

09

## Оценка эффекта искривления светового луча во вращающейся линзе Люнеберга

© В.О. Гладышев, Д.Д. Базлева, А.А. Терешин, Т.М. Гладышева

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
E-mail: vgladyshev@mail.ru

Поступило в Редакцию 29 апреля 2016 г.

Выполнены оценки кривизны и углового отклонения когерентного электромагнитного излучения во вращающемся микроспутнике в виде линзы Люнеберга, входящем в оптический сегмент системы обеспечения точности глобальных навигационных систем нового поколения.

Эффект искривления светового луча в электродинамике сред с неоднородной скоростью движения обсуждался ранее в работах [1–3]. Анализ показывает, что эффект искривления траектории имеет первый порядок малости по отношению скорости движения среды к скорости света  $u/c$ . В работе [4] получено аналитическое выражение для расчета кривизны траектории волнового вектора монохроматической электромагнитной волны в среде с градиентом скорости. С помощью этого выражения можно оценить влияние релятивистских членов на величину эффекта. Также представляет интерес оценить величину эффекта с целью постановки нового теста по проверке электродинамики движущихся сред.

В работе [5] впервые проведено теоретическое описание и расчет микроспутника нового поколения в виде линзы Люнеберга [6,7] в подвижной системе координат с учетом эффектов электродинамики движущихся сред. Расчет был выполнен в пренебрежении искривлением траектории лучей в сферически симметричной двухслойной оптической системе, движущейся по околоземной орбите на высоте 835 km от Земли со скоростью 7500 m/s. В данной работе будут выполнены оценки углового и линейного отклонения лазерного излучения, отраженного линзой Люнеберга, в плоскости земного наблюдателя.

Так как рассматриваемая оптическая система в виде вращающейся линзы Люнеберга обладает аксиальной симметрией, рассмотрим

двумерный случай. Пусть траектория волнового вектора плоской монохроматической электромагнитной волны частотой  $\omega_0$  находится в плоскости  $XOZ$ , а центр системы координат совпадает с центром оптической системы. В геометрическом приближении траектория электромагнитной волны представляет собой световой луч, кривизна которого определяется градиентом от распределения скорости среды  $v(x, z)$ .

Искривление луча является следствием поперечного эффекта увлечения электромагнитного излучения в движущейся среде. Отклонение волнового вектора  $\mathbf{k}_0$  волны, падающей на рассматриваемую область движущейся среды, происходит в направлении градиента скорости. Следуя работе [4], рассмотрим случай, когда среда вращается в направлении против часовой стрелки. Используем обозначения:  $\rho_k$  — радиус кривизны,  $d\vartheta_2$  — дифференциал угла преломления в среде,  $dS$  — дифференциал пути,  $\mathbf{k}_2 = k_{2x}\mathbf{i} + k_{2z}\mathbf{k}$  — волновой вектор преломленной волны,  $\varepsilon_2, \mu_2$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$  — коэффициент преломления материала оптической системы.

Полагаем, что световой луч падает на внешнюю световую поверхность линзы под углом  $\vartheta_0$ , а затем распространяется в движущейся среде под углом преломления  $\vartheta_2$ , который изменяется вдоль траектории луча и зависит от скорости среды.

При распространении луча из точки 1 в точку 2 луч пройдет путь  $dS$ , причем волновой вектор  $\mathbf{k}_2$  (1) изменится на  $d\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2(2) - \mathbf{k}_2(1)$ .

Угол преломления определяется проекциями волнового вектора  $\mathbf{k}_2$  на оси  $OX$  и  $OZ$ :  $\vartheta_2 = \arctg \frac{k_{2x}}{k_{2z}}$ .

При перемещении из точки  $O$  в точку 1 касательная к траектории отклоняется на  $d\vartheta_2$ , поэтому геометрически кривизна  $k = \frac{1}{\rho_k} = \left| \frac{d\vartheta_2}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|$  представляет собой модуль изменения единичного вектора  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  на длине дуги  $ds$ , отнесенный к  $ds$ .

Для кривизны можно записать в общем виде с учетом релятивистских членов [4]:

$$k = \frac{\sin(\vartheta_2) \cos(\vartheta_2)}{k_2} \frac{\partial k_{2z}}{\partial z} = \frac{k_{2x} k_{2z}}{(k_{2x}^2 + k_{2z}^2)^{3/2}} \frac{\partial k_{2z}}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь использованы выражения для проекций волнового вектора [7]

$$k_{2x} = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0, \quad (2)$$

$$k_{2z} = \frac{\omega_0}{c} \eta_2 (-\kappa_2 \gamma_2^2 \beta_{2z} \xi_2 + \sqrt{Q_2}), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= n_2^2 - 1, & \gamma_2^{-2} &= 1 - \beta_2^2, & Q_2 &= \eta_2^{-1} \cos^2 \vartheta_0 + \kappa_2 \gamma_2^2 \xi_2^2, \\ \xi_2 &= 1 - \beta_{2x} \sin \vartheta_0, & \eta_2 &= \frac{1}{1 - \kappa_2 \gamma_2^2 \beta_{2z}^2}. \end{aligned}$$

Для среды, вращающейся со скоростью  $\omega$ , запишем  $\beta_{2x} = \frac{\omega}{c} (R - z)$ ,  $\beta_{2z} = \frac{\omega}{c} x$ .

Тогда после подстановки (2), (3) в (1) с учетом  $\frac{\partial \beta_{2z}}{\partial z} = 0$  для кривизны можно записать

$$k = \frac{\kappa_2 \gamma_2^2 \eta_2^2 \sin \vartheta_0 \frac{d\beta_{2x}}{dz} (-\kappa_2 \gamma_2^2 \beta_{2z} \xi_2 + \sqrt{Q_2}) \times (\beta_{2z} (\sin \vartheta_0 - 2\beta_{2x} \alpha_1) - \frac{1}{\sqrt{Q_2}} (\xi_2 \sin \vartheta_0 - \beta_{2x} \alpha_2))}{(\sin^2 \vartheta_0 + \eta_2^2 (-\kappa_2 \gamma_2^2 \beta_{2z} \xi_2 + \sqrt{Q_2})^2)^{3/2}}, \quad (4)$$

где  $\alpha_1 = \gamma_2^2 \xi_2 (1 + \kappa_2 \gamma_2^2 \eta_2)$ ,  $\alpha_2 = \gamma_2^2 (\xi_2^2 + \beta_{2z}^2 (2\eta_2 Q_2 - \cos^2 \vartheta_0))$ .

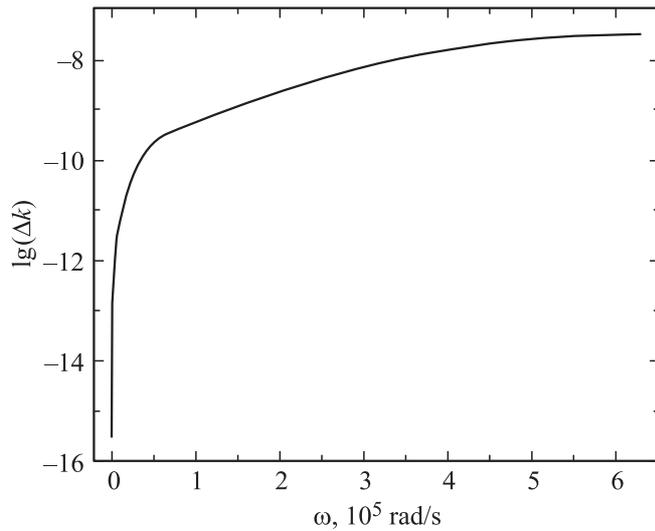
Из полученного выражения следует, что в релятивистском пределе кривизна траектории и угловое отклонение луча зависят от градиента скорости.

В нерелятивистском пределе выражение для кривизны упрощается

$$\tilde{k} = \frac{n_2^2 - 1}{n_2^3} \frac{\omega}{c} \sin^2 \vartheta_0. \quad (5)$$

В данном приближении выражение не зависит от координаты, следовательно, кривизна везде постоянна и траектория — окружность радиуса  $\rho_k$ .

В качестве примера рассмотрим процесс распространения электромагнитного излучения в автономной лазерной сферической стеклянной отражательной системе в виде линзы Люнеберга, которая находилась на солнечной геосинхронной круговой орбите в течение 3 лет. Высота орбиты данного спутника  $h$  составляла 835 km, скорость движения по орбите 7500 m/s. Угловое отклонение отраженных лучей, обусловленное поступательным движением микроспутника, было рассчитано в работе [5].



Зависимость релятивистской поправки  $\Delta k(\omega)$  от частоты вращения среды.

Сделаем оценку кривизны траектории излучения внутри микро-спутника вследствие его вращательного движения. Пусть угол падения излучения  $\vartheta_0$  на внешний миниск равен  $2^\circ$ , скорость вращения линзы  $\omega = 10$  грт, радиус внешнего миниска  $R = 85$  мм, показатель преломления  $n_2 = 1.76470$ , высота орбиты  $h = 835$  км, спутник находится в зените.

Согласно (5), получим  $\tilde{k} = 1.1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-1}$ ,  $\rho_k = 9.0 \cdot 10^8 \text{ м}$ . Отклонение луча относительно детектора на земной поверхности оценим следующим образом:

$$dx = h \sin \sqrt{2} R k = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Для сравнения можно привести результаты, полученные в статье [3]. В работе был сделан расчет и эксперимент по измерению продольного и поперечного эффекта Физо во вращающемся диске для следующих параметров: толщина диска  $d = 20$  мм; показатель преломления стекла  $n_2 = 1.7125$ ; длина волны лазера  $\lambda = 0.6329910 \mu\text{м}$ . Величина смещения полос вследствие эффекта Физо при частоте вращения диска 200 Hz составила  $\Delta_0 = 1.43 \cdot 10^{-2}$  полосы, что эквивалентно  $dx \approx 9 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

Из сравнения следует, что линейное смещение  $dx$  светового луча на земной поверхности, вызванное искривлением траектории луча в медленно вращающейся линзе Люнеберга, на несколько порядков превышает сдвиг интерференционных полос вследствие продольного и поперечного эффекта Физо во вращающемся оптическом диске.

Выясним, какое влияние оказывают члены более высоких порядков, т. е. определим вклад релятивистских поправок. Для оценки влияния членов, содержащих  $\beta_{2x}^2$ ,  $\beta_{2z}^2$  и более высокие порядки, проведены сравнительные расчеты по формулам (4) и (5) при  $n_2 = 1.7643$ ,  $\vartheta_0 = 60^\circ$ ,  $\lambda = 532 \text{ nm}$ ,  $R_0 = 0.1 \text{ m}$ . В результате получена релятивистская поправка  $\Delta k = k - \tilde{k}$  для различных угловых скоростей спутника. Зависимость  $\Delta k(\omega)$  изображена на рисунке, из которого следует, что при увеличении частоты вращения среды происходит нелинейное изменение величины  $\Delta k$ . При малых частотах вращения  $\Delta k$  стремится к нулю, а при релятивистских скоростях  $\Delta k$  стремится к значению порядка  $5 \cdot 10^{-8}$ .

Так же было проведено сравнение расчетных значений по формуле (5) для кривизны в линейном приближении с численными расчетами, выполненными в работе [8]. В данной работе были получены точные численные расчеты траектории луча  $z(x)$ , а также отклонения  $\tilde{R}$  от прямой линии во вращающемся диэлектрике для разных углов падения с учетом релятивистских членов.

При распространении луча во вращающемся диске луч очертит сегмент, высота которого

$$h = \rho_k - \sqrt{\rho_k^2 - s^2/4}.$$

Для параметров  $\vartheta_0 = 60^\circ$ ,  $R_0 = 0.1 \text{ m}$ ,  $\Omega \approx 10^4 \text{ Hz}$  можно оценить высоту сегмента  $h \approx 10^{-7} \text{ m}$  и получить  $k = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ;  $\rho_k = 12\,500 \text{ m}$ . При расчете кривизны и радиуса кривизны траектории излучения во вращающейся среде на основе (5) получим  $k = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ ;  $\rho_k = 11\,111 \text{ m}$ . Сравнение результатов расчетов указывает на приемлемую точность выражения (5) для вычисления кривизны траектории без учета релятивистских членов.

В качестве примера в расчетах использовалась медленно вращающаяся линза Люнеберга. В связи с небольшими скоростями вращения была получена относительно небольшая величина кривизны траектории. Увеличение скорости вращения линзы приведет к пропорциональному росту искривления траектории и отклонению лучей на земной поверх-

ности относительно детектора, что позволит осуществить новый тест электродинамики движущихся сред.

Заметим, что на длинных трассах, например в атмосфере, отклонение лучей вследствие искривления траектории будет накапливаться. Это может приводить к росту ошибки определения угла, под которым наблюдается летательный аппарат. Эффект может усиливаться при распространении когерентного излучения, когда небольшое угловое отклонение лучей приведет к их перемешиванию и влиянию на интерференционный сигнал, т. е. на распределение интенсивности в плоскости его регистрации.

Отклонение траектории лучей в движущейся атмосфере или при отражении от уголкового отражателя, установленных на борту космического летательного аппарата (или на лунной поверхности), ограничивает потенциальную точность систем локации, дальнометрии, глобальных спутниковых систем навигации типа ГЛОНАСС и GPS и т.п. В работе получены выражения, которые позволяют легко оценить угловое и пространственное отклонение луча в среде с неоднородным движением вследствие искривления траектории и имеют широкую область применения. Так, например, обсуждаемое явление необходимо учитывать при расчете и проектировании микроспутников в виде линзы Люнеберга, которые войдут в оптический сегмент ГЛОНАСС нового поколения для метрологического обеспечения. Рассмотренный вывод легко обобщается на более сложный случай, когда не существует единой инерциальной системы отсчета, в которой среда и граница раздела сред покоятся. Заметим также, что полученные выражения можно использовать для оценки искривления траектории даже при сложных законах движения, так как угловое отклонение лучей можно оценить по максимальной производной скорости среды.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-02-00488 А и № 16-08-00618 А.

## Список литературы

- [1] Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б. // Оптика и спектроскопия. 2005. Т. 98. В. 3. С. 486–491.
- [2] Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б. // УФН. 2006. Т. 176. В. 4. С. 421–439.
- [3] Гладышев В.О. // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. № 8. С. 593–597.

- 
- [4] *Гладышев В.О., Терешин А.А., Базлева Д.Д.* // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 103. № 7. С. 501–503.
- [5] *Гладышев В.О., Терешин А.А.* // Оптика и спектроскопия. 2016. Т. 120. В. 3. С. 115–123.
- [6] *Shargorodsky V.D., Vasiliev V.P., Belov M.S.* et al. // Proc. 15th International Workshop on Laser Ranging. Canberra, Australia, 2006. P. 566–570.
- [7] *Kucharski D., Kirchner G., Hyung-Chul Lim, Koidl F.* // Adv. Space Res. 2011. V. 48. P. 1335–1340.
- [8] *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* // УФН. 1989. Т. 159. В. 1. С. 155–180.