на этих шероховатостях при соударении будут создаваться существенно большие напряжения, чем в объеме шарика. Это приведет к деформации неровностей и диссипации механической энергии. Более того, всегда при ударе слышен звук, являющийся следствием распространения упругих волн в материале. А это также связано с диссипацией энергии. Дополнительно стоит учитывать, что эксперименты часто проводят в воздухе, который также оказывает вязкое сопротивление. За счет этих факторов, коэффициент восстановления



**Рис. 2.** Коэффициент восстановления нормальной скорости  $e_n$  (14) как функция начальной скорости шарика  $v_{z0}$ . Сплошная кривая показывает результаты расчета в рамках метода MDR, символы — экспериментальные результаты из работы [16].

в упругой области соударения в работе [16] при чисто обработанных поверхностях контактирующих тел не превышал 0.82. После дополнительной обработки поверхностей мелкозернистой наждачной бумагой коэффициент восстановления стал достигать величины 0.87. И наконец, после тщательной полировки с применением ультрадисперсного абразива, коэффициент восстановления стал достигать максимальной величины  $e_n \approx 0.95$ .

Поскольку мы рассматриваем случай столкновения сферического тела с пластиной, когда они изготовлены из одинаковых материалов, формула (3) примет более простой вид

$$E^* = \frac{E}{2(1 - \nu^2)}, \quad (16)$$

что для параметров стали  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и  $\nu = 0.286$  [16] даст значение  $E^* \approx 1.09 \cdot 10^{11}$  Па. Радиус шарика составлял  $R = 0.635$  см, плотность стали  $\rho = 7.8$  г/см<sup>3</sup>, соответственно его масса  $m = 4\rho R^3/3 \approx 8.366$  г.

Предлагаемая нами модель упруго-пластического столкновения предполагает идеально гладкие поверхности контактирующих тел, и в этом случае при малых скоростях нормального соударения (когда реализуется чисто упругое столкновение) коэффициент восстановления  $e_n = 1$ . Однако, как мы это указали выше, за счет влияния факторов, которые не учитываются в нашей модели, в работе [16] максимальное значение коэффициента восстановления нормальной скорости  $e_n$  не превышало значение 0.95. Поэтому при дальнейших расчетах мы производили нормировку коэффициента восстановления на это максимальное значение.

На рис. 2 показана зависимость рассчитанного значения коэффициента восстановления при параметрах, соответствующих эксперименту, описанному в работе [16] (эти параметры указаны выше).

Используемое в модели значение коэффициента упрочнения при этом составляло  $\Theta = 0.37E^*$ , а критическая плотность силы  $q_c = 3.8 \cdot 10^5$  Н/м. Эти два

параметра в работе [16] не указаны, поэтому они подбирались таким образом, чтобы теоретически получаемая кривая, показанная на рис. 2, максимально соответствовала экспериментальным данным. При этом параметр  $q_c$  на зависимости  $e_n(v_{z0})$  задает точку, в которой начинается пластическая деформация (т.е. величина  $e_n$  начинает убывать), а значение параметра  $\Theta$  задает вид кривой  $e_n(v_{z0})$  в области наличия пластических деформаций. Как видно из рисунка, предложенная нами модель хорошо описывает конкретную экспериментальную ситуацию.

Существуют работы, в которых экспериментально исследуются косые столкновения, и измеряется тангенциальный коэффициент восстановления, а также изменение циклической частоты вращения шарика после удара, например работа [17]. Причем в [17] при тангенциальном движении необходимо учитывать трение, которое будет приводить к частичному проскальзыванию в зоне контакта. В рамках метода MDR нами была построена такая существенно более сложная численная модель, однако не удалось подобрать соответствующие параметры для удовлетворительного описания экспериментальных результатов. Это говорит о том, что в работе [17] реализовался другой механизм пластической деформации. Более того, в [17], как частный случай отдельно исследуется нормальное соударение, и полученная зависимость  $e_n(v_{z0})$  существенно отлична от показанной на рис. 2. Не удалось нам с помощью предлагаемого механизма пластичности описать и результаты работы [18] (см. также [19]), в которой также изучается нормальное столкновение частиц. Более того, теория, предложенная в [19], тоже довольно плохо описывает экспериментальные результаты работы [18]. Все это говорит о том, что в реальности пластическая деформация может происходить по многим сценариям, и для каждого необходим свой отдельный подход. Здесь мы предложили один из вариантов описания нелокальной пластичности, справедливость которого подтверждена экспериментальной работой [16].

## 4. Заключение

В работе предложена численная модель, описывающая нормальное столкновение сферических тел в упруго-пластической области. Показано, что с ростом величины начальной нормальной скорости коэффициент восстановления нормальной скорости уменьшается. Было проанализировано несколько экспериментальных работ, содержащих данные по исследованию коэффициента восстановления нормальной скорости и показано, что предложенная нами модель подходит далеко не для всех ситуаций. А именно, мы описываем случай нелокальной пластичности, в котором теряет смысл критическое напряжение текучести материала. Только в этом специфическом случае можно использовать изложенную выше теорию нормального соударения. В связи с этим,

результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы для определения механизма деформирования. Дело в том, что для всех систем существует свой критический радиус индентора, меньше которого предложенный нами подход становится применимым. Если радиус больше этого значения, все изложенное выше будет неверно. В связи с этим такую методику моделирования можно использовать для определения этого критического радиуса.

## Список литературы

- [1] M.P. Ciamarra, A.H. Lara, A.T. Lee, D.I. Goldman, I. Vishik, H.L. Swinney. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 194301 (2004).
- [2] P. Jop, Y. Forterre, O. Pouliquen. *Nature* **441**, 727 (2006).
- [3] N.V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel. *Phys. Rev. E* **53**, 5382 (1996).
- [4] F.G. Bridges, A. Hatzes, D.N.C. Lin. *Nature* **309**, 333 (1984).
- [5] J.R. Barber. *Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **30**, 468 (1979).
- [6] I.A. Lyashenko. *FU Mech. Eng.* **14**, 313 (2016).
- [7] В.В. Ефименко. *Вестн. ФГОУ ВПО МГАУ* **2**, 41 (2009).
- [8] C. Thornton, Z. Ning. *Powder Technol.* **99**, 154 (1998).
- [9] V.L. Popov, M. Heß. *Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction*. Springer-Verlag, Berlin (2015). 265 p.
- [10] I.A. Lyashenko, V.L. Popov. *Sci. Rep.* **5**, 8479 (2015).
- [11] E. Willert, V.L. Popov. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)* **96**, 1089 (2016).
- [12] I.A. Lyashenko, E. Willert, V.L. Popov. *Mech. Mater.* **92**, 155 (2016).
- [13] V.L. Popov. *FU Mech. Eng.* **13**, 39 (2015).
- [14] А.Д. Погребняк, С.Н. Братушка, В.М. Береснев, N. Levintant-Zayonts. *Успехи химии* **82**, 1135 (2013).
- [15] А.В. Хоменко, Я.А. Ляшенко. *Трение и износ* **31**, 412 (2010).
- [16] J.M. Lifshitz, H. Kolsky. *J. Mech. Phys. Solids* **12**, 35 (1964).
- [17] D.A. Gorham, A.H. Kharaz. *Powder Technol.* **112**, 193 (2000).
- [18] H.F. Kagnur, I.R. Kleis. *Изв. АН СССР. МТТ* **5**, 182 (1988).
- [19] O.V. Kim, P.F. Dunn. *J. Aerosol Sci.* **38**, 532 (2007).