

01

## Приближенные формулы, описывающие профили лежащих и висящих капель в случаях малых чисел Бонда и сильной смачиваемости

© Е.В. Галактионов,<sup>1</sup> Н.Е. Галактионова,<sup>2</sup> Э.А. Тропп<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: evgalakt@mail.ru

(Поступило в Редакцию 25 мая 2016 г.)

Даны вариационные постановки задач о лежащей и висящей каплях с учетом силы тяжести в осесимметричном случае. Получены приближенные формулы, описывающие профили поверхностей этих капель при малых числах Бонда — асимптотическим методом, а при условии сильной смачиваемости — методом линеаризации.

### Введение

Результаты теоретического исследования профиля поверхности жидкой капли малого объема на твердой поверхности при наличии зоны трехфазного контакта представляют ценную информацию для решения многих научных и технологических проблем [1]. Задачи о равновесии капиллярных поверхностей являются базой для изучения формы жидких менисков в процессе роста кристаллов по способу Степанова [2].

Как известно, использование вариационной постановки задачи позволяет получить и дифференциальные уравнения, и граничные условия (естественные условия экстремума функционала). В своей монографии [3] Н.М. Гюнтер пишет: „... вариационная постановка задачи способствует обнаружению законов, управляющих явлением.“

В работе [4] сформулирована вариационная постановка основных задач этого класса: капля на твердой поверхности, капля на капле другой жидкости, капля с частично ограниченной поверхностью. В работах [1,5,6] проведено исследование задачи о капле, лежащей на твердой поверхности с учетом действия силы тяжести, кроме того, в [1] рассмотрена и задача о висящей капле. В [5] с помощью метода линеаризации получены приближенные формулы, описывающие профиль лежащей капли при условии сильной смачиваемости в декартовых координатах (для бесконечной балки с сечением в виде профиля капли).

В настоящей работе рассмотрены осесимметричные задачи о лежащей и висящей каплях в цилиндрических координатах с учетом силы тяжести, даны их вариационные постановки. Построены приближенные решения этих задач для случая малых чисел Бонда (найден нулевое и первое приближения асимптотического разложения). При условии сильной смачиваемости методом линеаризации получены приближенные формулы, справедливые для любого значения числа Бонда. Построена

асимптотика решений при угле смачивания, стремящемся к нулю.

Исследование таких задач актуально для изучения процессов, имеющих место при затравлении кристаллов, выращиваемых из расплава [2].

### Лежащая капля. Постановка задачи

Рассмотрим случай капли лежащей на твердой поверхности при наличии трех фаз и с учетом силы тяжести (рис. 1). Ввиду осевой симметрии будем решать задачу о нахождении профиля капли в цилиндрической системе координат. Область  $\Omega$ , занимаемая каплей на твердой поверхности, представляет собой круг радиуса  $r_1$  ( $r_1$  — искомая величина). Объем капли — заданная величина  $V_1$  и, следовательно,

$$I_1\{u_1(r)\} = 2\pi \int_0^{r_1} u_1(r)rdr = V_1, \quad (1)$$

где  $u_1(r)$  — искомая функция, описывающая профиль поверхности лежащей капли. Будем рассматривать только случай однозначной функции  $u_1(r)$ .

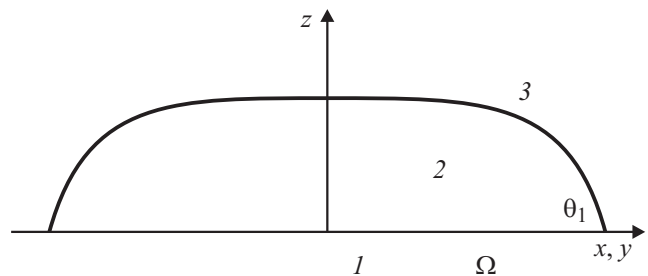


Рис. 1. Капля, лежащая на твердой поверхности. 1 — твердая среда, 2 — жидкая, 3 — газообразная;  $\theta_1$  — угол смачивания.

Введем в рассмотрение функционал, включающий в себя поверхностную энергию и энергию силы тяжести. Поверхностная энергия в свою очередь состоит из части, соответствующей свободной поверхности капли, и части, соответствующей контакту жидкости с твердым телом. Таким образом, следуя [5], функционал можно записать в виде

$$J_1\{u_1(r)\} = 2\pi \int_0^{r_1} \left\{ \alpha_{23} \sqrt{1 + (u_1')^2} + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \frac{1}{2} g \rho u_1^2 \right\} r dr, \quad (2)$$

где  $\alpha_{ij}$  — поверхностные натяжения между различными средами: твердой (1), жидкой (2) и газообразной (3),  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность жидкости.

Итак, надо найти экстремум функционала (2) при условии, что функционал (1) принимает заданное значение, т. е. приходим к изопериметрической задаче [3] со свободной границей ( $r_1$  — искомая величина). Для ее решения необходимо минимизировать функционал

$$J_1 + \lambda_1 I_1 = \int_0^{r_1} H_1(r, u_1(r), u_1'(r)) dr, \quad (3)$$

где

$$H_1(r, u_1(r), u_1'(r)) = 2\pi \left\{ \alpha_{23} \sqrt{1 + (u_1')^2} + \alpha_{12} - \alpha_{13} + \frac{1}{2} g \rho u_1^2 + \lambda_1 u_1 \right\} r.$$

Уравнение Эйлера для функционала (3) будет иметь вид

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha_{23} r u_1'}{\sqrt{1 + (u_1')^2}} \right) = g \rho r u_1 + \lambda_1 r. \quad (4)$$

Кроме условия постоянства объема (1) при этом должны еще выполняться условия

$$u_1(r_1) = 0, \quad u_1'(0) = 0 \quad (5)$$

и условие трансверсальности [3]

$$\left\{ H_1 - u_1' \frac{\partial H_1}{\partial u_1'} \right\} \Big|_{r=r_1} = 0,$$

которое с учетом первого из условий (5) дает известное соотношение, связывающее угол смачивания и поверхностные натяжения в точке контакта трех фаз

$$\cos \theta_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + (u_1')^2}} \Big|_{r=r_1} = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{12}}{\alpha_{23}} \equiv \alpha_1. \quad (6)$$

Наличие условия трансверсальности связано с тем, что решается вариационная задача с подвижной границей (точка с координатами  $(r_1, 0)$  может двигаться по оси

абсцисс). Ввиду предположения об однозначности функции, описывающей профиль капли, угол  $\theta_1$  не должен превосходить  $90^\circ$  и правая часть (6) положительна.

Приведем задачу к безразмерному виду с помощью введения следующих масштабов:

$$\xi = \frac{r}{V_1^{1/3}}, \quad w_1 = \frac{u_1}{V_1^{1/3}}, \quad \tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1 V_1^{1/3}}{\alpha_{23}}$$

( $V_1^{1/3}$  — характерный размер капли) и введем обозначение

$$B_1 = \frac{g \rho V_1^{2/3}}{\alpha_{23}}.$$

Безразмерная постоянная  $B_1$  — число Бонда (см. [1]).

В новых переменных задача будет иметь следующий вид:

уравнение Эйлера

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi w_1'(\xi)}{\sqrt{1 + (w_1'(\xi))^2}} \right) = B_1 \xi w_1(\xi) + \tilde{\lambda}_1 \xi, \quad (7)$$

условия

$$\int_0^{\xi_1} w_1(\xi) \xi d\xi = \frac{1}{2\pi}, \quad (8)$$

$$w_1(\xi_1) = 0, \quad w_1'(0) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (w_1')^2}} \Big|_{\xi=\xi_1} = \alpha_1, \quad (10)$$

где  $\xi_1$  — значение новой независимой переменной, соответствующее значению  $r_1$ .

## Лежащая капля. Асимптотический метод

Построим решение задачи о лежащей капле для случая малых чисел Бонда. Малые числа Бонда соответствуют жидким каплям малого объема, например, для случая капли расплава  $Al_2O_3$  [2] число Бонда меньше 0.1, если диаметр капли меньше двух миллиметров.

Итак, пусть  $B_1$  — малый параметр задачи (7)–(10). Будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра  $B_1$ :

$$w_1(\xi) = w_{10}(\xi) + w_{11}(\xi) B_1 + w_{12}(\xi) B_1^2 + \dots$$

Искомые величины  $\xi_1, \tilde{\lambda}_1$  также будем искать в виде разложений по степеням  $B_1$ :

$$\xi_1 = \xi_{10} + \xi_{11} B_1 + \xi_{12} B_1^2 + \dots,$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_{10} + \tilde{\lambda}_{11} B_1 + \tilde{\lambda}_{12} B_1^2 + \dots$$

Подставив эти разложения в уравнение (7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $B_1$  в левых и правых частях, получим

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi w'_{10}(\xi)}{\sqrt{1 + (w'_{10}(\xi))^2}} \right) = \tilde{\lambda}_{10} \xi, \quad (11)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi w'_{11}(\xi)}{[1 + (w'_{10}(\xi))^2]^{3/2}} \right) = w_{10}(\xi) \xi + \tilde{\lambda}_{11} \xi \quad (12)$$

— уравнения нулевого и первого приближений соответственно. Условие постоянства объема капли (условие (8)) даст в этих приближениях следующие условия:

$$\int_0^{\xi_{10}} w_{10}(\xi) \xi d\xi = \frac{1}{2\pi}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\xi_{10}} w_{11}(\xi) \xi d\xi + w_{10}(\xi_{10}) \xi_{10} \xi_{11} = 0. \quad (14)$$

Первое из условий (9) даст в нулевом и первом приближениях соответственно

$$w_{10}(\xi_{10}) = 0, \quad (15)$$

$$w_{11}(\xi_{10}) + w'_{10}(\xi_{10}) \xi_{11} = 0. \quad (16)$$

Второе из условий (9) даст в нулевом и первом приближениях соответственно

$$w'_{10}(0) = 0, \quad (17)$$

$$w'_{11}(0) = 0. \quad (18)$$

И наконец, четвертое условие (условие (10)) даст, соответственно

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (w'_{10}(\xi_{10}))^2}} = \alpha_1, \quad (19)$$

$$w'_{11}(\xi_{10}) + w''_{10}(\xi_{10}) \xi_{11} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, получили задачу нулевого приближения (11), (13), (15), (17), (19) и задачу первого приближения (12), (14), (16), (18), (20).

Решив задачу нулевого приближения, получим

$$\tilde{\lambda}_{10} = -2 \left\{ \frac{\pi(1 - \alpha_1)^2(2 + \alpha_1)}{3} \right\}^{1/3},$$

$$\xi_{10} = -2(\tilde{\lambda}_{10})^{-1} \sqrt{1 - \alpha_1^2}, \quad (21)$$

а профиль лежащей капли в нулевом приближении будет определяться выражением

$$w_{10}(\xi) = 2(\tilde{\lambda}_{10})^{-1} \left\{ \alpha_1 - \sqrt{1 - \left(0.5\tilde{\lambda}_{10}\xi\right)^2} \right\}. \quad (22)$$

Перейдем к решению задачи первого приближения. В результате получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения  $\tilde{\lambda}_{11}$  и  $\xi_{11}$ :

$$\tilde{\lambda}_{11} = \frac{1}{\xi_{10}^2} \left[ 2\sqrt{1 - \alpha_1^2} \xi_{11} - \frac{1}{\pi} \right], \quad (23)$$

$$\xi_{11} = -\frac{1}{4\pi(1 - \alpha_1^2)^{3/2}(2 + \alpha_1)} [3\tilde{\lambda}_{10}\tilde{\lambda}_{11} + 4\alpha_1 - 4]. \quad (24)$$

Решив эту систему, найдем  $\tilde{\lambda}_{11}$  и  $\xi_{11}$ :

$$\tilde{\lambda}_{11} = 2\alpha_1(3 + \alpha_1)(\alpha_1 - 1) [3\tilde{\lambda}_{10} + 2\pi(1 - \alpha_1^2)(2 + \alpha_1)\xi_{10}^2]^{-1},$$

$$\xi_{11} = [3\tilde{\lambda}_{10} + 4\pi(1 - \alpha_1)\xi_{10}^2]$$

$$\left\{ 2\pi\sqrt{1 - \alpha_1^2} [3\tilde{\lambda}_{10} + 2\pi(1 - \alpha_1^2)(2 + \alpha_1)\xi_{10}^2] \right\}^{-1},$$

а первая поправка для профиля лежащей капли будет иметь вид

$$w_{11}(\xi) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_1^2}}{\alpha_1} \xi_{11} + \frac{2\tilde{\lambda}_{10}^{-3}}{3} \left\{ \left( \sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{10}\xi)^2} - \alpha_1 \right) \times \left( \frac{4}{\alpha_1\sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{10}\xi)^2}} - 3(\tilde{\lambda}_{10}\tilde{\lambda}_{11} + 2\alpha_1) \right) + 4 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{10}\xi)^2}}{1 + \alpha_1} \right) \right\}. \quad (25)$$

Тогда приближенная формула, описывающая форму поверхности лежащей капли с точностью до членов второго порядка малости относительно числа Бонда  $B_1$ , может быть записана в следующей форме:

$$w_1(\xi) = w_{10}(\xi) + w_{11}(\xi)B_1. \quad (26)$$

### Лежащая капля. Метод линеаризации

Построим решение задачи о лежащей капле (задачу (7)–(10)) для случая сильной смачиваемости методом линеаризации. Условие (10) перепишем в виде

$$w'_1(\xi_1) = -\frac{\sqrt{1 - \alpha_1^2}}{\alpha_1} \equiv -\gamma_1. \quad (27)$$

Другими словами, рассмотрим случай

$$0 \leq \gamma_1 \ll 1. \quad (28)$$

Тогда уравнение (7) можно заменить на линеаризованное уравнение

$$\frac{d}{d\xi} (\xi w'_1(\xi)) = B_1 \xi w_1(\xi) + \tilde{\lambda}_1 \xi. \quad (29)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_1(\xi) = C_1 I_0(\sqrt{B_1} \xi) + C_2 K_0(\sqrt{B_1} \xi) - \frac{\tilde{\lambda}_1}{B_1}, \quad (30)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. С учетом второго из условий (9) получим  $C_2 = 0$  и, следовательно,

$$w_1(\xi) = C_1 I_0(\sqrt{B_1} \xi) - \frac{\tilde{\lambda}_1}{B_1}, \quad w_1'(\xi) = C_1 \sqrt{B_1} I_1(\sqrt{B_1} \xi). \quad (31)$$

Отсюда с учетом условия (27) и первого из условий (9) находим

$$C_1 = -\frac{\gamma_1}{\sqrt{B_1} I_1(\sqrt{B_1} \xi_1)}, \quad (32)$$

$$C_1 I_0(\sqrt{B_1} \xi_1) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{B_1}. \quad (33)$$

Из (33) с учетом (32) получим выражение для нахождения множителя Лагранжа  $\tilde{\lambda}_1$ , а именно

$$\tilde{\lambda}_1 = -\gamma_1 \sqrt{B_1} \frac{I_0(\sqrt{B_1} \xi_1)}{I_1(\sqrt{B_1} \xi_1)}. \quad (34)$$

Осталось найти  $\xi_1$ . Подставим в (8) выражение для  $w_1(\xi)$  из (31) и, выполнив интегрирование, получим трансцендентное уравнение для нахождения величины  $\xi_1$ :

$$\left\{ \frac{I_0(\sqrt{B_1} \xi_1)}{I_1(\sqrt{B_1} \xi_1)} \sqrt{B_1} \xi_1 - 2 \right\} \xi_1 = \frac{B_1}{\pi \gamma_1}. \quad (35)$$

Решив это уравнение, найдем  $\xi_1$ , далее по формуле (34) определим  $\tilde{\lambda}_1$ , а по формуле (32) —  $C_1$ . Приближенную формулу для профиля лежащей капли, полученную в результате первого шага процесса линеаризации, даст (31).

Далее, подставим полученное нулевое приближение для функции  $w_1(\xi)$  в знаменатель левой части уравнения (7). Получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения следующего приближения процесса линеаризации и повторим весь процесс, описанный выше. Таков алгоритм процесса линеаризации для случая капли, лежащей на твердой поверхности.

Рассмотрим случай  $\gamma_1 = 0$  (нулевой угол смачивания). В этом случае для  $\xi_1 < +\infty$  из (32) следует  $C_1 = 0$ , из (33) —  $\tilde{\lambda}_1 = 0$  и (31) дает  $w_1(\xi) \equiv 0$ , но условие (8) при этом не выполняется и  $w_1(\xi) \equiv 0$  не есть решение исходной задачи.

Построим асимптотику решения задачи первого шага процесса линеаризации при  $\gamma_1 \rightarrow 0$ . Из трансцендентного уравнения (35) видно, что при  $\gamma_1 \rightarrow +0$  необходимо  $\xi_1 \rightarrow +\infty$ , а из асимптотики модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента следует, что

$$\frac{I_0(\sqrt{B_1} \xi_1)}{I_1(\sqrt{B_1} \xi_1)} \Big|_{\xi_1 \rightarrow +\infty} \rightarrow +1.$$

Главным членом в левой части уравнения (35) при этом будет член  $\sqrt{B_1} \xi_1^2$ , следовательно,  $\xi_1 \sim D_1 / \sqrt{\gamma_1}$ ,

где постоянная  $D_1 = (B_1)^{1/4} / \sqrt{\pi}$ . Далее, после того как найдена асимптотика значения  $\xi_1$  при  $\gamma_1 \rightarrow +0$ , выражения (32) и (34) дадут асимптотику величин  $C_1$ ,  $\tilde{\lambda}_1$ , а именно

$$C_1 \sim -\frac{\sqrt{2}(\pi)^{1/4}}{(B_1)^{1/8} \exp((B_1)^{3/4} / \sqrt{\pi \gamma_1})} (\gamma_1)^{3/4}, \quad \tilde{\lambda}_1 \sim -\sqrt{B_1} \gamma_1$$

при  $\gamma_1 \rightarrow +0$ .

Следовательно, асимптотика при  $\gamma_1 \rightarrow +0$  для профиля лежащей капли после первого шага процесса линеаризации будет иметь вид

$$w_1(\xi) \sim -\frac{\sqrt{2}(\pi)^{1/4} (\gamma_1)^{3/4}}{(B_1)^{1/8} \exp((B_1)^{3/4} / \sqrt{\pi \gamma_1})} I_0(\sqrt{B_1} \xi) + \frac{\gamma_1}{\sqrt{B_1}}.$$

Видно, что максимум модуля асимптотического представления решения в каждой точке линейно стремится к нулю при  $\gamma_1 \rightarrow +0$ .

### Висящая капля. Постановка задачи

Перейдем к рассмотрению висящей капли (см. рис. 2). Пусть капля висит на твердой поверхности (плоскость  $z = h$ ,  $h > 0$ ). Поверхностные натяжения между твердой и жидкой, твердой и газообразной средами на этой плоскости  $\alpha_{42}$  и  $\alpha_{43}$  соответственно. Область контакта висящей капли и плоскости  $z = h$  (область  $\Omega$ ) представляет собой круг радиуса  $r_2$  ( $r_2$  — искомая величина). Объем висящей капли — заданная величина  $V_2$  и, следовательно,

$$I_2\{u_2(r)\} = 2\pi \int_0^{r_2} (h - u_2(r)) r dr = V_2, \quad (36)$$

где  $u_2(r)$  — искомая функция, описывающая профиль поверхности висящей капли.

Далее, по аналогии с рассмотренным выше случаем лежащей капли введем в рассмотрение функционал, включающий в себя поверхностную энергию и энергию силы тяжести. Поверхностная энергия в свою очередь будет состоять из части, соответствующей свободной поверхности капли, и части, соответствующей контакту

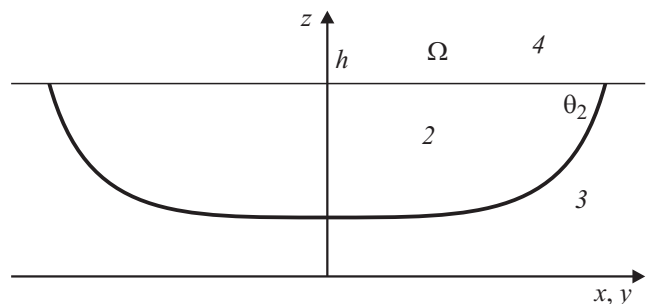


Рис. 2. Капля, висящая на твердой поверхности. 4 — твердая среда, 2 — жидкая, 3 — газообразная;  $\theta_2$  — угол смачивания.

жидкости с твердым телом. Этот случай будет отличаться от рассмотренного выше только тем, что в уравнение энергетического баланса энергия силы тяжести войдет с противоположным знаком. Таким образом, функционал будет иметь следующий вид:

$$J_2\{u_2(r)\} = 2\pi \int_0^{r_2} \left\{ \alpha_{23} \sqrt{1 + (u_2')^2} + \alpha_{42} - \alpha_{43} - \frac{1}{2} g\rho(h - u_2)^2 \right\} r dr. \quad (37)$$

Надо найти экстремум функционала (37) при условии, что функционал (36) принимает заданное значение, т.е. приходим к изопериметрической задаче со свободной границей ( $r_2$  — искомая величина). Для ее решения необходимо минимизировать функционал

$$J_2 + \lambda_2 I_2 = \int_0^{r_2} H_2(r, u_2(r), u_2'(r)) dr, \quad (38)$$

где

$$H_2(r, u_2(r), u_2'(r)) = 2\pi \left\{ \alpha_{23} \sqrt{1 + (u_2')^2} + \alpha_{42} - \alpha_{43} - \frac{1}{2} g\rho(h - u_2)^2 + \lambda_2(h - u_2) \right\} r.$$

Уравнение Эйлера для функционала (38) будет иметь вид

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{\alpha_{23} r u_2'}{\sqrt{1 + (u_2')^2}} \right) = g\rho(h - u_2)r - \lambda_2 r. \quad (39)$$

Кроме условия (36) должны выполняться еще три условия

$$u_2(r_2) = h, \quad u_2'(0) = 0 \quad (40)$$

и условие трансверсальности

$$\left\{ H_2 - u_2' \frac{\partial H_2}{\partial u_2'} \right\} \Big|_{r=r_2} = 0. \quad (41)$$

Это условие с учетом первого из условий (40) можно переписать в следующей форме:

$$\cos \theta_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + (u_2')^2}} \Big|_{r=r_2} = \frac{\alpha_{43} - \alpha_{42}}{\alpha_{23}} \equiv \alpha_2. \quad (42)$$

Имеем четыре условия, включая условие постоянства объема, и четыре неизвестные постоянные:  $r_2$ ,  $\lambda_2$  и две постоянные интегрирования уравнения Эйлера. В этой задаче кроме параметра  $\alpha_2$  появился еще один параметр — высота  $h$  (в безразмерном виде  $\tilde{h} = h/V_2^{1/3}$ ).

Далее, аналогично случаю лежащей капли, приведем задачу к безразмерному виду и введем постоянную Бонда  $B_2$ .

В новых переменных задача будет иметь следующий вид:

уравнение Эйлера

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi w_2'(\xi)}{\sqrt{1 + (w_2'(\xi))^2}} \right) = B_2(\tilde{h} - w_2(\xi))\xi - \tilde{\lambda}_2 \xi, \quad (43)$$

условия

$$\int_0^{\xi_2} (\tilde{h} - w_2(\xi))\xi d\xi = \frac{1}{2\pi}, \quad (44)$$

$$w_2(\xi_2) = \tilde{h}, \quad w_2'(0) = 0, \quad (45)$$

$$w_2'(\xi_2) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}{\alpha_2} \equiv \gamma_2, \quad (46)$$

где  $\xi_2$  — значение новой независимой переменной, соответствующее значению  $r_2$ .

### Висящая капля. Асимптотический метод

Построим решение задачи о висящей капле для случая малых чисел Бонда. Итак, пусть  $B_2$  — малый параметр задачи (43)–(46). Будем искать решение в виде ряда по степеням малого параметра  $B_2$  аналогично случаю лежащей капли.

В результате получим

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi w_{20}'(\xi)}{\sqrt{1 + (w_{20}'(\xi))^2}} \right) = -\tilde{\lambda}_{20} \xi, \quad (47)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi w_{21}'(\xi)}{[1 + (w_{20}'(\xi))^2]^{3/2}} \right) = (\tilde{h} - w_{20}(\xi))\xi - \tilde{\lambda}_{21} \xi \quad (48)$$

— уравнения нулевого и первого приближений соответственно.

Условие постоянства объема капли (условие (44)) даст в этих приближениях следующие условия:

$$\int_0^{\xi_{20}} (\tilde{h} - w_{20}(\xi))\xi d\xi = \frac{1}{2\pi}, \quad (49)$$

$$\int_0^{\xi_{20}} w_{21}(\xi)\xi d\xi = [\tilde{h} - w_{20}(\xi_{20})]\xi_{20}\xi_{21}. \quad (50)$$

Первое из условий (45) даст в нулевом и первом приближениях соответственно

$$w_{20}(\xi_{20}) = \tilde{h}, \quad (51)$$

$$w_{21}(\xi_{20}) + w_{20}'(\xi_{20})\xi_{21} = 0. \quad (52)$$

Второе из условий (45) даст в нулевом и первом приближениях соответственно

$$w_{20}'(0) = 0, \quad (53)$$

$$w_{21}'(0) = 0. \quad (54)$$

И наконец, четвертое условие (условие (46)) даст соответственно

$$w'_{20}(\xi_{20}) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}{\alpha_2}, \quad (55)$$

$$w'_{21}(\xi_{20}) + w''_{20}(\xi_{20})\xi_{21} = 0. \quad (56)$$

Таким образом, получили задачу нулевого приближения (47), (49), (51), (53), (55) и задачу первого приближения (48), (50), (52), (54), (56) для висящей капли.

Решив задачу нулевого приближения, получим

$$\tilde{\lambda}_{20} = -2 \left\{ \frac{\pi(1 - \alpha_2)^2(2 + \alpha_2)}{3} \right\}^{1/3},$$

$$\xi_{20} = -2(\tilde{\lambda}_{20})^{-1} \sqrt{1 - \alpha_2^2}, \quad (57)$$

а профиль поверхности висящей капли будет описываться формулой

$$w_{20}(\xi) = \tilde{h} - 2(\tilde{\lambda}_{20})^{-1} \left\{ \alpha_2 - \sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{20}\xi)^2} \right\}. \quad (58)$$

Нетрудно заметить, что если выполнено условие  $\alpha_2 = \alpha_1$ , то при построении нулевых приближений для лежащей и висящей капель будем иметь  $\tilde{\lambda}_{20} = \tilde{\lambda}_{10}$ ,  $\xi_{20} = \xi_{10}$  и соответствующие профили будут симметричны относительно прямой  $f(\xi) = \tilde{h}/2$ .

Приступим к решению задачи первого приближения для висящей капли. В результате получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения  $\tilde{\lambda}_{21}$  и  $\xi_{21}$ :

$$\tilde{\lambda}_{21} = \frac{1}{\xi_{20}^2} \left[ 2\sqrt{1 - \alpha_2^2} \xi_{21} + \frac{1}{\pi} \right], \quad (59)$$

$$\xi_{21} = -\frac{1}{4\pi(1 - \alpha_2^2)^{3/2}(2 + \alpha_2)} [3\tilde{\lambda}_{20}\tilde{\lambda}_{21} - 4\alpha_2 + 4]. \quad (60)$$

Решив эту систему, найдем  $\tilde{\lambda}_{21}$  и  $\xi_{21}$ :

$$\tilde{\lambda}_{21} = -2\alpha_2(3 + \alpha_2)(\alpha_2 - 1)[3\tilde{\lambda}_{20} + 2\pi(1 - \alpha_2^2)(2 + \alpha_2)\xi_{20}^2]^{-1},$$

$$\xi_{21} = -[3\tilde{\lambda}_{20} + 4\pi(1 - \alpha_2)\xi_{20}^2]$$

$$\left\{ 2\pi\sqrt{1 - \alpha_2^2} [3\tilde{\lambda}_{20} + 2\pi(1 - \alpha_2^2)(2 + \alpha_2)\xi_{20}^2] \right\}^{-1},$$

а первая поправка для профиля висящей капли будет иметь вид

$$w_{21}(\xi) = -\frac{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}{\alpha_2} \xi_{21} + \frac{2\tilde{\lambda}_{20}^{-3}}{3} \left\{ \left( \sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{20}\xi)^2} - \alpha_2 \right) \times \left[ \frac{4}{\alpha_2\sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{20}\xi)^2}} + 3(\tilde{\lambda}_{20}\tilde{\lambda}_{21} - 2\alpha_2) \right] + 4 \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - (0.5\tilde{\lambda}_{20}\xi)^2}}{1 + \alpha_2} \right) \right\}. \quad (61)$$

Видно, что в случае  $\alpha_2 = \alpha_1$  будем иметь  $\tilde{\lambda}_{21} = -\tilde{\lambda}_{11}$ ,  $\xi_{21} = -\xi_{11}$  и первые поправки к профилям лежащей и висящей капель будут совпадать.

Приближенная формула, описывающая форму поверхности висящей капли с точностью до членов второго порядка малости относительно числа Бонда  $B_2$ , может быть записана в следующей форме:

$$w_2(\xi) = w_{20}(\xi) + w_{21}(\xi)B_2. \quad (62)$$

## Висящая капля. Метод линеаризации

Построим решение задачи о висящей капле (задачи (43)–(46)) для случая сильной смачиваемости методом линеаризации. Заметим, что при использовании такого подхода нет ограничений на величину числа Бонда (аналогичная ситуация имеет место и для лежащей капли).

Итак, рассмотрим случай

$$0 \leq \gamma_2 \ll 1. \quad (63)$$

Тогда уравнение (43) можно заменить на линеаризованное уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi w'_2(\xi) \right) = B_2 \xi (\tilde{h} - w_2(\xi)) - \tilde{\lambda}_2 \xi. \quad (64)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_2(\xi) = C_3 J_0(\sqrt{B_2} \xi) + C_4 Y_0(\sqrt{B_2} \xi) + \tilde{h} - \frac{\tilde{\lambda}_2}{B_2}, \quad (65)$$

где  $C_3$  и  $C_4$  — произвольные постоянные. С учетом второго из условий (45) получим  $C_4 = 0$  и, следовательно,

$$w_2(\xi) = C_3 J_0(\sqrt{B_2} \xi) + \tilde{h} - \frac{\tilde{\lambda}_2}{B_2},$$

$$w'_2(\xi) = -C_3 \sqrt{B_2} J_1(\sqrt{B_2} \xi). \quad (66)$$

Отсюда с учетом условия (46) и первого из условий (45) находим

$$\sqrt{B_2} C_3 J_1(\sqrt{B_2} \xi_2) = -\gamma_2, \quad (67)$$

$$C_3 J_0(\sqrt{B_2} \xi_2) = \frac{\tilde{\lambda}_2}{B_2}. \quad (68)$$

Подставив в (44) выражение для  $w_2(\xi)$  и выполнив интегрирование, получим уравнение, связывающее неизвестные  $C_3$ ,  $\xi_2$ ,  $\tilde{\lambda}_2$ ,

$$2C_3 \sqrt{B_2} \xi_2 J_1(\sqrt{B_2} \xi_2) = \tilde{\lambda}_2 (\xi_2)^2 - \frac{B_2}{\pi}. \quad (69)$$

В предположении  $J_1(\sqrt{B_2} \xi_2) \neq 0$  из соотношений (67), (68) следует

$$C_3 = -\frac{\gamma_2}{\sqrt{B_2} J_1(\sqrt{B_2} \xi_2)}, \quad \tilde{\lambda}_2 = -\sqrt{B_2} \gamma_2 \frac{J_0(\sqrt{B_2} \xi_2)}{J_1(\sqrt{B_2} \xi_2)}. \quad (70)$$

Подставив эти выражения для  $C_3, \tilde{\lambda}_2$  в (69), получим трансцендентное уравнение для нахождения  $\xi_2$ :

$$\left\{ \frac{J_0(\sqrt{B_2}\xi_2)}{J_1(\sqrt{B_2}\xi_2)} \sqrt{B_2}\xi_2 - 2 \right\} \xi_2 = -\frac{B_2}{\pi\gamma_2}. \quad (71)$$

Решив это уравнение, найдем  $\xi_2$ , далее определим  $\tilde{\lambda}_2$  и  $C_3$ , а профиль висящей капли найдем из (66). Таким образом, сделан первый шаг процесса линеаризации.

Далее, подставим полученное приближение для функции  $w_2(\xi)$  в знаменатель левой части уравнения (43). Получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения следующего приближения и повторим весь процесс, описанный выше. Таков алгоритм процесса линеаризации для висящей капли в предположении сильной смачиваемости.

Пусть  $\gamma_2 = 0$  (нулевой угол смачивания). Тогда из (67) следует: либо

1)  $C_3 = 0$ , из (68)  $\tilde{\lambda}_2 = 0$  и (66) дает  $w_2(\xi) \equiv \tilde{h}$ , но условие (59) не выполняется и  $w_2(\xi) \equiv \tilde{h}$  не является решением поставленной задачи; либо

2)  $J_1(\sqrt{B_2}\xi_2) = 0, C_3 \neq 0$  (в отличие от случая лежащей капли появляется альтернатива).

Рассмотрим вариант 2). В этом случае получим  $\xi_2 = \xi_{2k} = \beta_k / \sqrt{B_2}, k = 1, 2, \dots$ , где  $\beta_k$  —  $k$ -ый положительный корень уравнения  $J_1(z) = 0$ . Из (69) следует, что  $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_{2k} = (B_2)^2 / \pi(\beta_k)^2$ , а из (68) —  $C_3 = C_{3k} = B_2 / (\pi(\beta_k)^2 J_0(\beta_k)), k = 1, 2, \dots$

Таким образом, в случае висящей капли для нулевого угла смачивания на первом шаге процесса линеаризации в отличие от случая лежащей капли появляются решения следующего вида:

$$w_{2k}(\xi) = \frac{B_2}{\pi(\beta_k)^2} \left( \frac{J_0(\sqrt{B_2}\xi)}{J_0(\beta_k)} - 1 \right) + \tilde{h}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Проведенные расчеты показывают, что при выборе первого положительного нуля ( $\beta_1 = 3.8317, J_1(\beta_1) = 0$ ) полученное таким образом решение имеет физический смысл.

Построим асимптотику решения задачи первого шага процесса линеаризации при  $\gamma_2 \rightarrow 0$  для висящей капли. Предположим, что величина  $\xi_2$  имеет такую же асимптотику при  $\gamma_2 \rightarrow +0$ , как и соответствующая величина в случае лежащей капли, т.е.  $\xi_2 \sim D_2 / \sqrt{\gamma_2}$ , где постоянная  $D_2 = (B_2)^{1/4} / \sqrt{\pi}$ .

Подставим выбранное асимптотическое представление для  $\xi_2$  в уравнение (71), умноженное на  $\gamma_2$ . С учетом поведения функций Бесселя при больших значениях аргумента получим

$$\text{ctg} \left( \sqrt{B_2}\xi_2 - \frac{\pi}{4} \right) (D_2)^2 \sqrt{B_2} \sim -\frac{B_2}{\pi} + 2D_2\sqrt{\gamma_2}.$$

Следовательно, существует числовая последовательность  $\xi_{2k} \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow +\infty$ , на которой

$$\text{ctg} \left( \sqrt{B_2}\xi_{2k} - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{B_2}}{\pi(D_2)^2} = -1.$$

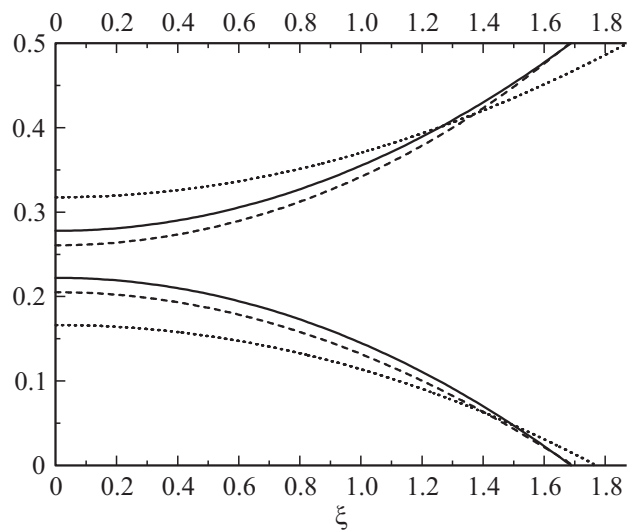


Рис. 3. Результаты расчета профилей лежащей и висящей ( $\tilde{h} = 0.5$ ) каплей (число Бонда  $B = 0.088$ , угол смачивания  $\theta = 15^\circ$ ). Сплошная линия — нулевое приближение асимптотического разложения для малого числа Бонда, штриховая — сумма нулевого и первого приближений этого разложения, пунктирная — нулевое приближение процесса линеаризации для малого угла смачивания.

Отсюда

$$\xi_{2k} = \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{B_2}}, \quad \gamma_{2k} = \frac{(B_2)^{3/2}}{(k+1)^2\pi^3}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее, найдем  $C_{3k}, \tilde{\lambda}_{2k}$  по формулам, приведенным выше. А их асимптотика при больших значениях  $k$  будет иметь вид

$$C_{3k} \sim \frac{(-1)^{k+1}B_2}{\pi^2(k+1)^{3/2}}, \quad \tilde{\lambda}_{2k} \sim \frac{(B_2)^2}{\pi^3(k+1)^2}.$$

Следовательно, асимптотика при  $\gamma_2 \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) для профиля поверхности висящей капли после первого шага процесса линеаризации будет иметь вид

$$w_{2k}(\xi) \sim \frac{(-1)^{k+1}\pi^{1/4}(\gamma_{2k})^{3/4}}{(B_2)^{1/4}} J_0(\sqrt{B_2}\xi) + \tilde{h} - \frac{\gamma_{2k}}{\sqrt{B_2}}.$$

Видно, что максимум модуля асимптотического представления решения в каждой точке стремится к  $\tilde{h}$  как  $(\gamma_{2k})^{3/4}$  при  $\gamma_2 \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ).

На рис. 3 приведены результаты расчетов профилей лежащей и висящей капель, выполненных с помощью формул, полученных выше.

### Заключение

В работе даны вариационные постановки задач о лежащей и висящей каплях с учетом силы тяжести в осесимметричном случае (в цилиндрической системе координат). Для этих задач построены нулевое и первое

приближения асимптотического разложения для случая малых чисел Бонда. Кроме того, дан алгоритм линеаризации этих задач при условии сильной смачиваемости и получены приближенные формулы, справедливые для любого значения числа Бонда. Построена асимптотика решений для случая, когда угол смачивания стремится к нулю. Показано, что в случае нулевого угла смачивания для висящей капли существуют решения (в отличие от лежащей капли).

## Список литературы

- [1] Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М.: Мир, 1989. 312 с.
- [2] Антонов П.И., Затуловский Л.М., Костыгов А.С. и др. Получение профилированных монокристаллов и изделий способом Степанова / Под ред. В.Р. Регеля, С.П. Никанорова. Л.: Наука, 1981. 280 с.
- [3] Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления. Л.—М.: ОГИЗ, 1941. 308 с.
- [4] Галактионова Н.Е., Галактионов Е.В., Тропп Э.А. // Изв. РАН, сер. физ. 2009. Т. 73. Вып. 10. С. 1393–1397.
- [5] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 7. С. 659–665.
- [6] Канчуков В.З. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 2. С. 12–16.