11,05

Анизотропия кубического типа, создаваемая дефектами типа „случайная локальная анизотропия“, и фазовая диаграмма $O(n)$-модели

© *А.А. Берзин* [1], *А.И. Морозов* [2,¶], *А.С. Сигов* [1]

[1] Московский технологический университет (МИРЭА),
Москва, Россия
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия
[¶] E-mail: mor-alexandr@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 23 мая 2017 г.)

Получено выражение для константы анизотропии кубического типа, создаваемой дефектами типа „случайная локальная анизотропия“. Показано, что теорема Имри и Ма, утверждающая, что в пространстве размерности $d < 4$ введение сколь угодно малой концентрации дефектов типа „случайная локальная анизотропия“ в систему с непрерывной симметрией n-компонентного векторного параметра порядка ($O(n)$-модель) приводит к исчезновению дальнего порядка и появлению неоднородного состояния, несправедлива, если анизотропное распределение направлений индуцируемых дефектами случайных легких осей в пространстве параметра порядка создает глобальную анизотропию типа „легкая ось“. В случае слабо анизотропного распределения легких осей в пространстве размерности $2 \leq d < 4$ существует критическая концентрация дефектов, при превышении которой указанное выше неоднородное состояние Имри–Ма может существовать как равновесное. При концентрации дефектов меньшей критической в системе имеет место дальний порядок. В случае сильно анизотропного распределения легких осей состояние Имри–Ма полностью подавляется, и состояние с дальним порядком реализуется при любой концентрации дефектов.

Работа поддержана грантом Президента РФ НШ-8003.2016.

DOI: 10.21883/FTT.2017.12.45243.166

1. Введение

Несмотря на то что исследование систем с n-компонентным векторным параметром порядка ($O(n)$-модели), содержащих дефекты типа „случайная локальная анизотропия“, ведется в течение многих лет, полной ясности в описании их равновесных свойств нет.

С одной стороны, на эти системы было распространено действие теоремы Имри и Ма [1] и сделано утверждение, что введение сколь угодно малой концентрации дефектов типа „случайная локальная анизотропия“ ведет к исчезновению дальнего порядка и появлению неоднородного состояния, которое в дальнейшем будем называть состоянием Имри–Ма [2,3].

С другой стороны, в работе [4] было сделано утверждение, что изотропия беспорядка является существенным требованием для реализации состояния Имри–Ма.

В нашей предшествующей работе [5] было показано, что в случае, когда анизотропное распределение направлений случайных легких осей, создаваемых дефектами, индуцирует в пространстве параметра порядка глобальную анизотропию типа „легкая ось“, для разрушения дальнего порядка и возникновения состояния Имри–Ма необходимо, чтобы константа этой глобальной анизотропии не превышала порогового значения. В противном случае дальний порядок не исчезает и состояние Имри–Ма не возникает.

Множество анизотропных распределений легких осей не ограничивается рассмотренным в работе [5] случаем, когда глобальная анизотропия возникает в результате простого суммирования энергий взаимодействия отдельных дефектов с однородным распределением параметра порядка. Примером отличного от изотропного распределения случайных легких осей, не создающего в первом приближении глобальной анизотропии, является распределение, при котором локальные оси анизотропии с равной вероятностью направлены параллельно n взаимно перпендикулярным направлениям в пространстве параметра порядка, которые выберем в качестве осей декартовой системы координат.

Целью данной работы является изучение глобальной анизотропии, возникающей во втором и следующих порядках по константе локальной анизотропии, создаваемой отдельным дефектом, и нахождение фазовой диаграммы системы в переменных „концентрация дефектов типа „случайная локальная анизотропия“ – константа глобальной анизотропии“.

2. Энергия системы классических спинов

Энергия обменного взаимодействия n-компонентных локализованных спинов $\mathbf{s}_i$ фиксированной единичной длины (длина вектора может быть включена в соответствующие константы взаимодействия или поля), образующих d-мерную простую кубическую решетку, в приближении взаимодействия ближайших соседей имеет вид

$$W_{\mathrm{ex}} = -\frac{1}{2} J \sum_{i\delta} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+\delta}, \qquad (1)$$

где J — обменный интеграл, суммирование по i ведется по всей решетке спинов, а по δ — по ближайшим к данному спину соседям.

Энергия взаимодействия спинов с дефектами типа „случайная локальная анизотропия“ равна

$$W_{\mathrm{def}} = -\frac{1}{2} K_0 \sum_l \big(\mathbf{s}_l \mathbf{n}_l\big)^2, \qquad (2)$$

$K_0 > 0$ — константа случайной анизотропии, суммирование осуществляется по случайно расположенным в узлах решетки примесям, $\mathbf{n}_i$ — единичный вектор, задающий направление случайной легкой оси.

Переходя к непрерывному распределению параметра порядка $\mathbf{s}(\mathbf{r})$, используем для энергии неоднородного обмена выражение [6]

$$W_{\mathrm{ex}} = \frac{D}{2} \int d^d\mathbf{r}\, \frac{\partial \mathbf{s}^{\perp}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{s}^{\perp}}{\partial x_i'}, \qquad (3)$$

где $D = Jb^{2-d}$, b — междоузельное расстояние, $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$ — компонента вектора параметра порядка, перпендикулярная его среднему по системе направлению $\mathbf{s}_0$.

Энергия взаимодействия спинов с дефектами принимает вид

$$W_{\mathrm{def}} = -\frac{1}{2} b^{-d} \int d^d\mathbf{r}\, K(\mathbf{r}) \big(\mathbf{s}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\big)^2, \qquad (4)$$

где

$$K(\mathbf{r}) = K_0 b^d \sum_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \qquad (5)$$

3. Анизотропия кубического типа

Линейный по константе анизотропии K_0 вклад в объемную плотность энергии $w^{(1)}$ равен

$$w^{(1)}(\mathbf{s}_0) = -\frac{xK_0}{2b^d} \big\langle (\mathbf{s}_0 \mathbf{n}_i)^2 \big\rangle, \qquad (6)$$

где x — безразмерная концентрация дефектов (их число на одну ячейку), а скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по всем дефектам.

В случае отсутствия глобальной анизотропии в первом порядке по K_0, то есть при выполнении условия $w^{(1)}(\mathbf{s}_0) = \mathrm{const}$, следует учесть неоднородность параметра порядка, вызванную случайной анизотропией, и получить вклад в энергию, квадратичный (или более высокой степени) по константе K_0. Реально разложение ведется по малому параметру K_0/J. Будем пренебрегать продольной восприимчивостью системы в области низких температур, много меньших температуры магнитного упорядочения.

Наличие случайной анизотропии ведет к малым отклонениям параметра порядка от своего среднего значения и появлению компоненты $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$. Представим параметр порядка в линейном по $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$ приближении в виде

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r}), \qquad (7)$$

где $|\mathbf{s}_0| \gg |\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})|$. Подставляя это выражение в формулу (4), получаем линейное по $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$ и квадратичное по K_0 (как станет ясно позже) слагаемое в W_{def}

$$W^{(2)}_{\mathrm{def}} = -b^{-d} \int d^d\mathbf{r}\, K(\mathbf{r}) \big(\mathbf{s}_0\mathbf{n}(\mathbf{r})\big) \big(\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\big). \qquad (8)$$

Величина $K(\mathbf{r})(\mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{s}_0)\mathbf{n}(\mathbf{r})$ играет роль эффективного случайного поля, действующего на спин. Его перпендикулярная $\mathbf{s}_0$ составляющая $\mathbf{h}^{\perp}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})$ равна

$$\mathbf{h}^{\perp}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r}) = K(\mathbf{r}) \big(\mathbf{s}_0\mathbf{n}(\mathbf{r})\big) \big[\mathbf{n}(\mathbf{r}) - \mathbf{s}_0\big(\mathbf{s}_0\mathbf{n}(\mathbf{r})\big)\big]. \qquad (9)$$

Фурье-компонента параметра порядка $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{k})$ связана с Фурье-компонентой эффективного случайного поля $\mathbf{h}^{\perp}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{k})$ соотношением

$$\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{k}) = \chi^{\perp}(\mathbf{k}) \mathbf{h}^{\perp}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{k}), \qquad (10)$$

где $\chi^{\perp}(\mathbf{k})$ перпендикулярная восприимчивость системы спинов, а величина

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{\perp}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{V} \int d^d\mathbf{r}\, \mathbf{h}^{\perp}_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) \\ &= \frac{K_0}{N} \sum_l (\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l) \big[\mathbf{n}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)\big] \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_l), \qquad (11)\end{aligned}$$

где V — объем системы, а N — число элементарных ячеек. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r}) = \frac{K_0}{N} \sum_{\mathbf{k}} \chi^{\perp}(\mathbf{k}) \\ \times \sum_l (\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)[\mathbf{n}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)] \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)], \qquad (12)\end{aligned}$$

суммирование по $\mathbf{k}$ ведется по зоне Бриллюэна. Подстановка этого выражения в (8) дает

$$\begin{aligned}W^{(2)}_{\mathrm{def}} = &-\frac{K_0^2}{N} \sum_{\mathbf{k}} \chi^{\perp}(\mathbf{k}) \\ &\times \sum_{l,m} (\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)[\mathbf{n}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)](\mathbf{s}_0\mathbf{n}_m)[\mathbf{n}_m - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_m)] \\ &\times \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l)]. \qquad (13)\end{aligned}$$

В силу случайного распределения дефектов в координатном пространстве и случайного выбора локальных осей анизотропии дефектов отличное от нуля значение

$W^{(2)}_{\text{def}}$ обусловлено слагаемыми с $l = m$. Поэтому

$$W^{(2)}_{\text{def}} = -\frac{K_0^2}{N}\sum_{\mathbf{k}}\chi^{\perp}(\mathbf{k})\sum_{l}(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^2\left[1-(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^2\right]$$
$$= -xK_0^2\sum_{\mathbf{k}}\chi^{\perp}(\mathbf{k})\left[\left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^2\right\rangle - \left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^4\right\rangle\right]. \quad (14)$$

В случае $w^{(1)}(\mathbf{s}_0) = \text{const}$ второе слагаемое в правой части (14) определяет глобальную анизотропию системы.

В пространстве размерности $2 < d < 4$ в качестве величины $\chi^{\perp}(\mathbf{k})$ можно использовать восприимчивость чистой системы

$$\chi^{\perp}(\mathbf{k}) = \left(Jb^2k^2\right)^{-1}. \quad (15)$$

Переходя от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию по зоне Бриллюэна и вводя обозначение

$$\tilde{\chi}^{\perp} = \int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\chi^{\perp}(\mathbf{k}), \quad (16)$$

получаем квадратичный по K_0 вклад в объемную плотность энергии

$$w^{(2)}_{\text{def}} = -xK_0^2\tilde{\chi}^{\perp}\left[\left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^2\right\rangle - \left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^4\right\rangle\right]. \quad (17)$$

В пространстве размерности $2 < d < 4$ величина $\tilde{\chi}^{\perp}$ не имеет особенностей при $\mathbf{k} = 0$.

Квадратичный по K_0 вклад энергии неоднородного обмена (3) в объемную плотность энергии находится аналогично путем подстановки в (3) выражения для $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$. Он вдвое меньше по модулю, чем $w^{(2)}_{\text{def}}$ (17) и имеет противоположный знак. Поэтому результирующая объемная плотность энергии анизотропии имеет вид

$$w^{(2)} = -\frac{x\tilde{\chi}^{\perp}K_0^2}{2}\left[\left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^2\right\rangle - \left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^4\right\rangle\right]. \quad (18)$$

Аналогично могут быть получены слагаемые, содержащие более высокие степени K_0.

В качестве константы глобальной анизотропии K_{eff} выберем значение

$$K_{\text{eff}} = 2b^d\left[\left(w^{(1)}+w^{(2)}\right)_{\max} - \left(w^{(1)}+w^{(2)}\right)_{\min}\right], \quad (19)$$

где $w^{(i)}_{\max}$ и $w^{(i)}_{\min}$ $(i = 1, 2)$ — максимальное и минимальное значение величины $w^{(i)}$ как функции направления вектора $\mathbf{s}_0$.

4. Двумерный случай

Особенность двумерных моделей состоит в отсутствии дальнего порядка в чистой системе при конечной температуре. Поэтому необходимо сделать предположение о наличии дальнего порядка, индуцированного случайными локальными осями анизотропии, и решать самосогласованную задачу [7].

Поскольку под действием эффективного поля параметр порядка отклоняется от легкого направления к трудному, то $\chi^{\perp}(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\chi^{\perp(\mathbf{k})} = \left(Jb^2k^2 + K_{\text{eff}}\right)^{-1}. \quad (20)$$

Легко видеть, что присутствие в (20) K_{eff} обрезает расходимость $\tilde{\chi}^{\perp}$ при малых $\mathbf{k}$, которые дают основной вклад в $\tilde{\chi}^{\perp}$ при $d = 2$. В результате

$$\tilde{\chi}^{\perp} = \frac{1}{4\pi b^2J}\ln\frac{4\pi J}{K_{\text{eff}}}. \quad (21)$$

Величина K_{eff} находится путем решения уравнения самосогласования (19) после подстановки в него значения $\tilde{\chi}^{\perp}$. Поскольку в первом приближении $K_{\text{eff}} \propto x$, то в следующем приближении получаем $w^{(2)} \propto -x\ln x$. Таким образом, несмотря на то что слагаемое $w^{(2)}$ содержит по сравнению с $w^{(1)}$ лишний малый параметр K_0/J, в области малых концентраций оно может превзойти $w^{(1)} \propto x$. Анализ кубических и более старших по параметру K_0/J членов показывает, что их концентрационная зависимость в области малых концентраций дефектов такая же, как у $w^{(2)}$. Поэтому для изучения концентрационной зависимости глобальной анизотропии можно ограничиться линейным и квадратичным по K_0 слагаемыми.

5. Пример анизотропии кубического типа

Рассмотрим в качестве примера случай, когда случайные легкие оси дефектов с равной вероятностью направлены коллинеарно осям декартовой системы координат в n-мерном пространстве параметра порядка. В этом случае $\langle n_{li}, n_{lj}\rangle = \frac{1}{n}\delta_{ij}$, где n_{lj} — j-ая компонента вектора $\mathbf{n}_l$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ij} символ Кронекера, и $w^{(1)}(\mathbf{s}_0) = \text{const}$. Аналогично $\langle n^4_{lj}\rangle = \frac{1}{n}$, средние от произведений различных компонент вектора $\mathbf{n}_l$ равны нулю и величина $\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^4\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}s^4_{0j}$. Максимальное значение суммы $\sum_{j=1}^{n}s^4_{0j}$ равно 1, если вектор $\mathbf{s}_0$ параллелен одной из осей декартовой системы координат в пространстве параметра порядка, а минимальное значение равно $1/n$, когда этот вектор направлен вдоль одной из главных диагоналей данной системы. Поскольку слагаемое, содержащее $\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{n}_l)^4\rangle$, входит в объемную плотность энергии со знаком плюс, то в равновесном состоянии вектор $\mathbf{s}_0$ направлен вдоль одной из главных диагоналей декартовой системы координат в пространстве параметра порядка. Количество компонент параметра порядка ($n = 2$ — $X - Y$ модель или $n = 3$ — модель Гейзенберга) не играет существенной роли, поскольку, в отличие от линейной по K_0 анизотропии, анизотропия второго и более старших порядков по K_0 индуцирует появление легких осей, а не легких плоскостей.

Для константы глобальной анизотропии получаем

$$K_{\text{eff}} = x\tilde{\chi}^{\perp} b^d K_0^2 \frac{n-1}{n^2}. \tag{22}$$

В пространстве размерности $2 < d < 4$ величина $\tilde{\chi}^{\perp} b^d J = \text{const}$ (при $d = 3$ она приближенно равна 0.2) и K_{eff} можно оценить как

$$K_{\text{eff}} \sim 0.1x \frac{K_0^2}{J}. \tag{23}$$

Для $d = 2$, используя выражения (21), (22) и решая уравнение самосогласования (19), получаем в логарифмическом приближении

$$K_{\text{eff}} = x \frac{K_0^2}{4\pi J} \frac{n-1}{n^2} \ln \frac{(4\pi J n)^2}{x(n-1)K_0^2}. \tag{24}$$

6. Фазовая диаграмма системы

Анизотропное распределение направлений случайных легких осей дефектов индуцирует как анизотропию типа „легкая ось“, так и анизотропию типа „легкая плоскость“. Подавляет неоднородное состояние Имри–Ма только анизотропия типа „легкая ось“ [5,8]. Поэтому рассмотрим подробнее ситуацию, возникающую при эффективной анизотропии типа „легкая плоскость“.

Для решения вопроса о том, возникнет ли в системе дальний порядок с вектором $\mathbf{s}_0$, лежащим в легкой плоскости, или неоднородное состояние Имри–Ма, следует спроектировать все векторы $\mathbf{n}_l$ на указанную гиперплоскость размерности m ($n > m \geq 2$) в пространстве параметра порядка и рассмотреть задачу на этой гиперплоскости. При возникновении в ней анизотропии типа „легкая плоскость“ операцию следует повторить. В результате мы придем к одному из трех возможных случаев:

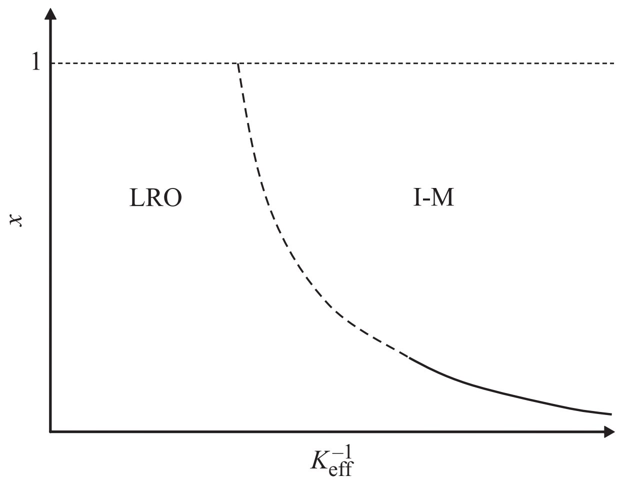
— Проекции векторов $\mathbf{n}_l$ на легкую плоскость равны нулю. При этом поведение системы аналогично поведению чистой системы с числом компонент параметра порядка, соответствующим размерности гиперплоскости. В этом случае неоднородное состояние Имри–Ма не возникает.

— В самой легкой плоскости имеет место анизотропия типа „легкая ось“. Тогда задача сводится к задаче с такой анизотропией, но с числом компонент параметра порядка, равным m.

— Распределение проекций векторов $\mathbf{n}_l$ на легкую плоскость является идеально изотропным. В этом случае теорема Имри и Ма справедлива.

Для того, чтобы понять, реализуется ли в системе с эффективной анизотропией типа „легкая ось“ неупорядоченное состояние Имри–Ма, необходимо сравнить величину константы эффективной анизотропии с критическим значением, при котором происходит подавление указанного состояния [5,8].

Действительно, чтобы следовать за пространственными флуктуациями направления легкой оси, параметру порядка приходится отклоняться от глобальной легкой оси. Это приводит к росту объемной энергии анизотропии на величину порядка K_{eff}/b^d. Когда эта величина уже не компенсируется выигрышем энергии за счет следования параметра порядка за флуктуациями направления легкой оси, неоднородное состояние Имри–Ма становится энергетически невыгодным и в системе восстанавливается дальний порядок.



Фазовая диаграмма системы в переменных „концентрация дефектов x — константа глобальной анизотропии типа „легкая ось“ K_{eff}“: LRO — фаза с дальним порядком, I–M — неупорядоченная фаза Имри–Ма.

Соответствующее критическое значение равно [5,8]

$$K_{\text{cr}} \sim K_0 x^{\frac{2}{4-d}} \left(\frac{K_0}{J}\right)^{\frac{d}{4-d}}. \tag{25}$$

В пространстве с размерностью $2 < d < 4$ глобальная анизотропия, индуцированная дефектами, пропорциональна их концентрации x, а величина K_{cr} содержит более высокую степень концентрации. В частности, в случае трехмерного координатного пространства $K_{\text{cr}} \propto x^2$. Из этого следует, что в пределе $x \to 0$ эффективная анизотропия, возникающая в любом порядке по K_0, будет превосходить критическое значение.

В случае $d = 2$ величина $K_{\text{eff}} \propto -x \ln x$, то есть в области малых концентраций также превосходит критическое значение $K_{\text{cr}} \propto x$.

Таким образом, теорема Имри и Ма несправедлива при любой сколь угодно слабой эффективной анизотропии типа „легкая ось“, индуцированной случайными осями анизотропии дефектов. В случае сильно анизотропных распределений случайных легких осей, создающих глобальную анизотропию типа „легкая ось“, состояние Имри–Ма не реализуется во всем возможном диапазоне концентраций дефектов $x < 1$.

Для слабо анизотропных распределений случайных локальных легких осей условие $K_{\text{eff}} < K_{\text{cr}}$ дает ограничение снизу на концентрацию дефектов, при которой наблюдается неупорядоченное состояние Имри–Ма [5].

Характерная фазовая диаграмма системы приведена на рисунке.

7. Выводы

Анизотропное распределение направлений случайных легких осей дефектов индуцирует глобальную анизотропию типов „легкая ось“ либо „легкая плоскость“ в пространстве параметра порядка.

Теорема Имри и Ма, в которой утверждается, что в пространстве размерности $d < 4$ введение *сколь угодно малой* (выделено нами) концентрации дефектов типа „случайная локальная анизотропия“ в систему с непрерывной симметрией n-компонентного векторного параметра порядка ($O(n)$-модель) приводит к исчезновению дальнего порядка и появлению неоднородного состояния, несправедлива при возникновении глобальной анизотропии типа „легкая ось“, вызванной дефектами, призванными разрушить дальний порядок.

В случае слабо анизотропного распределения легких осей существует критическая концентрация дефектов, при превышении которой неоднородное состояние Имри–Ма может существовать как равновесное.

В случае сильно анизотропного распределения легких осей это состояние полностью подавляется, и состояние с дальним порядком реализуется для всех концентраций дефектов.

Список литературы

[1] Y. Imry, S.-k. Ma. Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
[2] A.A. Fedorenko, F. Kuhnel. Phys. Rev. B **75**, 174206 (2007).
[3] G.E. Volovik. J. Low Temp. Phys. **150**, 453 (2008).
[4] И.А. Фомин. Письма в ЖЭТФ **85**, 533 (2007).
[5] А.А. Берзин, А.И. Морозов, А.С. Сигов. ФТТ **58**, 1947 (2016).
[6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982). 624 с.
[7] А.А. Берзин, А.И. Морозов, А.С. Сигов. ФТТ **58**, 1783 (2016).
[8] А.И. Морозов, А.С. Сигов. Письма в ЖЭТФ **90**, 818 (2009).