

04  
**Слой пространственного заряда электрического зонда с учетом столкновений**

© В.И. Сысун, В.С. Игнахин

Петрозаводский государственный университет,  
 185910 Петрозаводск, Россия  
 e-mail: vsysun@psu.karelia.ru

(Поступило в Редакцию 5 декабря 2016 г.)

Рассмотрен слой пространственного заряда цилиндрического зонда при средних давлениях. Получено точное решение уравнения Пуассона в приближении сильного поля с учетом столкновений с атомами. Предложены аппроксимирующее выражение для слоя пространственного заряда в цилиндрической геометрии в приближении отсутствия столкновений, дающее ошибку до 1% при  $1 \leq \frac{r_{sh}}{r_p} \leq 200$ , и упрощенное аппроксимирующее выражение для слоя пространственного заряда для промежуточных давлений, удобное для практических расчетов.

DOI: 10.21883/JTF.2017.08.44737.2126

Зондовая диагностика плазмы является достаточно простой методикой определения ее параметров. Зачастую на практике удастся измерить только ионную и переходную части характеристики. Определение параметров плазмы по ионной ветви характеристики в сложных условиях (столкновения частиц, ионизация и рекомбинация в объеме и т.д.) требует выбора корректной теоретической модели, учитывающей соответствующие факторы. Одним из подходов для интерпретации ионной ветви и оценки величины области возмущения плазмы зондом является приближение слоя, когда возмущенная область разбивается на квазинейтральную плазму и слой пространственного заряда, в котором концентрации заряженных частиц сильно отличаются друг от друга. В плоском случае увеличение потенциала зонда приводит к росту толщины слоя, при этом ток на слой остается неизменным (ток насыщения). В более часто реализуемых на практике цилиндрическом и сферическом случаях рост слоя пространственного заряда приводит к увеличению собираемого ионного тока из квазинейтральной области за счет увеличения собирающей поверхности. При низких давлениях, когда толщина слоя много меньше длины свободного пробега ионов  $d \ll \lambda$ , слой можно рассчитывать по Ленгмюру, как для вакуумного диода [1–3]. Для толщины слоя решение уравнения Пуассона дает точное решение

$$d^2 = \frac{4\sqrt{2}\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{U_p^{3/2}}{j_p}. \quad (1)$$

Численные расчеты Ленгмюра для цилиндрического слоя можно аппроксимировать весьма близким в широком диапазоне значений  $\frac{r_{sh}}{r_p}$  аналитическим выражением

$$\frac{r_{sh}}{r_p} - 1 = \sqrt{\beta^2 + 0.1112} (\beta^2)^{0.9}, \quad (2)$$

где

$$\beta^2 = \frac{4\sqrt{2}\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{U_p^{3/2}}{j_p r_p^2}.$$

В табл. 1 приведены значения  $\frac{r_{sh}}{r_p}$ , полученные численным решением уравнения Пуассона [1] и аналитическим приближением (2).

Приближение (2) дает ошибку до 1% при  $1 \leq \frac{r_{sh}}{r_p} \leq 200$ , что точнее, чем полиномиальные разложения для  $\beta^2$  в виде ряда Маклорена по степеням  $\ln \frac{r_{sh}}{r_p}$ , предложенные в работах [1,2].

В противоположном случае  $d \gg \lambda_i$  слой рассчитывается в двух приближениях: режим сильного поля, когда скорость дрейфа ионов пропорциональна корню из напряженности электрического поля  $v \sim \sqrt{E}$  (аномальный дрейф), и режим слабого поля при  $v = \mu E$  (нормальный режим постоянной подвижности  $\mu$ ).

Режим слабого поля в слое может осуществляться при высоких давлениях. Решение уравнения Пуассона для плоской и цилиндрической геометрий соответственно имеют вид [4]:

$$d = \left( \frac{9\epsilon_0 \mu U_p^2}{8j_p} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$U_p^2 = \frac{j_p r_p}{\mu \epsilon_0} \left[ \frac{r_s}{2} \ln \frac{r_s + \sqrt{r_s^2 - r^2}}{r_s - \sqrt{r_s^2 - r^2}} - \sqrt{r_s^2 - r^2} \right]^2, \quad (3)$$

где  $r_s$  — радиус слоя в бесстолкновительном режиме.

Однако при высоких давлениях существенную роль играет диффузия и, как отмечено в [4], применение этих формул на практике приводит к существенным ошибкам.

Режим сильного поля осуществляется при средних давлениях, когда на длине пробега ион набирает скорость, превышающую тепловую. Решение для толщины слоя пространственного заряда получено только в плоской геометрии [4,5]

$$d = B \left( \frac{U_p^3 \lambda_i}{j_p^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{где } B = \frac{1}{3} \left( \frac{10^3 \epsilon_0^2 e}{\pi M} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4)$$

**Таблица 1.** Сравнение результатов, полученных численным решением уравнения Пуассона [1] и аналитическим приближением (2)

$\beta^2$	0.0098	0.0385	0.1485	0.8554	9.89	36.98	115.65	214.42	582	1175
$\frac{r_{sh}}{r_p}$ [1]	1.1	1.2	1.4	2.0	5.0	10.0	20	30	60	100
$\frac{r_{sh}}{r_p}$ (2)	1.101	1.202	1.405	2.015	5.025	9.97	19.81	29.7	59.6	100.2

**Таблица 2.** Сравнение результатов, полученных точным решением (12) и аналитическим приближением (13)

$U'$	0.001 670	0.052 308	0.16 194	0.6990	3.74 586	18.1069	49.894	127.86	215.359	310.133	409.96
$\frac{r_s}{r_p}$ (12)	1.1	1.2	1.4	2.0	4.0	10.0	20	40	60	80	100
$\frac{r_s}{r_p}$ (13)	1.105	1.204	1.41	2.029	4.07	10.07	19.95	39.76	59.75	79.91	100.17

Здесь  $M$  и  $\lambda_i$  — масса и длина пробега тока;  $j_p$ ,  $U_p$  — плотность ионного тока на зонд и напряжение между зондом и границей слоя.

Для цилиндрического и сферического слоев аналитическое решение отсутствует и в [6] предлагается приближенная оценка:

$$\frac{r_s}{r_p} \approx \left(1 + \frac{d}{r_p}\right) \left(1 + \alpha \frac{d}{r_p}\right), \quad (5)$$

где  $\alpha = 0$  — для плоского,  $\alpha = 0.05$  — для цилиндрического и  $\alpha = 0.075$  — для сферического слоев.

В настоящей работе получено точное решение уравнения Пуассона для слоя пространственного заряда в режиме сильного поля цилиндрического зонда, наиболее часто применяемого на практике. Запишем уравнение Пуассона для цилиндрической геометрии

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{j_p r_p}{\epsilon_0 \nu r}. \quad (6)$$

Здесь  $j_p$  — плотность ионного тока на зонд,  $\nu$  — дрейфовая скорость ионов.

Согласно [7], в сильных полях

$$\nu = \sqrt{\frac{2e\lambda_i E}{\pi M}} = K\sqrt{E}. \quad (7)$$

Подставив значение скорости в (6), будем иметь

$$\left( r \frac{dU}{dr} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{j_p r_p r^{1/2}}{K \epsilon_0}, \quad (8)$$

$$\left( r \frac{dU}{dr} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{j_p r_p}{K \epsilon_0} (r_s^{3/2} - r^{3/2}). \quad (9)$$

При интегрировании в (8) использовано условие равенства нулю напряженности поля на границе слоя. Выделяя  $\frac{dU}{dr}$  в (9) и интегрируя при начальных условиях  $r = r_s$ ,  $U = 0$ , получим

$$U = -\left( \frac{j_p r_p}{\epsilon_0 K} \right)^{\frac{2}{3}} \int_r^{r_{layer}} \frac{(r_s^{3/2} - r^{3/2})^{\frac{2}{3}}}{r} dr. \quad (10)$$

Введем замену переменных

$$r_s^{3/2} - r^{3/2} = r_s^{3/2} y^3, \quad y = \frac{(r_s^{3/2} - r^{3/2})^{\frac{1}{3}}}{r_s^{1/2}}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{2y^2 dy}{y^3 - 1},$$

получим

$$U = -2r_s \left( \frac{j_p r_p}{\epsilon_0 K} \right)^{\frac{2}{3}} \int_0^y \frac{y^4 dy}{1 - y^3}. \quad (11)$$

Далее используем табличные значения интегралов [8]:

$$\int \frac{y^4 dy}{1 - y^3} = -\frac{y^2}{2} + \int \frac{y dy}{1 - y^3},$$

$$\int \frac{y dy}{1 - y^3} = -\frac{1}{6} \ln \frac{(1 - y)^2}{1 + y + y^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2y + 1}{\sqrt{3}}.$$

Интеграл в (11) будет равен

$$-\frac{y^2}{2} - \frac{1}{6} \ln \frac{(1 - y)^2}{1 + y + y^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2y + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Окончательно для напряжения на зонде получим

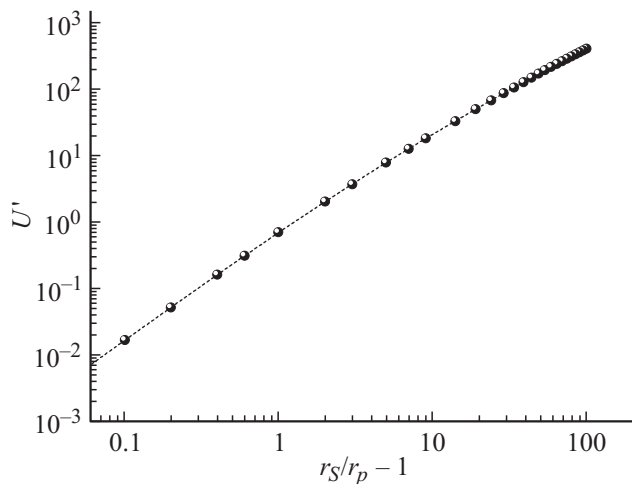
$$U_p = -\left( \frac{j_p}{\epsilon_0 K} \right)^{\frac{2}{3}} r_p^{5/3} \frac{r_s}{r_p} \times \left[ -y_p^2 - \frac{1}{3} \ln \frac{(1 - y_p)^2}{1 + y_p + y_p^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left( \frac{\sqrt{3} y_p}{2 + y_p} \right) \right],$$

$$y_p = \left[ 1 - \left( \frac{r_p}{r_s} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (12)$$

Результаты расчета по формуле (12) зависимости  $\frac{r_s}{r_p}$  от относительной величины

$$U' = -\frac{U_p}{r_p^{5/3} \left( \frac{j_p}{\epsilon_0 K} \right)^{\frac{2}{3}}}$$

приведены на рисунке и в табл. 2.



Результаты расчета по формуле (12)

В табл. 2 также приведены значения по аппроксимирующей формуле

$$\frac{r_s}{r_p} - 1 = \frac{U'^{0.6}}{0.865} + 0.138U' = \frac{d}{r_p} + 0.1084 \left( \frac{d}{r_p} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (13)$$

где  $d$  определяется по (4). Как видно из табл. 1, приближение (13) весьма точное для принятых значений  $\frac{r_s}{r_p} \leq 100$ . На рисунке кривые, рассчитанные по (12) и (13), неразличимы. Осуществим переход в (12) к плоской геометрии при  $r_s - r_p$ , т.е.  $y \ll 1$ .

Раскладывая логарифм и арктангенс в ряд при малых значениях  $y$  и ограничиваясь членами до  $y^5$  включительно, из (12) получается формула (4) при  $d = r_s - r_p$ .

Сравнивая полученные численным расчетом результаты с формулой (5), можно отметить, что коэффициент  $\alpha$  для цилиндрического слоя близок к 0.036 до  $\frac{r_s}{r_p} \leq 40$ . Однако более точные значения дает формула (13).

Приближения (12) и (13) применимы также для любых разрядных промежутков с носителями заряда одного знака при наличии столкновений с атомами.

Толщина слоя пространственного заряда уменьшается с увеличением зондового тока, определяемого концентрацией плазмы, и для слоя может выполняться режим промежуточных давлений  $d \sim \lambda_i$  даже при  $r_p \gg \lambda_i$ . В работе [9] для плоского слоя численно решалась система уравнений Пуассона и движения ионов. Полученные результаты аппроксимировались достаточно точным приближением

$$\frac{d}{d_L} \approx \left( 0.3 \frac{d_L}{\lambda_i} + 1 \right)^{-1/5}, \quad (14)$$

где  $d_L$  — толщина слоя по Ленгмюру (1). По сути формула (14) есть результат сложения обратных величин  $d_L$  и  $d_S$  в пятой степени

$$d^{-5} = d_L^{-5} + d_S^{-5}, \quad (15)$$

где  $d_S$  — толщина плоского слоя при средних давлениях (4). Для цилиндрического слоя такое же приближение

дает формула

$$\frac{r_{sh}}{r_p} - 1 = \left[ \left( \frac{r_{sh}}{r_p} - 1 \right)^{-5} + \left( \frac{r_S}{r_p} - 1 \right)^{-5} \right]^{-1/5}. \quad (16)$$

Здесь  $\frac{r_{sh}}{r_p} - 1$  и  $\frac{r_S}{r_p} - 1$  даются формулами (2) и (13).

## Список литературы

- [1] Langmuir I., Blodgett K.B. // Phys. Rev. 1923. Vol. 22. N 4. P. 347–357.
- [2] Беллюстин С.В. // ЖЭТФ. 1939. Т. 9. С. 840–856.
- [3] Сысун В.И., Игнахин В.С. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 7. С. 60–65.
- [4] Грановский В.Л. Электрический ток в газе: Установившийся ток. М.: Наука, 1971. 543 с.
- [5] Дроздов В.И. // ЖТФ. 1946. Т. 16. Вып. 16. С. 407–412.
- [6] Захарова В.М., Каган Ю.М., Мустафин К.С., Перель В.И. // ЖТФ. 1960. Т. 30. Вып. 4. С. 442–449.
- [7] Мак Даниель И., Мезон Э. Подвижность и диффузия ионов в газах / Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 422 с.
- [8] Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.-Л.: Гостехиздат, 1963. 462 с.
- [9] Сысун В.И. Зондовые методы диагностики плазмы. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского у-та, 1997. 60 с.