

02,09

## Селективные измерения состояний сверхпроводникового кубита нелинейным джозефсоновским осциллятором

© В.П. Гергель, М.В. Денисенко<sup>¶</sup>, А.В. Линёв, А.М. Сатанин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Россия

<sup>¶</sup> E-mail: mar.denisenko@gmail.com

Изучается процесс селективных измерений состояний единичной квантовой системы — джозефсоновского кубита — нелинейным осциллятором, работающим в мезоскопическом режиме, когда число квантов в процессе измерения варьируется от нескольких десятков до нескольких сотен. Квантовым методом Монте-Карло промоделированы диссипативная динамика системы кубит–осциллятор и процесс измерений состояний кубита по изменению числа квантов осциллятора. Показано, что для  $\pi$ -импульсов записи состояний кубита возможно дискриминирование состояний в единичных реализациях (аналог „однократных“ измерений), а для подготовленного суперпозиционного состояния — проведение статистических проективных измерений.

Работа поддержана проектами РФФИ № 16-57-51045 НИФ а и 16-07-01012 а и стипендией Президента РФ для молодых ученых и аспирантов, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики в 2016–2018 г.

### 1. Введение

В последние годы разработаны различные методы измерений состояний джозефсоновских кубитов, например, такие как статистические проективные измерения [1,2], непрерывные неразрушающие измерения [3] (мониторинг системы в реальном времени) и т.п. В качестве измерительного прибора, в частности, может выступать джозефсоновский осциллятор, работающий в слабо нелинейном режиме вблизи точки бифуркации. К настоящему времени детально изучена связанная система кубит–осциллятор и разработан протокол неразрушающих измерений состояний кубита [1,2], когда измерительный прибор является сугубо классической системой. В этом случае после инициализации состояния кубита осциллятор возбуждается из вакуумного состояния в состояние с большими числами заполнения  $n$ . В действительности кубит и осциллятор взаимодействуют, что приводит к „перепутыванию“ их состояний и обратному воздействию измерительного прибора на кубит. Следовательно, модельная ситуация, рассмотренная в работах [1,2], не учитывает факта перепутывания состояний, а также того, что измерительный прибор может работать в мезоскопическом режиме с большим, но конечным числом квантов. Таким образом, основной задачей настоящей работы является изучение вопроса о том, насколько квантовая система (кубит) чувствительна, а измеритель информативен в мезоскопическом режиме, например, когда среднее число квантов хотя и велико, но конечно, а среднеквадратичное отклонение мало по сравнению с числом заполнения.

Обычно для численного расчета релаксационной динамики квантовых систем используется подход, основанный на решении уравнения для матрицы плотности [4], который описывает поведение единичных квантовых систем только в среднем. Соответственно на основе

этого метода нельзя исследовать динамику систем в каждой реализации (в одном акте измерения), наблюдать квантовые скачки, происходящие в системе за счет энергетической или фазовой релаксации, промоделировать процессы контроля квантовой системы в реальном времени — „однократные“ измерения. В связи с этим в настоящей работе расчет релаксационной динамики и моделирование процессов измерений состояний связанной системы кубит–осциллятор выполнены на основе квантового метода Монте-Карло [5]. Данный подход позволяет также промоделировать процесс накопления экспериментальной информации о единичной квантовой системе.

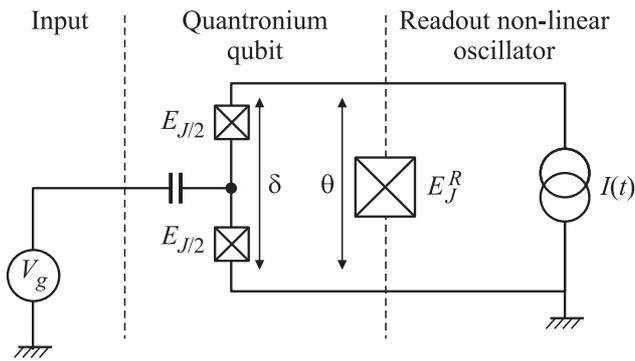
### 2. Модель системы кубит–осциллятор

Для моделирования процесса детектирования состояний квантовой системы — зарядового кубита специального вида („квантроний“–кубита) [6] — в качестве примера измерительного устройства выбран джозефсоновский нелинейный осциллятор. Предполагается, что в качестве кубита выступают два джозефсоновских перехода с емкостью  $C_J$  и определенными значениями джозефсоновской  $E_J/2$  и кулоновской  $E_C$  энергий, функционирующие в режиме кулоновской блокады (рис. 1), которые соединены со сверхпроводящим островком (темный кружок, разделяющий джозефсоновские переходы на рис. 1) [3]. Используя уравнения Джозефсона и законы Кирхгофа, можно записать полный гамильтониан системы

$$H = H_{QQ} + H_J,$$

где гамильтониан расщепленного куперовского островка  $H_{QQ}$  имеет вид

$$H_{QQ} = 4E_C \left( \hat{N} - \frac{1}{2} + \frac{C_g V(t)}{2e} \right)^2 - E_J \cos \frac{\delta}{2} \cos \theta, \quad (1)$$



**Рис. 1.** Схема кубита (в центре рисунка) связанного с устройством записи (слева) и взаимодействующего со слабодиссипативным измерительным джозефсоновским осциллятором (справа). Перечеркнутыми квадратами обозначены джозефсоновские переходы. Островок (темный кружок, разделяющий перечеркнутые квадраты) является в то же время вторым контактом переходов (см. [1]).

а гамильтониан измерительного джозефсоновского осциллятора равен

$$H_J = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J^R \cos \theta - \frac{\hbar^2}{2e} I(t)\theta, \quad (2)$$

где  $\hat{N}$  и  $\hat{Q}/2e$  ( $e$  — заряд электрона) — обобщенные импульсы, канонически сопряженные фазам  $\delta$  и  $\theta$  соответственно, куперовского и джозефсоновского переходов, характеризующихся энергиями  $E_J$  и  $E_J^R$  и емкостью  $C$  шунтирующего большого джозефсоновского перехода (подробности вывода гамильтониана системы можно найти в работе [6]). Как видно, связь двух подсистем осуществляется за счет общего участка цепи, обуславливающего зависимость от фазы  $\theta$  в потенциальной энергии выражения (1). Управление состояниями кубита осуществляется переменным напряжением  $V(t) = V_g + V_{rf}(t) \cos \omega t$ , которое меняет заряд на емкости  $C_g$ , а переменный ток  $I(t)$  в правой части контура служит для управления измерительным джозефсоновским осциллятором.

Вблизи точки кулоновского вырождения, когда энергии островка для  $N$  и  $N + 1$  частиц равны, можно использовать базисные состояния  $|N\rangle$  и  $|N + 1\rangle$  ( $\hat{N}|N\rangle = N|N\rangle$ ). В подпространстве  $|N\rangle = (1, 0)^T$  и  $|N + 1\rangle = (0, 1)^T$  гамильтониан аппроксимируется выражением

$$H \cong 2E_C \frac{C_g V_{rf}(t)}{e} \sigma_x - E_J \cos \frac{\theta}{2} \sigma_z + \frac{Q^2}{2C} - E_J^R \cos \theta - \frac{\hbar^2}{2e} I(t)\theta, \quad (3)$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  — спиновые матрицы Паули.

При относительно малом токе  $I(t)$  джозефсоновский осциллятор работает в слабо нелинейном режиме. То-

гда потенциал в выражении (3) можно разложить по степеням  $\theta$

$$H \cong 2E_C \frac{C_g V_{rf}(t)}{e} \sigma_x - \frac{E_J}{2} \sigma_z + \frac{Q^2}{2C} + E_J (1 + \lambda \sigma_x) \frac{\theta^2}{2} - E_J \left(1 + \frac{\lambda}{4} \sigma_z\right) \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\hbar^2}{2e} I(t)\theta, \quad (4)$$

где  $\lambda = E_J/4E_J^R$ .

Вводя операторы рождения  $a^\dagger$  и уничтожения  $a$  для параметризации координаты  $\hat{\theta} = (a + a^\dagger)(2E_C^R/E_J)^{1/4}$  и импульса осциллятора  $\hat{N} = -i(a - a^\dagger)(E_C^R/2E_J)^{-1/4}$  ( $\hat{Q} = 2e\hat{N}$ ,  $\hat{N} = -i\partial/\partial\theta$ ) с учетом коммутационного соотношения  $[\hat{\theta}, \hat{N}] = i$ , можно эффективный гамильтониан (4) связанной системы кубит–осциллятор представить в виде

$$H = H_q + H_{osc} + H_{int}. \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое — гамильтониан кубита  $H_q = \frac{\hbar}{2} (\omega_q \sigma_z + \varepsilon(t) \sigma_x)$ , где расстояние между уровнями кубита определяется джозефсоновской энергией  $\hbar\omega_q = -2E_J$ , а управляющая функция  $\varepsilon(t) = 4E_C C_g V_{rf}(t)/e$  индуцирует переходы между состояниями кубита  $|\sigma\rangle$  ( $\sigma_z|\sigma\rangle = \sigma|\sigma\rangle$ ,  $\sigma = \pm 1$ ). Предполагается, что управление кубитом осуществляется Раби-импульсами переменного поля  $\varepsilon(t) = A \cos \omega t$  определенной длительности.

Измерение состояний кубита предполагается осуществлять нелинейным осциллятором (4), который может быть переведен в когерентное состояние током „накачки“  $I(t)$  [2]. Гамильтониан измерительного осциллятора в терминах операторов рождения и уничтожения с учетом выражений для  $\hat{\theta} = (a + a^\dagger)(2E_C^R/E_J)^{1/4}$  и  $\hat{Q} = -2ie(a - a^\dagger)(E_C^R/2E_J)^{-1/4}$  имеет вид

$$H_{osc} = \hbar\omega_J a^\dagger a - \frac{\mu}{4} (a^\dagger + a)^4 + f(t)(a + a^\dagger), \quad (6)$$

где  $\omega_J = \sqrt{\frac{2eI_c}{\hbar C}}$  — собственная частота осциллятора ( $I_c$  — критический ток на большом джозефсоновском переходе),  $\mu = E_C^R/12\hbar$  — параметр нелинейности,  $f(t) = f_0 \cos \Omega t$  — возбуждающее поле осциллятора ( $f(t) \sim I(t)/I_c$ ,  $f_0 = \frac{\hbar}{2e} \left(\frac{2E_C^R}{E_J}\right)^{1/4}$ ).

Наконец, последнее слагаемое в (5) отвечает за взаимодействие кубита с измерительным осциллятором

$$H_{int} = \lambda \left( \hbar\omega_J a^\dagger a - \frac{1}{4} \mu (a^\dagger + a)^4 \right) \sigma_z. \quad (7)$$

Отметим, что если управляющее поле отсутствует ( $\varepsilon(t) = 0$ ), то оператор взаимодействия (7) коммутирует с гамильтонианом кубита  $H_q$ , поэтому осциллятор производит так называемое „неразрушающее измерение“ [1,2,7] переменной  $\sigma_z$ . В случае же действия поля ( $\varepsilon(t) \neq 0$ ) состояния подсистем являются запутанными.

### 3. Диссипативная динамика в рамках квантового метода Монте-Карло

При изучении процесса детектирования состояний кубита учитываются процессы декогерентности, кото-

рые можно представить как взаимодействие системы кубит–осциллятор с фоновым резервуаром с большим числом степеней свободы [4], а вклад термического возбуждения при записи интеграла столкновения не рассматривается, так как эксперименты над сверхпроводниковыми кубитами проводятся при криогенных температурах [1–3]. Следовательно, гамильтониан шума, соответствующий вкладу бозонных возбуждений, имеет вид

$$H_{\text{noise}} = F_z \sigma_z + F_x \sigma_x + R a^\dagger + R^\dagger a, \quad (8)$$

где эрмитовы операторы  $F_z(t)$ ,  $F_x(t)$  резервуара отвечают за продольную и поперечную релаксацию кубита, а оператор  $R(t)$  — за релаксацию измерительного прибора.

Уравнение для оператора плотности  $\rho$ , где исключены переменные резервуара  $F(t)$ ,  $R(t)$  и использовано приближение Борна–Маркова [4], записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \frac{\Gamma_\varphi}{2} (\sigma_z \rho \sigma_z - \rho) \\ & + \frac{\Gamma_e}{2} (2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) \\ & + \frac{\gamma}{2} (2a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a), \end{aligned} \quad (9)$$

где матрицы  $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$  определены стандартным образом через матрицы Паули  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , а  $\Gamma_\varphi$  и  $\Gamma_e$  — соответственно фазовая и энергетическая скорости релаксации кубита,  $\gamma$  — параметр энергетической релаксации осциллятора. Отметим, что релаксационные параметры выражаются стандартным образом через корреляционные функции бозонного термостата ( $\langle F_z(t) F_z^\dagger \rangle$ ,  $\langle R(t) R^\dagger \rangle$  и т.д.).

Динамику связанной системы кубит–осциллятор в единичных реализациях (в каждом акте измерения) опишем с точки зрения квантового метода Монте-Карло [5]. Для этого можно представить эволюцию связанной системы как динамику некоторой реализации чистого состояния  $\rho_i(t) = |\phi_i(t)\rangle \langle \phi_i(t)|$  (индекс  $i$ , нумерующий единичные реализации, будем опускать в тех местах, где это не вызывает недоразумений). В этом случае стохастическая волновая функция связанной системы  $|\phi_i(t)\rangle = \sum_{n,\sigma} C_{i,n,\sigma}(t) |n\sigma\rangle$  может быть разложена по базису  $|n\sigma\rangle = |n\rangle \otimes |\sigma\rangle$ , где  $\otimes$  означает тензорное произведение фоковского базиса линейного осциллятора  $|n\rangle$  и собственного базиса кубита  $|\sigma\rangle$ . Следовательно, состояние системы описывается  $2N$ -компонентной стохастической волновой функцией, где  $N$  — число уровней нелинейного осциллятора.

Для начала проведем конечно-разностную аппроксимацию уравнения (9)

$$\rho(t + \Delta t) = U \rho(t) U^\dagger + \Delta t (\Gamma_\varphi \sigma_z \rho \sigma_z + \Gamma_e \sigma_- \rho \sigma_+ + \gamma a \rho a^\dagger). \quad (10)$$

Можно видеть, что изменение матрицы плотности  $\rho(t + \Delta t) = \sum_i |\phi_i(t + \Delta t)\rangle \langle \phi_i(t + \Delta t)|$  обусловлено дву-

мя возможными вкладами, сопровождающимися изменением коэффициентов  $C_{i,n,\sigma}(t)$  стохастической волновой функции  $|\phi_i(t)\rangle$ .

Первый вклад (первое выражение в формуле (10)) определяется оператором эволюции  $U = e^{-iH_{\text{dis}} \Delta t / \hbar}$  и отвечает за диссипативную динамику системы с гамильтонианом Вигнера–Вайскопфа

$$H_{\text{dis}} = H - i\hbar \frac{\Gamma_\varphi}{4} \sigma_z^\dagger \sigma_z - i\hbar \frac{\Gamma_e}{2} \sigma_+ \sigma_- - i\hbar \frac{\gamma}{2} a^\dagger a. \quad (11)$$

При этом изменение волновой функции  $|\phi_i(t)\rangle$  („траекторий“) можно представить выражением

$$|\phi_i(t + \Delta t)\rangle = U |\phi_i(t)\rangle / \sqrt{1 - \Delta P}, \quad (12)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Delta P = \Delta t \bar{\gamma},$$

$$\bar{\gamma} = \Gamma_\varphi + \frac{\Gamma_e}{2} \left( 1 + \sum_{n,\sigma} \sigma |C_{i,n,\sigma}(t)|^2 \right) + \gamma \sum_{n,\sigma} n |C_{i,n,\sigma}(t)|^2.$$

Второе слагаемое в уравнении (10) можно связать со спонтанными переходами (скачками) в системе за счет взаимодействия с бозонным термостатом. Попробуем придать данному слагаемому вероятностный смысл, имея в виду, что с уравнением (10) можно связать некоторый случайный процесс, который будет имитировать относительный вклад диссипативной динамики и спонтанных переходов, происходящих с вероятностью  $\Delta P$ , а изменение „траекторий“ может сопровождаться в рассматриваемой системе одним из скачков: фазовым или энергетическим для кубита и спонтанным испусканием кванта для осциллятора. При этом данные процессы влияют на мгновенное (на интервале времени разрешения  $\Delta t$ ) изменение коэффициентов разложения  $C_{i,n,\sigma}(t)$  для волновой функции  $|\phi_i(t)\rangle$ :

в случае фазового скачка для кубита

$$C_{i,n,\sigma}^\varphi(t + \Delta t) = \sigma C_{i,n,\sigma}(t),$$

в случае энергетического скачка для кубита

$$C_{i,n,\sigma}^e(t + \Delta t) = \frac{\sum_{\sigma'} (\sigma_-)_{\sigma\sigma'} C_{i,n,\sigma'}(t)}{\sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n,\sigma} \sigma |C_{i,n,\sigma}(t)|^2 \right)}},$$

в случае энергетического скачка для осциллятора

$$C_{i,n,\sigma}^\gamma(t + \Delta t) = \frac{\sqrt{n+1} C_{i,n+1,\sigma}(t)}{\sum_{n,\sigma} n |C_{i,n,\sigma}(t)|^2}.$$

Коэффициенты разложения определены со следующими весами:

$$p_\varphi = \frac{\Gamma_\varphi}{\bar{\gamma}}, \quad p_e = \frac{\Gamma_e}{2\bar{\gamma}} \left( 1 + \sum_{n,\sigma} \sigma |C_{i,n,\sigma}(t)|^2 \right),$$

$$p_\gamma = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} \sum_{n,\sigma} n |C_{i,n,\sigma}(t)|^2.$$

Итак, решая уравнения для коэффициентов разложения волновой функции  $C_{i,n,\sigma}(t)$ , за время наблюдения эволюции системы мы получаем квантовую траекторию, представляющую одну реализацию мысленного эксперимента. Поскольку процесс релаксации является случайным, каждая траектория уникальна. Для нахождения усредненной динамики (аналог того, что получается в результате решения уравнения (9)) следует получить набор реализаций  $M \sim 1000-10\,000$  и усредненную матрицу плотности

$$\rho = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\phi_i(t)\rangle \langle \phi_i(t)|. \quad (13)$$

Можно вычислить ожидаемое значение любой наблюдаемой величины квантовой системы. Например, среднее число квантов осциллятора для двух состояний кубитов (основного „ $\downarrow$ “ ( $\sigma = -1$ ) и возбужденного „ $\uparrow$ “ ( $\sigma = 1$ )) составляет

$$\begin{aligned} \bar{n}_{\uparrow} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} n |C_{i,2n+1,\uparrow}(t)|^2, \\ \bar{n}_{\downarrow} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{n=0}^{N-1} n |C_{i,2n,\downarrow}(t)|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что квантовый метод Монте-Карло по сравнению с прямым решением уравнения для матрицы плотности имеет ряд преимуществ. Во-первых, это возможность исследовать релаксационные процессы квантовых систем в единичных реализациях. Во-вторых, данный метод позволяет осуществить эффективное распараллеливание численного алгоритма. Поскольку реализации состояний статистически независимы, есть возможность генерировать каждую реализацию в отдельном потоке (на отдельном процессоре), собирая затем данные и производя усреднение.

#### 4. Временной мониторинг состояния кубита в единичных реализациях и в среднем при подаче Раби-импульса

При изучении процесса детектирования состояния кубита измерительным осциллятором важную роль играет соотношение между собственной частотой кубита  $\omega_q$  и плазменной частотой джозефсоновского измерительного осциллятора  $\omega_J$ . Предварительные численные эксперименты по моделированию систем с различными энергетическими параметрами показали, что если  $\omega_q \approx \omega_J$ , то при записи информации на кубит Раби-импульсом с частотой  $\omega$  происходит процесс сильной перекачки энергии между подсистемами, что усложняет процесс записи, а также усиливает эффект обратного действия (влияние измерительного прибора на состояние кубита). Когда частоты кубита и осциллятора сильно различаются, процесс измерения состояний кубита будет

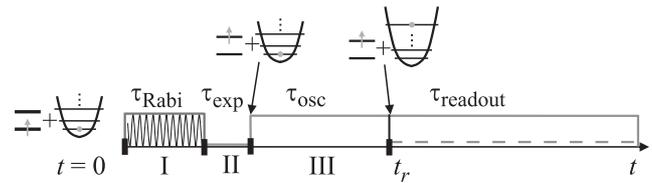


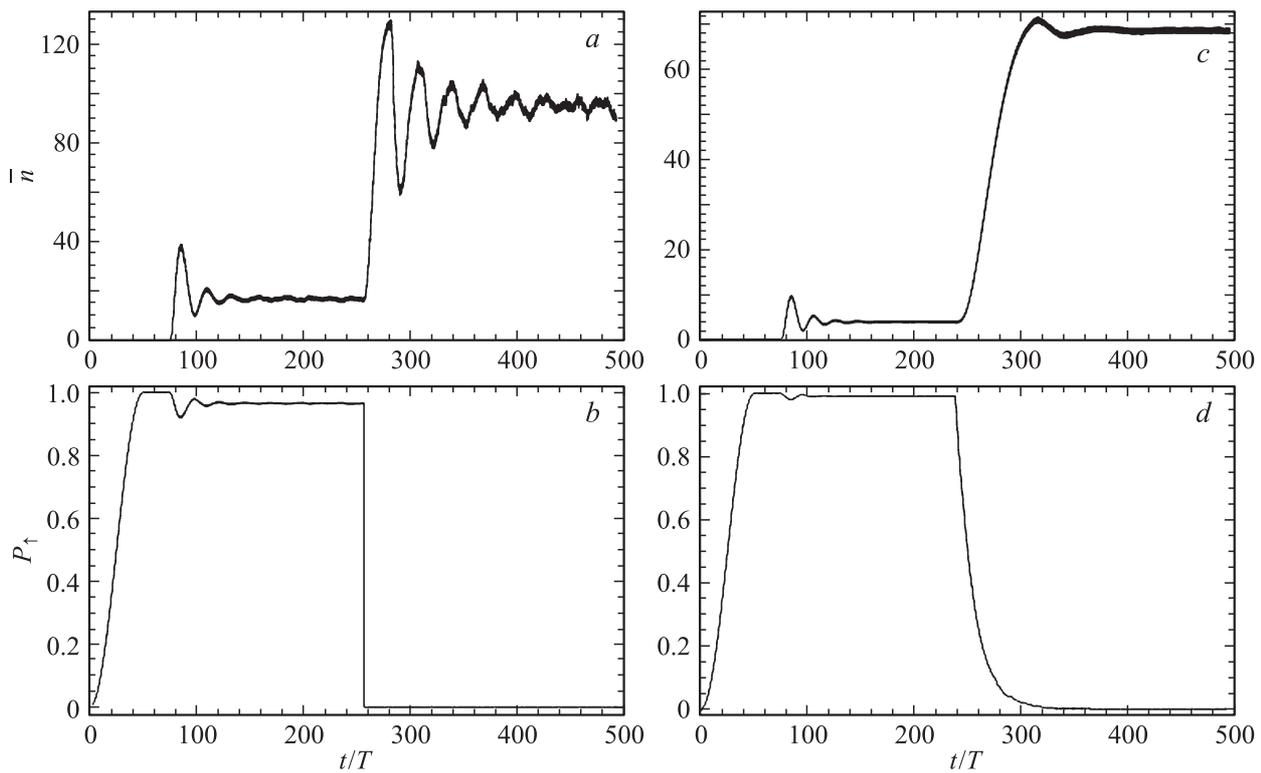
Рис. 2. Временная развертка последовательности подачи импульсов на систему кубит–осциллятор. Область I — управляющий импульс записи  $\tau_{\text{Rabi}}$ , область II — время ожидания  $\tau_{\text{exp}}$ , область III соответствует импульсу „запитки“ измерительного сигнала  $\tau_{\text{osc}}$ , а штриховая прямая (начиная с  $t_r$ ) — считыванию информации  $\tau_{\text{readout}}$ .

затруднен ввиду слабой связи между подсистемами. Таким образом, исследования показали, что наилучшим для проведения измерений является диапазон частот, определяемый соотношением  $3 < \omega_q/\omega_J < 12$ , что соответствует экспериментальным данным [1].

На основе экспериментов по неразрушающему измерению сверхпроводниковых кубитов [1–3], была предложена схема считывания состояний кубита на базе импульсного воздействия, представленная на рис. 2. Предварительно проводится инициализация системы, когда кубит и осциллятор приготовлены в основных состояниях. При этом в начальный момент времени волновая функция системы для  $i$ -й реализации выбирается в виде

$$|\phi_i(0)\rangle = \sum_{n=0}^N \sum_{\sigma=1}^2 C_{i,n,\sigma}(0) |n\sigma\rangle,$$

где  $C_{i,n,\sigma}(0) = 0$ , кроме  $C_{i,0,1}(0) = 1$ . Далее на кубит подается Раби-импульс записи заданной длительности  $\tau_{\text{Rabi}} = 2\pi/\Omega_{\text{Rabi}}$  ( $\Omega_{\text{Rabi}} = \sqrt{(\omega_q - \omega)^2 + A^2}$  — частота Раби). Естественно, за счет связи между подсистемами (кубит и измерительный осциллятор) после окончания действия импульса записи существует ненулевая вероятность возбуждения осциллятора. Хотя можно подобрать такие параметры системы, чтобы в результате осциллятор возбуждался лишь вблизи основного состояния. В силу этого для установления переходных процессов между подсистемами до момента подачи управляющего поля  $\tau_{\text{osc}}$  введено время ожидания  $\tau_{\text{exp}}$  (область II на рис. 2). Как показали численные эксперименты, длительность времени ожидания, достаточная для того, чтобы осциллятор находился вблизи основного состояния с вероятностью 99%, составляет  $\tau_{\text{exp}} \sim 0.5\tau_{\text{Rabi}}$ . После этого на измерительный прибор подается импульс „запитки“ длительностью  $\tau_{\text{osc}}$  (область III на рис. 2), который возбуждает осциллятор. К моменту времени  $t_r$  он захватывается в квантовый нелинейный резонанс и начинается действие считывающего импульса  $\tau_{\text{readout}}$  (на рис. 2 соответствующая область показана штриховой линией). При этом снимаются показания с измерительного осциллятора, находящегося вблизи точки бифуркации при мезоскопическом режиме работы (число квантов составляет несколько десятков).



**Рис. 3.** Одна реализация временного мониторинга населенностей нелинейного осциллятора  $\bar{n}$  (a) и вероятности нахождения кубита на верхнем уровне  $P_{\uparrow}$  (b); усредненная по  $M = 10\,000$  реализациям временная динамика населенностей нелинейного осциллятора  $\bar{n}$  (c) и вероятности нахождения кубита на верхнем уровне  $P_{\uparrow}$  (d). Параметры системы и шума:  $\omega_q = 6\omega_J$ ,  $\omega = 6.01\omega_J$ ,  $A = 0.02\hbar\omega_J$ ,  $f_0 = 0.2\hbar\omega_J$ ,  $\Omega = 1.02\omega_J$ ,  $\mu = 0.0001\hbar\omega_J$ ,  $\lambda = 0.02$ ,  $\Gamma_e = 0.00065\hbar\omega_J$ ,  $\Gamma_\varphi = 0.001\hbar\omega_J$  и  $\gamma = 0.01\hbar\omega_J$ .

В случае  $\pi$ -импульса записи осциллятор позволяет произвести неразрушающие измерения состояний кубита, так как после записи информации гамильтониан кубита коммутирует с гамильтонианом измерительного прибора. Благодаря данному факту возможно извлечение информации о состоянии кубита в каждой уникальной реализации — аналог „однократных“ измерений [3]. Квантовым методом Монте-Карло в соответствии со схемой подачи импульсов, изображенной на рис. 2, промоделировано поведение населенности возбужденного уровня кубита и изменение числа фотонов для единичной реализации ( $M = 1$ ), (рис. 3, a, b).

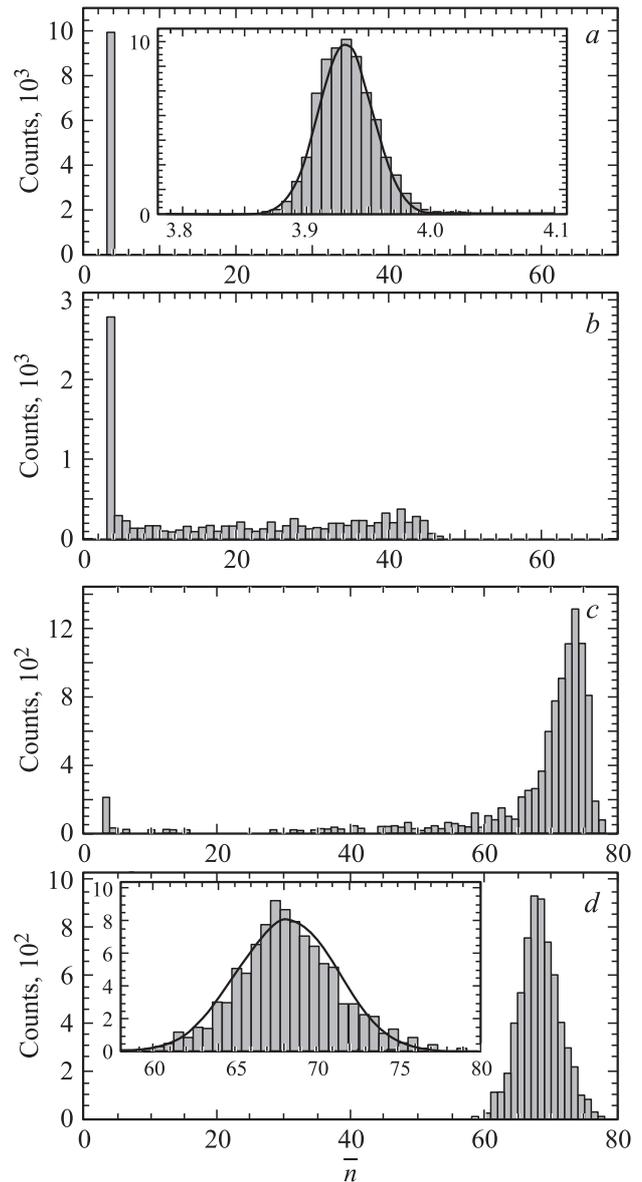
Из анализа единичных траекторий, аналогичных тем, что изображены на рис. 3, a, b, следует, что после начала воздействия внешнего поля на осциллятор вероятность возбужденного уровня кубита испытывает небольшие колебания, что соответствует эффекту обратного действия. Численные эксперименты показали, что перекачка энергии между подсистемами составила примерно 1% для параметров системы, соответствующих рис. 3, a, b. Выяснено, что чем больше амплитуда внешней силы (тока) для осциллятора, тем сильнее эффект обратного действия. Так, например, для  $f_0 = 0.4\hbar\omega_J$  перекачка энергии между подсистемами составляет уже 5%. Спустя некоторое время установления  $\tau_{\text{osc}} \sim 100T_0$  ( $T_0 = 2\pi/\Omega$ ) осциллятор захватывается в нелинейный резонанс вблизи некоторой группы уровней, что соответствует условию

но среднему значению населенностей  $\bar{n}_{\uparrow}$  для возбужденного состояния кубита.

Как известно, основным параметром, влияющим на спонтанное изменение состояния кубита, является нарушение когерентности в системе, связанное с энергетическим шумом. В случайный момент времени, определяемый характерным временем энергетической релаксации  $\tau_e = 1/\Gamma_e$ , кубит мгновенно (за время, меньше предела временного разрешения экспериментальной установки) переходит из возбужденного состояния в основное (например, в случайной реализации, изображенной на рис. 3, a, b, скачок произошел при  $t = 260T$ ). При этом кубит передает квант энергии осциллятору, работающему в мезоскопическом режиме вблизи точки бифуркации, что неминуемо влияет на изменение его числа фотонов. На бифуркационной кривой для нелинейного осциллятора это соответствует „перебросу“ с одной резонансной кривой на другую ( $\bar{n}_{\uparrow} \rightarrow \bar{n}_{\downarrow}$ ) при фиксированной частоте и амплитуде внешнего поля. Таким образом, в эксперименте, следя только за показаниями измерительного прибора (во время действия импульса  $\tau_{\text{readout}}$ ), можно восстановить информацию о состоянии кубита в реальном времени. Следовательно, бифуркационный осциллятор может выступать в роли детектора квантовых скачков для мониторинга состояний системы в реальном времени и реализации „однократных“ измерений.

Квантовый метод Монте-Карло может быть использован при моделировании результатов, наблюдаемых в экспериментах по проективным измерениям [1,2], т.е. динамики системы, усредненной по реализациям. В этом случае проводится  $M \sim 10\,000$  повторений опытов согласно схеме подачи управляющих импульсов, изображенной на рис. 2. При этом погрешность за счет использования стохастического метода зависит от числа повторений и составляет  $\sim 1/\sqrt{M} = 1\%$ . Момент квантового скачка населенности кубита (сброса в основное состояние) — случайный процесс на временах, близких к  $\tau_e = 1/\Gamma_e$ , что на усредненной зависимости населенности верхнего уровня кубита от времени (рис. 3, *d*) выглядит пологим спуском, характеризуемым временем энергетической релаксации, в отличие от резкого вертикального срыва в индивидуальном скачке (рис. 3, *b*). Плавное изменение состояния кубита (эволюция в основное состояние) отражается и в „затянутости“ выхода осциллятора на установившееся усредненное значение  $\bar{n}_\downarrow$  (рис. 3, *c*). По сравнению с одной реализацией усредненные характеристики являются более гладкими за счет усреднения по случайным реализациям. Скорость энергетической релаксации определяет быстроту перехода кубита из одного базисного состояния в другое. С увеличением скорости энергетических потерь в кубите переход в основное состояние становится более резким. Фазовый шум в данных экспериментах не оказывает сильного влияния на кубит, так как происходит лишь сбой фазы волновой функции, а энергия системы не изменяется.

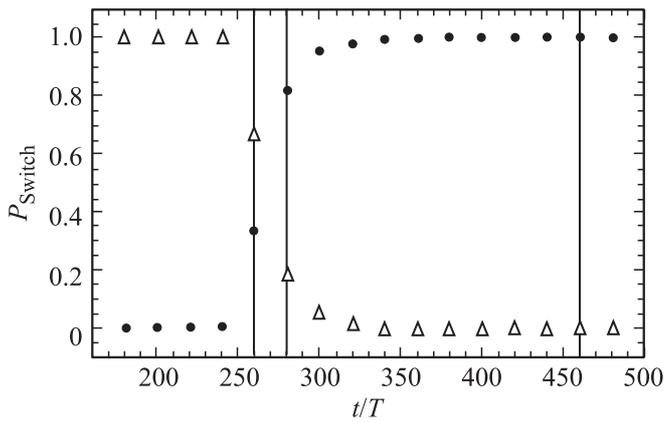
При анализе информации, считываемой с измерительного осциллятора, можно изучить разброс населенностей по уровням, чтобы понять, в каком состоянии ( $\downarrow$  — основное состояние,  $\uparrow$  — возбужденное) и с какой вероятностью находится кубит. Для этого с момента начала действия считывающего импульса  $t_r$  (рис. 2) необходимо хранить информацию о состоянии осциллятора для каждой квантовой траектории. После сбора необходимых статистических данных можно построить гистограммы распределения населенностей и проследить, как кубит переходит из возбужденного состояния в основное. Прямоугольные столбики на гистограмме (рис. 4) отражают, какое количество отсчетов для всех „квантовых траекторий“ попало в выделенный интервал населенностей. На рис. 4 приведены четыре гистограммы распределения вероятностей для различных моментов времени. Для случая, когда кубит находится в возбужденном состоянии (рис. 4, *a*), видно, что гистограмма распределения населенностей сосредоточена около значения  $\bar{n}_\uparrow \sim 3.93$  (центр распределения), а сплошная кривая — аппроксимирующая функция распределения — построена по статистическим данным для  $M = 10\,000$  реализаций. Ширина распределения  $\delta\bar{n}_\uparrow$  (основание гистограммы) лежит в интервале  $3.85 \leq \delta\bar{n}_\uparrow \leq 4.03$ . Все квантовые траектории попали именно в этот энергетический интервал, что свидетельствует о нахождении кубита на верхнем уровне с вероятностью 100%. Естественно, что ширины функций распределений для основного и



**Рис. 4.** Гистограммы распределения населенностей осциллятора в системе, представленной на рис. 3, *c*, для моментов времени  $t = 200T$  (*a*),  $260T$  (*b*),  $280T$  (*c*) и  $460T$  (*d*). Число реализаций  $M = 10\,000$ .

возбужденного состояний кубита различны, так как чем выше по энергии возбуждается осциллятор, тем большая группа уровней входит в нелинейный резонанс с частотой осциллятора. Ширина распределения для основного состояния кубита  $55 \leq \delta\bar{n}_\downarrow \leq 80$  (рис. 4, *d*).

Для переходного временного интервала, когда имеет место пологий спад и происходит перераспределение вероятностей населенностей уровней кубита, приведены две гистограммы (рис. 4, *b, c*). Видно, что до момента времени  $t = 260T$  (рис. 4, *a, b*) более вероятно возбужденное состояние кубита, а начиная с  $t = 280T$  (рис. 4, *c, d*) кубит находится с большей вероятностью в основном состоянии. Подобное разделение состояний



**Рис. 5.** Вероятность переключения  $P_{\text{Switch}}$  для возбужденного (треугольники) и основного (точки) состояний кубита. Параметры системы те же, что для рис. 3, c, d.

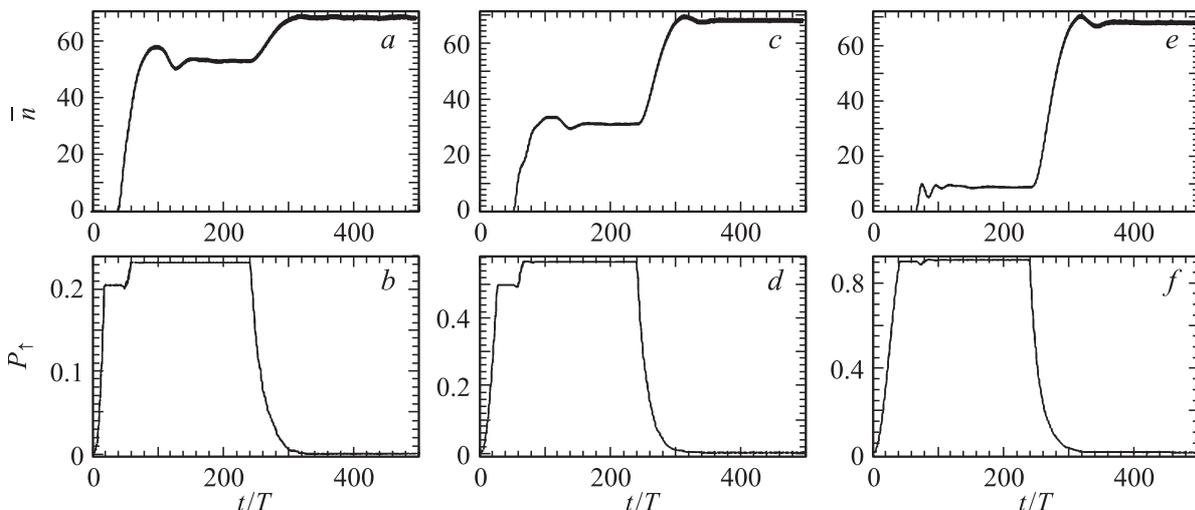
кубита возможно, так как населенности уровней осциллятора, соответствующих базисным уровням кубита, хорошо разнесены по числу квантов (функции распределения не перекрываются) и в момент энергетического скачка кубита населенности уровней осциллятора изменятся на значительную величину:  $\Delta\bar{n} = \bar{n}_\downarrow - \bar{n}_\uparrow \sim 50$  (интервал между центрами распределений базисных состояний), что и регистрируется в эксперименте.

Кроме того, можно ввести вероятность переключения  $P_{\text{Switch}}$ , характеризующую состояние кубита по числу квантов осциллятора, которая показывает долю квантовых траекторий, попавших либо в интервал энергий  $\delta\bar{n}_\uparrow$  (треугольники на рис. 5), либо в интервал  $\delta\bar{n}_\downarrow$  (точки на рис. 5). Вертикальные прямые на рис. 5 показывают моменты времени, отраженные на гистограммах распределения населенностей осциллятора (рис. 4). Ана-

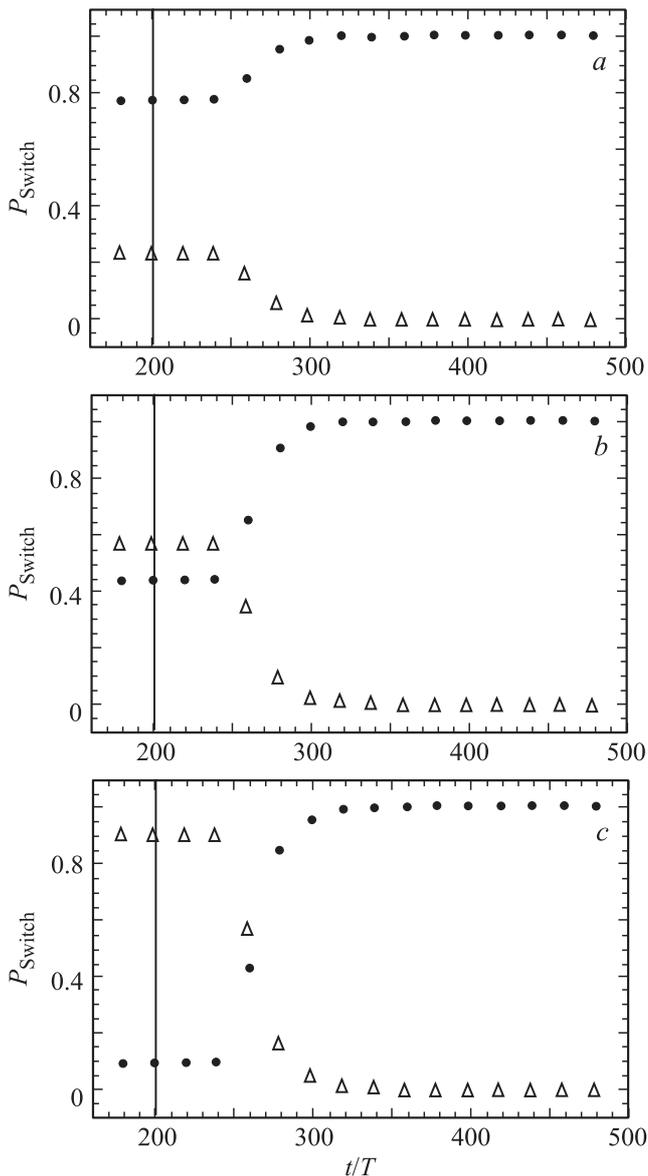
логичная величина измеряется в экспериментах [1,3], но не для временного мониторинга состояний кубита, а для сканирования по внешнему току.

### 5. Временной мониторинг суперпозиционного состояния кубита

В этом разделе описывается применение изложенной ранее методики „дискриминирования“ состояния кубита по измерению вероятностей переключения  $P_{\text{Switch}}$  населенностей нелинейного осциллятора, когда кубит находится в суперпозиционном состоянии. Для получения такого состояния можно использовать Раби-импульсы различной длительности  $\tau_{\text{Rabi}}$ , в момент прекращения действия которых кубит находится с вероятностью  $P_\downarrow$  на нижнем уровне и с вероятностью  $P_\uparrow$  на верхнем. Для демонстрации данной техники измерения было промоделировано действие Раби-импульсов длительностью  $\tau_{\text{Rabi}} = 0.3 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (рис. 6, a, b),  $\tau_{\text{Rabi}} = 0.5 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (рис. 6, c, d) и  $\tau_{\text{Rabi}} = 0.8 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (рис. 6, e, f). При этом импульсное воздействие полностью аналогично представленному на рис. 2, а измеряемые величины (населенность осциллятора и вероятность нахождения кубита на верхнем уровне) усреднены по  $M = 10\,000$  квантовым реализациям. В начальный момент действия импульса возбуждения измерительного прибора  $\tau_{\text{osc}}$ , как и для случая  $\pi$ -импульса, происходит процесс обратного действия. Далее осциллятор выходит на некоторое установившееся значение  $\bar{n}$ , которое соответствует суперпозиции состояний  $\bar{n}_\uparrow$  и  $\bar{n}_\downarrow$ , а доля содержания каждого из них характеризуется величиной  $P_{\text{Switch}}$ , представленной на рис. 7.



**Рис. 6.** Усредненная по  $M = 10\,000$  реализациям динамика населенностей нелинейного осциллятора  $\bar{n}$  (a, c, e) и вероятности нахождения кубита на верхнем уровне  $P_\uparrow$  (b, d, f) для различных значений длительности Раби-импульса:  $\tau_{\text{Rabi}} = 0.3 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (a, b),  $0.5 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (c, d) и  $0.8 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (e, f). Параметры системы те же, что для на рис. 3, a.



**Рис. 7.** Вероятность переключения  $P_{\text{Switch}}$  для возбужденного (треугольники) и основного (точки) состояний кубита при разной длительности импульсов записи:  $\tau_{\text{Rabi}} = 0.3 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (a),  $0.5 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (b) и  $0.8 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (c). Параметры системы те же, что для рис. 3, a.

Отметим, что благодаря такому способу считывания состояний кубита можно из экспериментальных численных данных найти долю обратного действия измерительного прибора на кубит, подавая импульс заданной длительности и рассчитав вероятность нахождения кубита в возбужденном состоянии. Например, для Раби-импульса  $\tau_{\text{Rabi}} = 0.5 \frac{2\pi}{\Omega_{\text{Rabi}}}$  (импульс  $\pi/2$ ) населенности верхнего и нижнего уровней кубита будут равны. Однако в результате измерений видно (рис. 7), что населенность верхнего уровня до момента энергетической релаксации ( $180T \leq t \leq 240T$ ) равна  $P_{\uparrow} = 0.57$ ; следовательно,

процесс передачи энергии от осциллятора к кубиту составил 7%. Аналогично можно провести расчеты и для других длительностей импульса.

Отметим, что временной мониторинг суперпозиционного состояния кубита в одной реализации указанным способом подачи сигналов не является информативным. Это связано с тем, что подсистемы являются сильно скоррелированными, и измерительный прибор в момент возбуждения будет передавать энергию кубиту, что может привести к полному возбуждению кубита.

## 6. Заключение

В работе на основе моделирования динамики системы кубит–измерительный осциллятор в бозонном термостате предложен способ временного мониторинга состояний кубита нелинейным осциллятором, работающим в мезоскопическом режиме, когда среднее число квантов хотя и велико, но конечно, а среднее квадратичное отклонение мало по сравнению с числом заполнения. Показано, что для заданной длительности импульса записи можно определить относительную величину влияния измерительного прибора на состояния квантовой системы (эффект обратного действия). Результаты численного моделирования позволили выявить, что с помощью нелинейного осциллятора можно проводить измерения, подобные „однократным“ в реальном времени для  $\pi$ -импульса записи, и наблюдать отдельные квантовые скачки. Для усредненной динамики системы на основе накопления статистических данных изучена эволюция плотности распределения средней энергии осциллятора, которая показывает вероятность нахождения кубита в том или ином базисном состоянии. Данный численный подход позволяет моделировать процесс „распутывания“ суперпозиционного состояния кубита по принципу неразрушающих проекционных измерений.

## Список литературы

- [1] I. Siddiqi, R. Vijay, M. Metcalfe, E. Boaknin, L. Frunzio, R.J. Schoelkopf, M.H. Devoret. *Phys. Rev. B* **73**, 054510 (2006).
- [2] T. Picot, A. Lupascu, S. Saito, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij. *Phys. Rev. B* **78**, 132508 (2008).
- [3] R. Vijay, D.H. Slichter, I. Siddiqi. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 110502 (2011).
- [4] М.О. Скалли, М.С. Зубайри. *Квантовая оптика*. Физматлит, М. (2003). 510 с.
- [5] M.B. Plenio, P.L. Knight. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101 (1998).
- [6] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, M.H. Devoret. *Science* **296**, 886 (2002)
- [7] V.B. Braginsky, F.Ya. Khalil. *Quantum measurement*. Cambridge University Press, Cambridge (1995). 191 p.