

# 13 Неустойчивость трубчатого электронного пучка, движущегося над диэлектрическим цилиндром

© Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,  
61085 Харьков, Украина  
e-mail: yuriyaverkov@gmail.com

(Поступило в Редакцию 28 июля 2016 г. В окончательной редакции 4 апреля 2017 г.)

Теоретически изучен механизм взаимодействия собственных волн диэлектрического цилиндра с нерелятивистским трубчатым электронным пучком, движущимся над его поверхностью. Получено дисперсионное уравнение связанных волн электронов пучка и диэлектрического цилиндра. Сформулированы условия их неустойчивости и найдены инкременты. Анализ дисперсионного уравнения и выражений для инкрементов показывает, что наиболее эффективно возбуждаются волны электрического типа с большими азимутальными индексами при малых величинах зазора между пучком и цилиндром.

DOI: 10.21883/JTF.2017.10.45003.2015

## Введение

При взаимодействии электронного пучка с различными электродинамическими структурами возникают неустойчивости электромагнитных волн. В основе механизмов неустойчивостей лежат эффекты Вавилова–Черенкова, циклотронного излучения и Доплера [1–4]. Наиболее полное и последовательное изложение эффектов взаимодействия потоков заряженных частиц с плазменными средами различных конфигураций представлено в [3]. В частности, в [3,4] приведены результаты исследований плазменных релятивистских генераторов и усилителей, в которых трубчатый электронный поток транспортируется над трубчатым плазменным цилиндром, расположенным в соосном внешнем магнитном поле. В работе [5] было экспериментально обнаружено излучение электромагнитных волн системой, в которой многоструйный поток электронов пролетает над диэлектрическим цилиндром. Для понимания механизма генерирования, безусловно, заслуживает внимания теоретическое исследование взаимодействия трубчатого потока электронов с диэлектрическим цилиндром. Этой теме и посвящается настоящая работа. Предполагается, что в азимутальном направлении поток частиц является сплошным. Мы показываем, что в такой системе возникает неустойчивость объемно-поверхностных электромагнитных волн, обусловленная черенковским механизмом взаимодействия электромагнитного поля и заряженных частиц. Найдены инкременты неустойчивости.

## Постановка задачи, основные уравнения и граничные условия

Пусть диэлектрический цилиндр с радиусом  $\rho_0$  занимает область пространства  $0 \leq \rho \leq \rho_0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и  $-\infty \leq z \leq +\infty$  (рис. 1). Цилиндр изготовлен из

изотропного немагнитного материала, диэлектрическая проницаемость которого равна  $\epsilon$ . На расстоянии  $\rho_b$  от оси цилиндра в вакууме транспортируется трубчатый поток электронов с радиальной толщиной  $a$  и плотностью  $N_0(\rho)$ . Электроны движутся со скоростью  $v_0$ . Предполагается, что заряд электронов компенсируется положительным фоном заряженных частиц, а толщина потока  $a$  мала по сравнению с другими пространственными масштабами электродинамической системы. Следовательно, равновесную плотность электронов в трубчатом пучке можно представить в виде  $N_0(\rho) = N_0 a \delta(\rho - \rho_b)$ , где  $N_0$  — равновесная концентрация электронов пучка,  $\delta(\rho - \rho_b)$  — дельта-функция Дирака. В линейаризованном виде плотность тока пучка в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = eN_0(\rho)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{v}_0N(\mathbf{r}, t),$$

где  $e$  — заряд электрона,  $N(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — переменные составляющие плотности и скорости электронов пучка,  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_z$  ( $\mathbf{e}_z$  — орт оси  $Z$ ). В дальнейшем радиальную компоненту плотности тока пучка полагаем равной нулю в силу выбранной модели бесконечно тонкого пучка.

Система уравнений, описывающая взаимодействие электронного пучка с собственными колебаниями диэлектрического цилиндра, представляет собой уравнения Максвелла, дополненные линейаризованными уравне-



Рис. 1. Электродинамическая система. 1 — диэлектрический цилиндр, 2 — трубчатый электронный пучок.

ниями непрерывности и движения для электронов пучка:

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi eN(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (4)$$

$$e \frac{\partial N(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] \right),$$

где  $m$  — масса электрона,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  — напряженность магнитного поля, вектор индукции электрического поля  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  связан с вектором напряженности  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  материальным уравнением  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ .

Для нахождения дисперсионного уравнения колебаний в рассматриваемой системе необходимо воспользоваться следующими граничными условиями для электрических и магнитных полей при  $\rho = \rho_0$  и  $\rho = \rho_b$ :

— при  $\rho = \rho_0$  непрерывны тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей,

— при  $\rho = \rho_b$  непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля, а тангенциальные составляющие магнитного поля и нормальная компонента электрической индукции поля терпят разрывы, вызванные возмущенным током и зарядом пучка соответственно.

Условия разрывов тангенциальных компонент магнитного поля ( $H_\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $H_z(\mathbf{r}, t)$ ) и нормальной компоненты электрической индукции (в вакууме  $D_\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \equiv E_\rho(\mathbf{r}, t)$ ) получаются путем интегрирования (1) и (3) по бесконечно малой толщине пучка. Эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} H_\varphi(\mathbf{r}, t)|_{\rho=\rho_b+0} - H_\varphi(\mathbf{r}, t)|_{\rho=\rho_b-0} \\ = \frac{4\pi}{c\rho_b} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b-\Delta\rho}^{\rho_b+\Delta\rho} j_\varphi(\mathbf{r}, t) \rho d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_z(\mathbf{r}, t)|_{\rho=\rho_b+0} - H_z(\mathbf{r}, t)|_{\rho=\rho_b-0} \\ = -\frac{4\pi}{c} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b-\Delta\rho}^{\rho_b+\Delta\rho} j_z(\mathbf{r}, t) d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\rho(\mathbf{r}, t)|_{\rho=\rho_b+0} - E_\rho(\mathbf{r}, t)|_{\rho=\rho_b-0} \\ = \frac{4\pi e}{\rho_b} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_b-\Delta\rho}^{\rho_b+\Delta\rho} N(\mathbf{r}, t) \rho d\rho, \end{aligned}$$

где  $j_\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $j_z(\mathbf{r}, t)$  — азимутальная и аксиальная составляющие плотности тока пучка  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ .

Представим все переменные величины в виде набора пространственно-временных гармоник, например:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n(\rho, q_z, \omega) e^{i(q_z z + n\varphi - \omega t)} dq_z d\omega, \quad (5)$$

где  $\omega$ ,  $q_z$  и  $n$  — частота, продольное волновое число и номер пространственной гармоники (совпадающий с азимутальным модовым индексом) волны соответственно.

С учетом представлений переменных величин в виде пространственно-временных гармоник (подобно (5)) исходные уравнения (1)–(4) вне электронного пучка ( $\rho \neq \rho_b$ ) для аксиальных спектральных составляющих поля приобретают вид

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( q_v^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right] \begin{cases} E_{zn}(\rho, q_z, \omega) \\ H_{zn}(\rho, q_z, \omega) \end{cases} = 0, \quad (6)$$

где  $v = 1, 2$ ;  $q_v^2 = \epsilon_v \omega^2 / c^2 - q_z^2$  — квадрат поперечного волнового числа электромагнитных волн,  $\epsilon_1 = \epsilon$  (цилиндр) и  $\epsilon_2 = 1$  (вакуум). Когда  $q_v^2 > 0$ , выражения (6) имеют вид уравнений Бесселя, а при  $q_v^2 < 0$  — модифицированных уравнений Бесселя. Рассмотрим случай  $q_2^2 < 0$ , поскольку, как будет позже показано, для волн, создаваемых заряженными частицами, имеем  $q_z = \omega / v_0$  и  $\omega^2 / c^2 \ll q_z^2$ , так как  $v_0 \ll c$ . Следовательно, вне трубчатого электронного пучка спектральные составляющие электромагнитного поля  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  имеют вид

$$\begin{aligned} E_{zn}(\rho, q_z, \omega) = \\ \begin{cases} \begin{cases} A_n^E J_n(q_1 \rho), & q_1^2 > 0, \\ A_n^E I_n(|q_1| \rho), & q_1^2 < 0, \end{cases} & \rho \leq \rho_0, \\ \begin{cases} B_n^E K_n(|q_2| \rho) + C_n^E I_n(|q_2| \rho), \\ D_n^E K_n(|q_2| \rho), \end{cases} & \rho_0 < \rho < \rho_b, \\ & \rho > \rho_b, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{zn}(\rho, q_z, \omega) = \\ \begin{cases} \begin{cases} A_n^H J_n(q_1 \rho), & q_1^2 > 0, \\ A_n^H I_n(|q_1| \rho), & q_1^2 < 0, \end{cases} & \rho \leq \rho_0, \\ \begin{cases} B_n^H K_n(|q_2| \rho) + C_n^H I_n(|q_2| \rho), \\ D_n^H K_n(|q_2| \rho), \end{cases} & \rho_0 < \rho < \rho_b, \\ & \rho > \rho_b, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $J_n(u)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода и одноименные модифицированные функции первого рода —  $I_n(u)$  (функция Инфельда) и второго рода —  $K_n(u)$  (функция Макдональда) [6];  $A_n^{E,H}$ ,  $B_n^{E,H}$ ,  $C_n^{E,H}$  и  $D_n^{E,H}$  — произвольные постоянные. Выбор решения обусловлен выполнением условий конечности величин  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  при  $\rho \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow \infty$ . Можно показать, что при  $v_0 < c/\sqrt{\epsilon}$  выражения для  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ - и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ -компонент поля внутри цилиндра описываются модифицированными функциями Бесселя 1-го рода, а при  $v_0 > c/\sqrt{\epsilon}$  — функциями

Бесселя. В дальнейшем мы рассмотрим случай, когда  $v_0 > c/\sqrt{\varepsilon}$  (условие эффекта Вавилова–Черенкова). Остальные фурье-компоненты электромагнитных полей в области цилиндра ( $\rho < \rho_0$ ), зазора ( $\rho_0 < \rho < \rho_b$ ) и за пучком ( $\rho > \rho_0$ ) выражаем с помощью уравнений Максвелла через величины  $E_{zn}(\rho, q_z, \omega)$  и  $H_{zn}(\rho, q_z, \omega)$ .

Полагая пучок нерелятивистским и удовлетворяя указанным ранее граничным условиям на поверхности цилиндра и электронного пучка, получим следующее дисперсионное уравнение для связанных колебаний диэлектрического цилиндра и пучка:

$$\Delta(\omega - q_z v_0)^2 = \Omega^2(n^2 + q_z^2 \rho_b^2) K_n^2(|q_z| \rho_b) \times \left( \Delta \frac{I_n(|q_z| \rho_b)}{K_n(|q_z| \rho_b)} - \Delta_1 \frac{I_n(|q_z| \rho_0)}{K_n(|q_z| \rho_0)} \right), \quad (7)$$

где  $\Omega^2 = \omega_b^2 a / \rho_b$ ,  $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 N_0 / m}$  — плазменная частота электронов пучка;

$$\Delta = \Delta_0 - \Delta^E \Delta^H; \quad \Delta_0 = \left[ \frac{n\omega(\varepsilon - 1)}{q_z q_1^2 \rho_0^2 c} \right]^2;$$

$$\Delta^E = \frac{1}{|q_z| \rho_0} \frac{K_n'(|q_z| \rho_0)}{K_n(|q_z| \rho_0)} + \frac{\varepsilon}{q_1 \rho_0} \frac{J_n'(q_1 \rho_0)}{J_n(q_1 \rho_0)};$$

$$\Delta^H = \frac{1}{|q_z| \rho_0} \frac{K_n'(|q_z| \rho_0)}{K_n(|q_z| \rho_0)} + \frac{1}{q_1 \rho_0} \frac{J_n'(q_1 \rho_0)}{J_n(q_1 \rho_0)};$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 - \left( \frac{1}{|q_z| \rho_0} \frac{I_n'(|q_z| \rho_0)}{I_n(|q_z| \rho_0)} + \frac{\varepsilon}{q_1 \rho_0} \frac{J_n'(q_1 \rho_0)}{J_n(q_1 \rho_0)} \right) \Delta^H.$$

В отсутствие электронного пучка ( $\Omega = 0$ ) выражение (7) представляет собой дисперсионное уравнение объемно-поверхностных волн в диэлектрическом цилиндре. В случае изотропного плазменного цилиндра (при отсутствии внешнего магнитного поля), когда  $q_1^2 < 0$ , выражение (7) представляет собой дисперсионное уравнение поверхностных волн. Для симметричных волн ( $n = 0$ )  $E$ -типа оно принимает вид, приведенный в книгах [3,4].

В настоящей работе рассматривается взаимодействие движущихся заряженных частиц и объемно-поверхностных волн диэлектрического цилиндра.

При  $\rho_0 = \rho_b$  и  $v_0 = 0$  формула (7) имеет вид дисперсионного уравнения диэлектрического цилиндра с  $2D$ -плазменным слоем на его боковой поверхности и при  $c \rightarrow \infty$  это уравнение приведено в [7–10]. В случае отсутствия диэлектрического волновода ( $\varepsilon = 1$ ) и  $v_0 = 0$  уравнение (7) при  $c \rightarrow \infty$  принимает вид дисперсионного уравнения „нанотрубки“ [11].

Для пучка электронов с малой плотностью решениями уравнения (7) являются точки пересечения прямой  $\omega = q_z v_0$  и дисперсионных кривых диэлектрического цилиндра  $\Delta = 0$ , имеющие координаты  $(q_{zns}, \omega_{ns})$ , где  $n$  и  $s$  — азимутальный и радиальный индексы. При этом квадраты поперечных волновых чисел имеют значения  $q_1^2 = \omega_{ns}(\varepsilon\beta^2 - 1)/v_0^2$ , где  $\beta = v_0/c$ . В цилиндре существуют собственные гибридные НЕ ( $E$ -типа)- и

ЕН ( $H$ -типа)-колебания [12]. При прохождении пучка моноэнергетических электронов вблизи поверхности диэлектрического цилиндра электроны потока, находящиеся в фазе с собственной волной цилиндра, для которых  $q_z v_0 \approx \omega_{ns}$ , могут раскачивать колебания НЕ- и ЕН-ветвей. При этом каждая резонансная частица пучка возбуждает собственные колебания цилиндра независимо. Можно показать, что инкременты неустойчивости для НЕ-волн больше, чем для ЕН-волн.

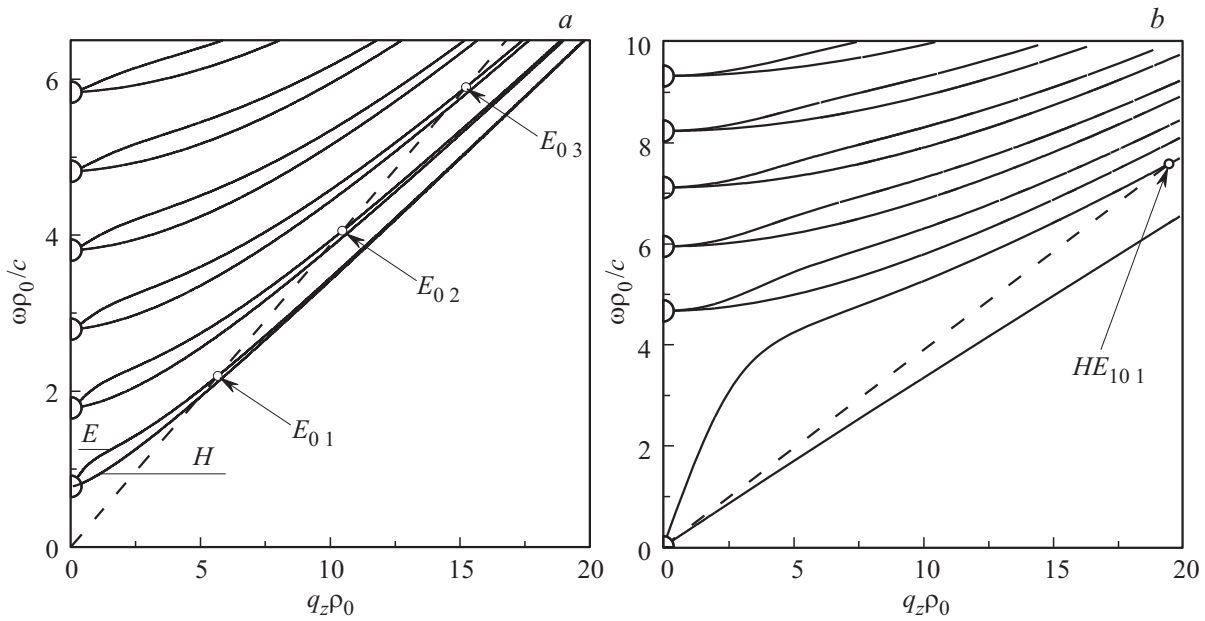
Положим  $\omega = \omega_{ns} + \delta\omega$ , где  $\omega_{ns} = q_{zns} v_0$  и  $|\delta\omega/\omega_{ns}| \ll 1$  [13]. Подставив  $\omega = \omega_{ns} + \delta\omega$  в дисперсионное уравнение (7) и пренебрегая малыми порядками  $O[(\delta\omega)^4]$ , получим следующее кубическое уравнение относительно  $\delta\omega$ :

$$(\delta\omega)^3 = \Omega^2(n^2 + q_{zns}^2 \rho_b^2) K_n^2(|q_{zns}| \rho_b) \times \frac{I_n(|q_{zns}| \rho_0)}{K_n(|q_{zns}| \rho_0)} \Delta_1 \Big|_{\omega=\omega_{ns}} \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{ns}} \right)^{-1}.$$

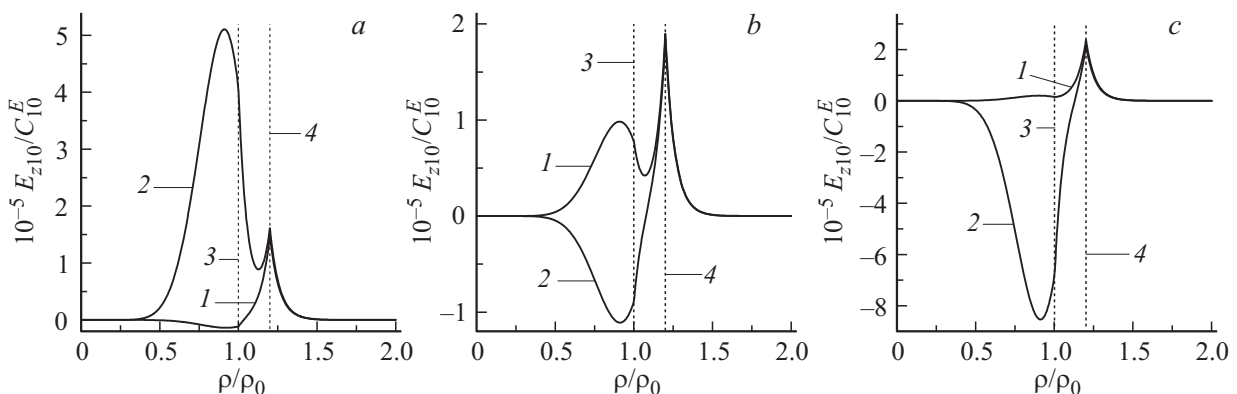
Отсюда следует, что при резонансе частота одной из связанных волн увеличивается относительно  $\omega_{ns}$  на величину  $\text{Re } \delta\omega = |\delta\omega|^{1/3}$ , а ее фазовая скорость  $(\omega_{ns} + |\delta\omega|^{1/3})/q_{zns}$  превышает скорость электронов пучка. В системе осуществляется устойчивое взаимодействие волн электронов пучка и собственной волны цилиндра. В результате возникает быстрая (высокочастотная) связанная волна. Частоты двух других связанных волн уменьшаются на величину  $\text{Re } \delta\omega = |\delta\omega|^{1/3}/2$ , а их фазовые скорости  $(\omega_{ns} - |\delta\omega|^{1/3}/2)/q_{zns} < v_0$ . Эти волны являются медленными (низкочастотными) относительно скорости электронов. Одна из этих двух волн характеризуется положительной мнимой добавкой к частоте  $\text{Im } \delta\omega = \sqrt{3}|\delta\omega|^{1/3}/2$  и, следовательно, является неустойчивой во времени — амплитуда этой волны, согласно (5), растет экспоненциально. При этом амплитуда другой волны экспоненциально убывает. На диаграмме  $\omega(q_z)$  области неустойчивости отображаются в виде разрывов дисперсионных ветвей взаимодействующих волн. Поскольку инкремент возбуждаемых волн пропорционален  $N_0^{1/3}$ , возбуждение волн резонансными частицами пучка осуществляется когерентно [13].

## Численный анализ дисперсионного уравнения и распределений полей связанных волн

Заслуживает внимания численный анализ дисперсионного уравнения (7). В качестве материала диэлектрического цилиндра выберем поликор с  $\varepsilon = 9.6$ , а радиус цилиндра  $\rho_0 = 1$  см. Радиус трубчатого электронного пучка  $\rho_b = 1.2$  см. Значения равновесной концентрации электронов пучка  $N_0$ , толщины стенки пучка  $a$  и скорости направленного движения электронов пучка  $v_0$  выберем следующими:  $N_0 = 5.9 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a = 0.05$  см и  $v_0 = 0.387c$  соответственно.



**Рис. 2.** Черенковское взаимодействие электронного пучка с собственными симметричными (а) и несимметричными (b) модами диэлектрического цилиндра.



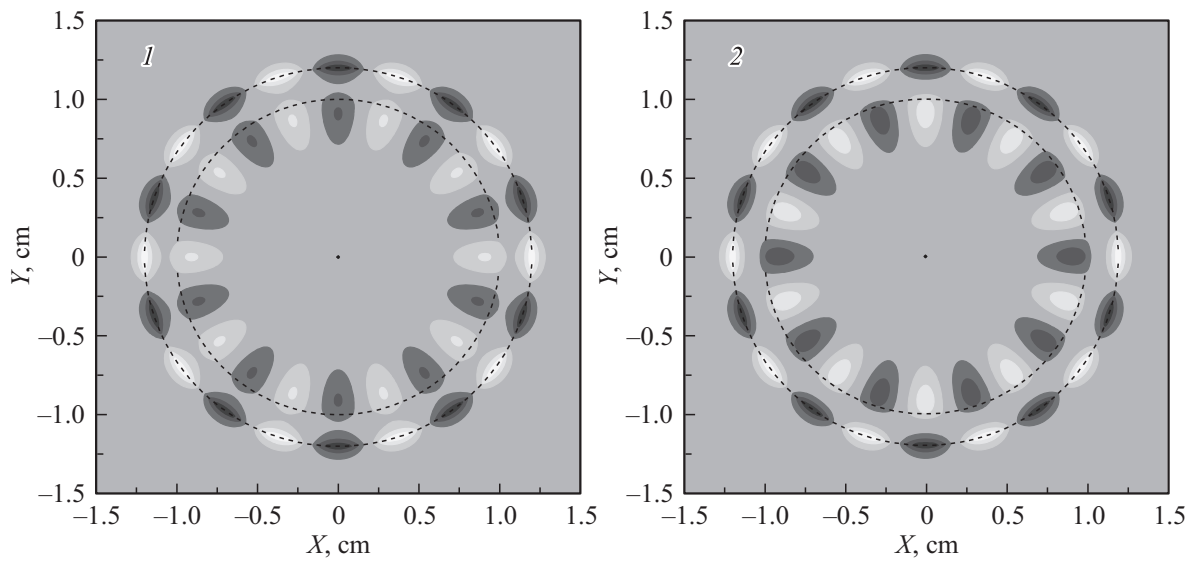
**Рис. 3.** Радиальное распределение  $E_{z101}$ -компонент полей волны электрона пучка (1) и собственной  $HE_{101}$ -моды цилиндра (2) в областях: а —  $q_z < q_{z101}$ ; б —  $q_z = q_{z101}$ ; в —  $q_z > q_{z101}$ . 3 —  $\rho = \rho_0$  (поверхность цилиндра), 4 —  $\rho = \rho_b$  (поверхность пучка).

На рис. 2 приведены дисперсионные зависимости собственных симметричных ( $n = 0$ ) и несимметричных ( $n \neq 0$ ) мод диэлектрического цилиндра, представляющие решения уравнения  $\Delta = 0$ . Штриховая прямая соответствует частотам волны электрона  $\omega = q_z v_0$ .

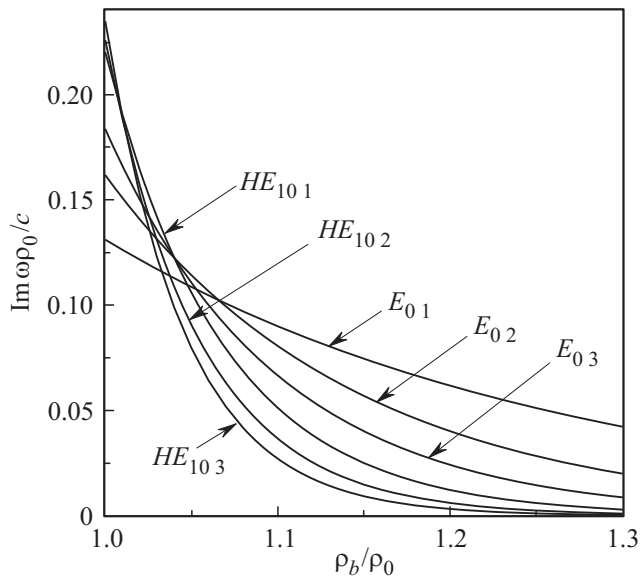
Из рис. 2, а видно, что нижние границы частотных спектров симметричных мод цилиндра, отличающихся радиальным индексом  $s$ , определяются частотами отсечек при  $q_z = 0$ . Из каждой точки начал спектров выходит пара дисперсионных кривых. Нижние кривые в таких парах соответствуют  $H$ -волнам, спектр которых получается из решения дисперсионного уравнения  $\Delta^H = 0$ , а верхние кривые —  $E$ -волнам, которые являются решениями уравнения  $\Delta^E = 0$ . Отметим, что при  $n = 0$  дисперсионное уравнение  $\Delta = 0$  распадается на два независимых уравнения  $\Delta^E = 0$  и  $\Delta^H = 0$ . Радиальный

модовый индекс  $s$  определяется порядковым номером корня соответствующего дисперсионного уравнения и соответствует количеству вариаций поля вдоль радиальной координаты [12]. Составляющие электромагнитного поля  $E$ -волн имеют три компоненты —  $E_{\rho ns}$ ,  $H_{\phi ns}$  и  $E_{z ns}$ , а  $H$ -волн —  $H_{\rho ns}$ ,  $E_{\phi ns}$  и  $H_{z ns}$ .

На рис. 2, б представлены дисперсионные зависимости собственных мод цилиндра с азимутальным индексом  $n = 10$ . Такие моды относятся к модам „шепчущей галереи“, представляющим большой практический интерес [12]. Отметим, что электромагнитные поля несимметричных мод цилиндра содержат все шесть компонент, за исключением аксиально-однородных мод, у которых  $q_z = 0$ . Нижние ветви каждой пары дисперсионных зависимостей цилиндра, которые объединены частотой отсечки, соответствуют частотам собственных



**Рис. 4.** Распределение аксиальной компоненты поля волны электрона пучка (1) и HE<sub>101</sub>-моды цилиндра (2) при резонансном взаимодействии.



**Рис. 5.** Зависимости инкрементов медленных (низкочастотных) связанных волн от относительного прицельного расстояния.

EH<sub>10s</sub>-мод (т.е. мод *H*-типа), а верхние — HE<sub>10s</sub>-мод (*E*-типа). (Мы используем классификацию мод, принятую в работе [12].) Из рисунка видно, что при  $q_z = 0$  частота отсечки спектров EH<sub>101</sub>- и HE<sub>101</sub>-мод равна нулю.

Особый интерес представляют точки пересечения прямой  $\omega\rho_0/c = q_z\beta\rho_0$  (т.е.  $\omega = q_z v_0$ ) с ветвями собственных мод цилиндра (рис. 2). В этих точках выполняется условие фазового синхронизма (эффект Вавилова—Черенкова). Это приводит к возникновению неустойчивости в системе и нарастанию во времени

амплитуд связанных волн. Резонансное взаимодействие частиц пучка с собственными модами цилиндра обоих типов приводит к „разрывам“ дисперсионных кривых взаимодействующих волн, сопровождающимся смещениями резонансных частот. При взаимодействии волн электронов пучка с симметричными модами цилиндра связанные волны возникают только при взаимодействии с собственными  $E_{0s}$ -волнами (т.е. с модами *E*-типа). Поскольку при  $n > 0$  поля всех собственных мод цилиндра имеют отличные от нуля  $E_{zns}$ -компоненты, моды как *E*-, так и *H*-типа будут взаимодействовать с волнами электронов пучка, в результате чего в системе формируются связанные волны. С одной стороны, в областях взаимодействия частиц пучка с модами цилиндра возникают устойчивые ( $\text{Im } \delta\omega = 0$ ) быстрые (высокочастотные) связанные волны. В области малых волновых чисел ( $q_z < q_{zns}$ ) дисперсионная ветвь быстрой связанной волны соответствует собственной моде цилиндра, а в области  $q_z > q_{zns}$  — волне заряженной частицы пучка. С физической точки зрения данный эффект обусловлен перераспределением энергии электромагнитного поля между взаимодействующими волнами. С другой стороны, в системе в областях резонансного взаимодействия частиц пучка и собственных мод цилиндра возникают попарно медленные (низкочастотные) связанные волны, у которых  $\text{Im } \delta\omega \neq 0$ . Как отмечено выше, одна из них является затухающей во времени, а другая — нарастающей. В области волновых чисел  $q_z < q_{zns}$  дисперсионная ветвь медленной связанной волны соответствует волне электрона пучка, а в области  $q_z > q_{zns}$  — собственной моде цилиндра. Естественно, с ростом амплитуд медленных связанных волн проявляются нелинейные эффекты, которые приводят к установлению стационарного режима.

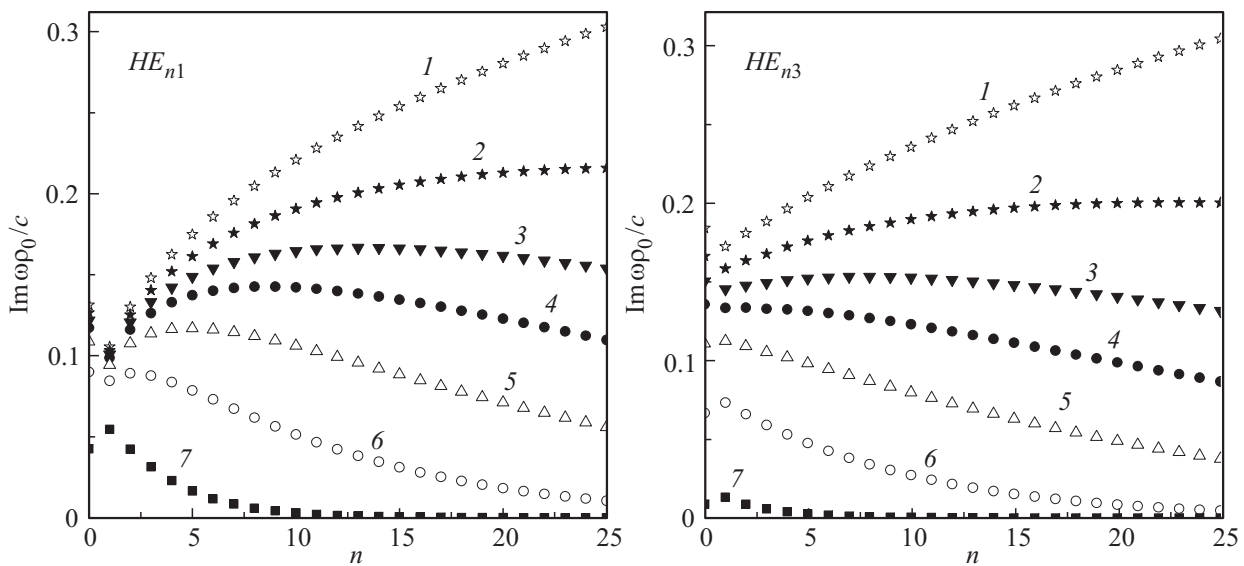


Рис. 6. Инкременты  $HE_{n1}$ - и  $HE_{n3}$ -мод при различных относительных прицельных расстояниях между пучком и цилиндром:  $\rho_b/\rho_0 = 1$  (1), 1.01 (2), 1.02 (3), 1.03 (4), 1.05 (5), 1.1 (6), 1.3 (7).

На рис. 3 приведены распределения  $E_{z101}$ -компонент электромагнитных полей вдоль радиальной координаты в исследуемой электродинамической системе для взаимодействующих волн, которые имеют одинаковые аксиальные волновые числа, но разные частоты в соответствии с дисперсионными зависимостями. Распределения приведены вблизи области резонансного взаимодействия ( $q_z < q_{z101}$  и  $q_z > q_{z101}$ ) и непосредственно в ней ( $q_z = q_{z101}$ ). Величины  $E_{z101}$ -компонент полей нормированы на постоянную  $C_{10}^E$ , являющуюся произвольной в рамках задачи на собственные значения системы. Из рисунка видно, что вдали от резонансного взаимодействия электромагнитное поле сосредоточено внутри цилиндра вблизи его боковой поверхности и соответствует распределению поля собственной  $HE_{101}$ -моды цилиндра. В области резонансного взаимодействия возникает связанная волна. При этом распределения полей взаимодействующих волн практически равнозначны. Электромагнитное поле сосредоточено на пучке и внутри цилиндра (рис. 4). На рис. 4 приведена топология распределений полей взаимодействующих волн в плоскости поперечного сечения рассматриваемой системы при черенковском резонансе. Значения величин  $E_{z101}$  представлены уровней градацией белого и черного цветов. Черный и белый цвета соответствуют максимальным значениям поля, сдвинутым по фазе на  $\pi$ .

### Численный анализ инкрементов неустойчивости связанных волн

Инкременты неустойчивости связанных волн, как было отмечено выше, оцениваются в точках пересечения дисперсионных кривых собственных мод диэлектрического цилиндра и волны электрона пучка.

На рис. 5 приведены зависимости безразмерного инкремента  $\text{Im } \omega\rho_0/c$  (т.е.  $\text{Im } \omega$ , где  $\omega = \omega_{ns} + \delta\omega$ ), взаимодействующих с электронами пучка симметричных  $E_{0s}$ - и несимметричных  $HE_{10s}$ -мод, у которых радиальный индекс  $s = 1, 2, 3$ , от относительного прицельного расстояния  $\rho_b/\rho_0$  между пучком и цилиндром.

Отметим особенности, отображенные на рисунке. Во-первых, все зависимости являются монотонно убывающими. Во-вторых, при  $\rho_b/\rho_0 = 1$  (пучок транспортируется вдоль боковой поверхности цилиндра) наибольшим инкрементом обладает  $HE_{103}$ -мода, а наименьшим —  $E_{01}$ -мода. Более того, инкремент мод с одинаковыми азимутальными индексами растет с увеличением радиального индекса. При малом прицельном расстоянии ( $\rho_b/\rho_0 \rightarrow 1$ ) среди мод с одинаковыми радиальными индексами инкремент симметричной моды является наименьшим. В-третьих, при большом прицельном расстоянии (слабой связи) между пучком и цилиндром наибольшим значением инкремента обладает симметричная  $E_{01}$ -мода. Среди мод с одинаковыми азимутальными индексами наиболее неустойчивыми являются моды с радиальным индексом, равным единице.

На рис. 6 приведены инкременты  $HE_{n1}$ - и  $HE_{n3}$ -мод цилиндра в условиях резонансного взаимодействия с электронами пучка ( $\omega_{10s} = q_{z10s}v_0$ ) при различных расстояниях между пучком и цилиндром. Видно, что при транспортировке пучка вдоль поверхности цилиндра ( $\rho_b/\rho_0 = 1$ ) большим инкрементом обладают высшие азимутальные моды цилиндра. С увеличением прицельного расстояния  $\rho_b/\rho_0$  (уменьшением связи) между пучком и цилиндром проявляется оптимальный режим возбуждения связанной волны по максимальной неустойчивости системы. При этом азимутальный индекс собственной моды (при постоянстве радиально-

го индекса) цилиндра с максимальным инкрементом уменьшается. В режиме максимальной неустойчивости высшие моды по радиальному индексу  $s$  (но с одинаковыми индексами  $n$ ) цилиндра обладают меньшим инкрементом. Следовательно, в условиях черенковского резонанса выбором прицельного расстояния  $\rho_b/\rho_0$  можно осуществлять селекцию неустойчивой связанной волны системы. Кроме того, при приемлемых  $\rho_b/\rho_0$  в системе осуществляется неустойчивость слабозатухающих собственных мод „шепчущей галереи“ цилиндра, взаимодействующих с резонансными частицами трубчатого пучка. Отметим, численный анализ системы показал, что при одинаковых значениях  $n$  и  $s$  инкременты  $HE_{ns}$ -мод выше, чем  $EH_{ns}$ -мод. Это свидетельствует о наиболее эффективном взаимодействии резонансных частиц пучка с собственной модой цилиндра, у которой величина компоненты  $E_{zns}$  наибольшая.

Таким образом, наиболее эффективно возбуждаются связанные волны, соответствующие резонансному взаимодействию электронов трубчатого пучка с собственными модами цилиндра  $E$ -типа. Выбором прицельного расстояния  $\rho_b/\rho_0$  можно осуществлять селекцию возбуждаемой моды цилиндра, включая моду „шепчущей галереи“.

## Заключение

В настоящей работе теоретически изучена линейная стадия неустойчивости нерелятивистского трубчатого электронного пучка, движущегося в вакууме над поверхностью диэлектрического цилиндра. Получено дисперсионное уравнение связанных волн диэлектрического цилиндра и трубчатого электронного пучка и найдены инкременты неустойчивости. Проведен численный анализ полученного дисперсионного уравнения связанных волн цилиндра и волн заряженных частиц пучка и выражения для инкрементов неустойчивости. Построены распределения продольной компоненты электрического поля в системе цилиндр–пучок, соответствующие малым окрестностям областей взаимодействия волн. Показано, что наиболее эффективно возбуждаются связанные волны, соответствующие собственным модам  $E$ -типа диэлектрического цилиндра с большими азимутальными индексами при малом прицельном расстоянии между электронным пучком и поверхностью цилиндра.

## Список литературы

- [1] Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. Вып. 11. С. 1262–1269.
- [2] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
- [3] Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ электроника. М.: Изд-во. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 542 с.
- [4] Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. 4 / Под ред. акад. В.Е. Фортова. М.: Наука, 2000. 506 с.
- [5] Дормидонтов А.В., Кириченко А.Я., Лонин Ю.Ф., Пономарев А.Г., Прокопенко Ю.В., Сотников Г.В., Уваров В.Т., Филиппов Ю.Ф. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 2. С. 65–73.
- [6] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [7] Аверков Ю.О., Прокопенко Ю.В., Яковенко В.М. // Радиофизика и электроника. 2016. Т. 7 (21). Вып. 2. С. 28–35.
- [8] Дормидонтов А.В., Прокопенко Ю.В., Ханкина С.И., Яковенко В.М. // Радиофизика и электроника. 2014. Т. 5 (19). Вып. 4. С. 63–72.
- [9] Дормидонтов А.В., Прокопенко Ю.В., Яковенко В.М. // Радиофизика и электроника. 2015. Т. 6 (20). Вып. 4. С. 24–30.
- [10] Дормидонтов А.В., Прокопенко Ю.В., Ханкина С.И., Яковенко В.М. // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 7. С. 125–132.
- [11] Ведерников А.К., Говоров А.Д., Чаплик А.В. // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. Вып. 4 (10). С. 979–985.
- [12] Кириченко А.Я., Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф., Черпак Н.Т. Квазиоптические твердотельные резонаторы. Киев: Наукова думка, 2008. 286 с.
- [13] Электродинамика плазмы / Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 720 с.