

01.3

## **Корреляционные характеристики фазовых и амплитудных химерных состояний в ансамбле нелокально связанных отображений**

© Т.Е. Вадивасова, Г.И. Стрелкова, С.А. Богомолов,  
В.С. Анищенко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 7 июля 2016 г.

С использованием коэффициента взаимной корреляции элементов ансамбля в виде кольца нелокально связанных хаотических отображений приводятся результаты расчета корреляционных характеристик химерных состояний. Впервые установлены количественные различия коэффициентов взаимной корреляции для фазовых и амплитудных химер.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.02.44189.16400

В настоящее время одной из важных научных проблем в мировой литературе является исследование так называемых химерных структур в ансамблях связанных идентичных осцилляторов [1–3]. Химерными структурами называют кластеры ограниченной части элементов ансамбля взаимосвязанных осцилляторов, в которых имеет место несинхронная (некогерентная) динамика. Вне химерного кластера элементы ансамбля характеризуются синхронной (когерентной) динамикой. Химерные структуры имеют четкие границы в ансамбле и являются достаточно устойчивыми [4–7]. С практической точки зрения интерес к химерным структурам обусловлен, в частности, установленным фактом реализации подобного эффекта в коре головного мозга человека и животных [8,9]. Следует отметить, что в работах по химерам в ансамблях различных осцилляторов описываются в основном качественные характеристики химерных состояний [3]. Количественные характеристики различных химерных состояний до сих пор практически не

рассматривались. Учитывая принципиальную важность количественной оценки свойств различных химерных структур, в настоящей работе предпринята такая попытка. В качестве количественной характеристики степени неупорядоченности колебаний в элементах химерных кластеров предлагаем использовать нормированный коэффициент взаимной корреляции (КВК) осцилляторов ансамбля. Как будет показано ниже, использование КВК позволяет не только дать количественную оценку химерных состояний, но и охарактеризовать отличительные особенности фазовых, амплитудных и перемежающихся химер.

В работе [4] впервые определены и описаны механизмы формирования фазовых и амплитудных химерных состояний в ансамбле нелокально связанных логистических отображений. Рассмотрим динамику одномерного замкнутого в кольцо ансамбля идентичных хаотических осцилляторов с нелокальной связью, заданного уравнением

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)], \quad (1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$  — порядковый номер осциллятора,  $N$  — число осцилляторов в ансамбле,  $t$  — дискретное время (номер итерации),  $P$  — число соседних осцилляторов слева и справа от  $i$ -го осциллятора,  $\sigma$  — коэффициент связи. Динамика всех осцилляторов описывается отображением вида  $f(x) = ax(1-x)$ . Осцилляторы исследовались при фиксированном значении параметра  $a = 3.8$ , что соответствует режиму развитого динамического хаоса в парциальной системе. Исследовался ансамбль из  $N = 1000$  элементов. Число соседей зададим равным  $P = 320$ , что отвечает радиусу связи  $r = P/N = 0.32$ .

Для анализа пространственной когерентности используем КВК различных элементов ансамбля. Будем рассматривать первый и  $i$ -й элементы в один и тот же момент времени. Для них КВК определяется по формуле

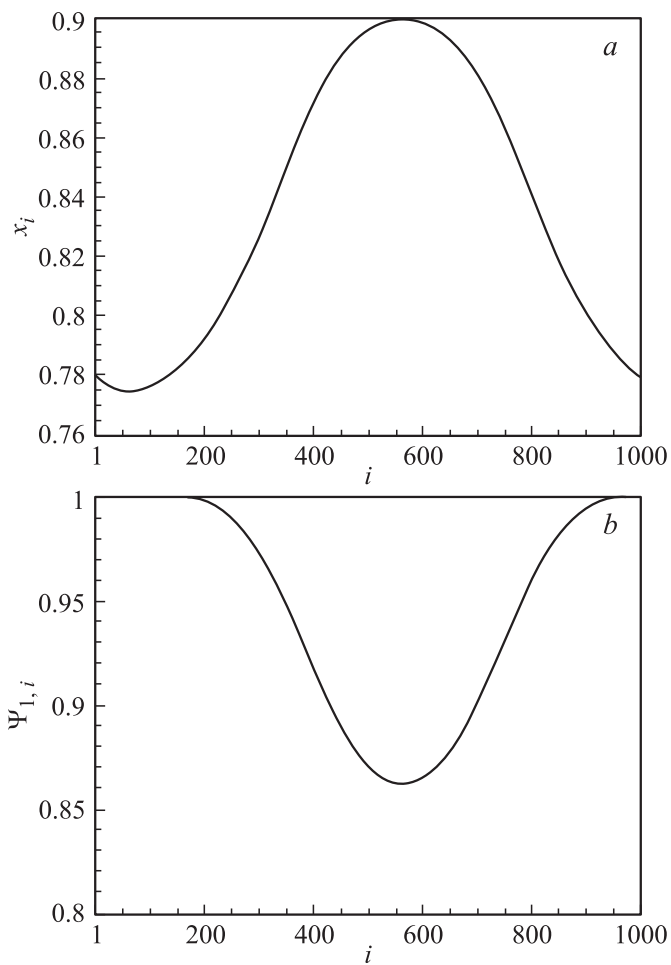
$$\Psi_{1,i} = \frac{\langle \tilde{x}_1(t) \tilde{x}_i(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_1^2(t) \rangle \langle \tilde{x}_i^2(t) \rangle}}, \quad (2)$$

где  $\tilde{x}(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$  — флуктуация относительно среднего значения. Скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по времени. В режиме хаотической динамики процесс колебаний характеризуется перемешиванием и является эргодическим. В этом случае усреднение по времени эквивалентно усреднению по ансамблю реализаций.

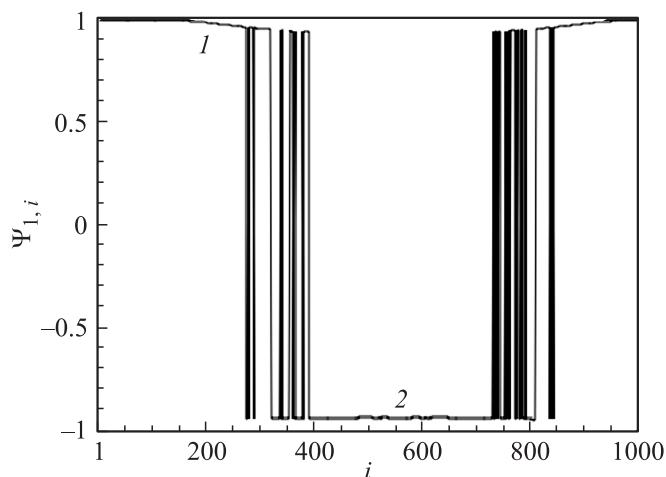
Проведем численный анализ динамики кольца (1) при вариации коэффициента связи  $0.1 < \sigma < 1.0$ . Реализующиеся характерные режимы и их бифуркации можно найти в работах [5–7]. Так, при  $0.63 \leq \sigma \leq 1$  имеет место полная хаотическая синхронизация всех элементов кольца, когда элементы совершают идентичные установившиеся колебания во времени вне зависимости от начальных условий. Расчеты показали, что этому режиму отвечает значение КВК  $\Psi_{1,i} \equiv 1$  для любого  $i = 2, 3, \dots, N$ .

В области  $0.51 < \sigma < 0.63$  нами обнаружен новый режим колебаний в ансамбле (1). Было известно, что при  $\sigma = 0.63$  имеет место бифуркация прорыва (blowout) потери устойчивости режима синхронного хаоса в ансамбле (1) [5]. При  $\sigma < 0.63$  динамика ансамбля (1) остается хаотической вплоть до  $\sigma = 0.51$ . Режиму в области  $0.51 < \sigma < 0.63$  отвечает мгновенный профиль амплитуд, который описывается гладкой функцией колоколообразного вида (рис. 1, *a*). Так как амплитуды колебаний соседних элементов отличаются мало, то в работе [5] этот режим считался режимом когерентности. Расчеты КВК в указанной области  $0.51 < \sigma < 0.63$  показали, что имеет место спад корреляций до значения  $\Psi_{1,i} \approx 0.85$  (рис. 1, *b*). Это свидетельствует о том, что рассматриваемый режим в строгом смысле нельзя считать когерентным. Мы предлагаем назвать данный режим режимом частичной хаотической синхронизации ансамбля, так как соседние осцилляторы имеют  $\Psi_{i,i+1} \approx 1.0$ , а с ростом расстояния между осцилляторами КВК уменьшается.

Рассмотрим режим фазовой химеры, который реализуется в ансамбле (1) в области  $0.25 < \sigma < 0.35$ . Механизм образования фазовой химеры детально описан в работах [4,7]. Результаты расчетов КВК (2) представлены на рис. 2. Области 1 и 2 соответствуют когерентным (синхронным) колебаниям элементов ансамбля с периодом 2. Однако колебания с периодом 2 в области 2 в сравнении с областями 1 сдвинуты по фазе на полпериода (на одну итерацию). В областях фазовой химеры (элементы кластеров между 1 и 2 и между 2 и 1 на рис. 2) имеет место случайное чередование синфазных и противифазных колебаний [4,7]. Из графика видно, что для кластеров фазовой химеры КВК случайно меняет значения от +1 к -1. При этом спада корреляций не наблюдается, а только смена знака КВК. Это естественно в силу того, что колебания имеют период 2, отличаются только сдвигом фазы и характеризуются идентичными спектрами мощности.

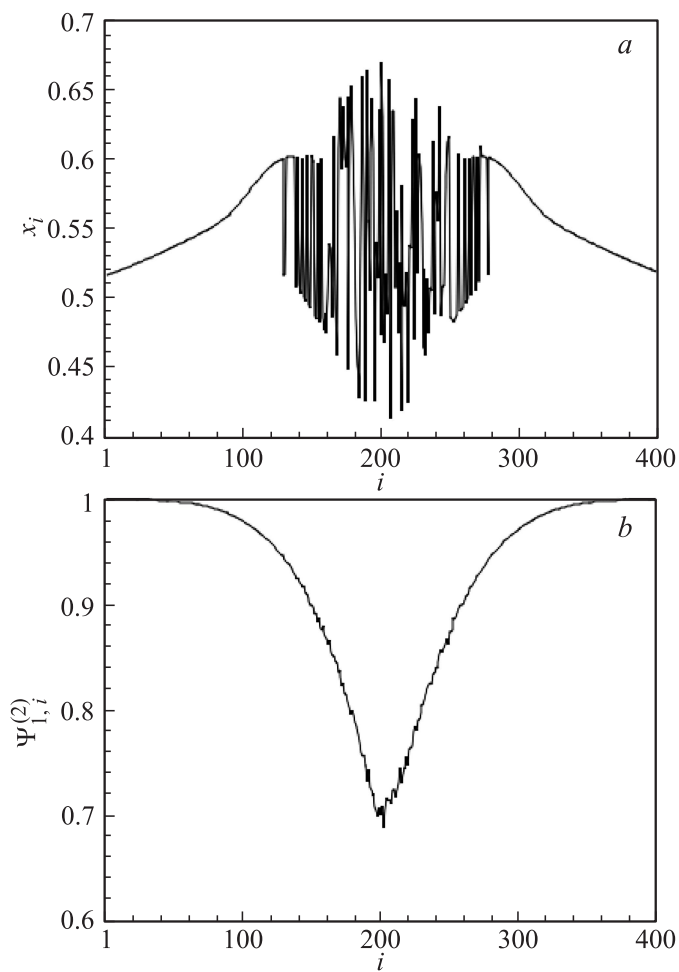


**Рис. 1.** Режим колебаний ансамбля (1) при  $\sigma = 0.55$ . Мгновенный пространственный профиль (амплитуды колебаний элементов при фиксированном времени  $t$ ) (a) и КВК (2) (b). Параметры системы (1):  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$ .



**Рис. 2.** Результаты расчета КВК  $\Psi_{1,i}$  в режиме фазовой химеры. Параметры системы (1):  $\sigma = 0.29$ ,  $r = 0.32$ ,  $a = 3.8$ ,  $N = 1000$ , начальные условия выбирались случайным образом.

Рассмотрим корреляционную характеристику амплитудной химеры, впервые описанной в [4]. В системе (1) амплитудные химеры наблюдаются для значений коэффициента связи  $\sigma < 0.3$  (при  $r = 0.32$ ). Их возникновение обусловлено заметным усилением режима хаотических колебаний элементов ансамбля в области химерного кластера [4,7]. На рис. 3 представлены результаты расчетов для данного режима. Рис. 3, *a* иллюстрирует область амплитудной химеры в кластере осцилляторов  $100 \leq i \leq 295$ . Наблюдается сильная хаотизация амплитуд осцилляторов в области указанного кластера. Колебания всех осцилляторов  $100 \leq i \leq 295$  являются хаотическими и асинхронными. В то же время соседние с химерным кластером осцилляторы  $i < 100$  и  $i > 295$  колеблются синхронно и периодически с периодом 2. На рис. 3, *b* представлены расчеты КВК для кластера амплитудной химеры. Колебания элементов амплитудной химеры представляют в фазовом пространстве двухтактное хаотическое множество, возникшее за счет хаотизации циклов периода 2. В связи с этим колебания включают периодическую и хаотическую компоненты. КВК  $\Psi_{1,i}^{(2)}$  (рис. 3, *b*) рас-



**Рис. 3.** Мгновенный пространственный профиль (а) и КВК  $\Psi_{1,i}^{(2)}$  (b) в кластере амплитудной химеры в системе (1) при значении  $\sigma = 0.28$  и  $r = 0.32$ .

считывался путем исключения периодической компоненты, что практически осуществлялось путем выборки каждой второй точки временной реализации  $x_i^t (t = 1, 3, 5, \dots)$ . Как видно из графика, в центре кластера

наблюдается максимальное уменьшение КВК:  $\Psi_{1,i} \approx 0.68$ . Это свидетельствует о том, что колебания осцилляторов в кластере амплитудной химеры некоррелированы и, следовательно, некогерентны. В отличие от фазовой химеры, амплитудная химера соответствует „настоящей“ некогерентности колебаний, которые являются некогерентными не только в пространстве, но и во времени.

При вариации параметров  $r$  и  $\sigma$  в системе (1) был обнаружен новый тип химерного состояния, который мы назвали „перемежающейся химерой“. В кластере осцилляторов в режиме перемежающейся химеры любой осциллятор характеризуется следующей особенностью: временная реализация колебаний содержит случайно чередующиеся интервалы времени, в которых колебания отвечают режимам фазовой или амплитудной химеры. При этом КВК для некоторых осцилляторов кластера перемежающейся химеры близок по модулю к 1, но имеются осцилляторы, для которых  $|\Psi_{1,i}| < 1$ .

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

Представлен анализ перехода от режима полной хаотической синхронизации к режиму частичной хаотической синхронизации (рис. 1), который в строгом смысле нельзя считать когерентным.

Установлено, что в режиме фазовой химеры (рис. 2) КВК по модулю близок к единице и меняет знак с „+“ на „-“ для элементов некогерентного кластера фазовой химеры, в которых колебания  $x_i^t$  отличаются случайным сдвигом во времени на одну итерацию. С точки зрения корреляционного анализа режим фазовой химеры не является в строгом смысле режимом отсутствия когерентности, хотя и характеризуется случайным распределением в пространстве сдвигов фазы колебаний парциальных элементов в „некогерентном“ кластере.

Выявлены различия корреляций для фазовых и амплитудных химер. Амплитудная химера (рис. 3) характеризуется тем, что КВК по модулю меньше 1 для всех элементов некогерентного кластера. Спад КВК для амплитудной химеры свидетельствует о том, что колебания различных элементов действительно некогерентны (несинхронны) и в полной мере соответствуют определению химерного состояния [1,2].

Установлено существование эффекта перемежаемости, который характеризуется случайным чередованием во времени колебаний  $x_i^t$  осциллятора с фиксированным номером  $i$ , отвечающих режиму фазовой и амплитудной химеры.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-12-10175).

## Список литературы

- [1] *Kuramoto Y., Battogtokh D.* // *Nonlin. Phen. Complex Sys.* 2002. V. 5. N 4. P. 380–385.
- [2] *Abrams D.M., Strogatz S.H.* // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. N 17. P. 174102.
- [3] *Abrams D.M., Strogatz S.H.* // *Int. J. Bif. Chaos.* 2006. V. 16. P. 21–37.
- [4] *Богомолов С.А., Стрелкова Г.И., Schöll E., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ.* 2016. Т. 42. В. 14. С. 103–110.
- [5] *Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P.* et al. // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 85. P. 026212.
- [6] *Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V.S.* // *Europhys. Lett.* 2015. V. 112. P. 40002.
- [7] *Bogomolov S.A., Slepnev A.V., Strelkova G.I.* et al. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2017. V. 43. P. 25–36.  
<http://dx.doi.org/10.2016/j.cnsns.2016.06.24>
- [8] *Tognoli E., Kelso J.A.S.* // *Neuron.* 2014. V. 81. P. 35–48.
- [9] *Rattenborg N.C., Amlaner C.J., Lima S.L.* // *Neuroscience Biobehavioral Rev.* 2000. V. 24. P. 817–842.