

03

Описание движения тела эллиптического сечения в вязкой несжимаемой жидкости с помощью модельных уравнений, реконструированных на основе обработки данных

© А.В. Борисов¹, С.П. Кузнецов^{1,3}, И.С. Мамаев^{1,2}, В.А. Тененев²

¹ Удмуртский государственный университет, Ижевск

² Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова

³ Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал
E-mail: spkuz@yandex.ru

Поступило в Редакцию 4 марта 2016 г.

На основе обработки временных рядов, полученных при численном решении плоской задачи о движении тела эллиптического сечения под действием силы тяжести в несжимаемой вязкой жидкости, реконструируется система обыкновенных дифференциальных уравнений для приближенного описания динамики. Для этого по методу наименьших квадратов подбираются коэффициенты, учитывающие присоединенные массы, силу, обусловленную циркуляцией поля скорости, и силы сопротивления движению. Соответствие конечномерного описания и моделирования на базе уравнений Навье–Стокса иллюстрируется портретами аттракторов в регулярных и хаотических режимах. Найденные коэффициенты позволяют судить о реальном вкладе тех или иных эффектов в динамику тела.

Известно, что при падении тел в виде тонких пластин в воздухе и в воде в зависимости от параметров и начальных условий наблюдаются различные режимы, в том числе падение с колебаниями в виде покачивания из стороны в сторону (флаттер) и с кувырканиями (авторотация) [1–4]. Эти режимы могут быть как периодическими, так и нерегулярными. Интересно выяснить их природу и условия их реализации в контексте теории динамических систем. Полное описание задачи о движении тела в вязкой несжимаемой жидкости подразумевает нахождение переменного во времени поля скоростей в окружающей

области на основе решения уравнений Навье–Стокса [1,5–7], что требует непростых ресурсоемких компьютерных расчетов.

Одно из интересных современных направлений состоит в разработке подводных роботов, движение которых в жидкости обеспечивалось бы перемещением внутренних масс [8–10]. Для управления таким роботом желательно иметь простую и компактную формулировку задачи о движении тела в среде, не требующую ресурсоемких вычислений.

В ряде работ в рамках двумерной задачи для тела эллиптического сечения (переходящей в пределе малого отношения главных осей в задачу о движении плоской пластины) были предложены модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с феноменологическим учетом сил, действующих со стороны окружающей жидкости [11,1–3]. К сожалению, эти модели могут претендовать лишь на качественное описание возможных режимов, а удовлетворительного количественного соответствия не достигается [4].

В настоящем сообщении предлагается подход, в рамках которого коэффициенты в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, форма которых изначально постулируется, находятся из обработки временных рядов, полученных при численном моделировании движения на основе уравнений Навье–Стокса. По-видимому, такого рода модели можно будет строить также путем обработки экспериментальных данных. Это частный пример широко обсуждаемой в контексте динамических систем и теории хаоса реконструкции модельных уравнений по наблюдаемому процессу [12,13].

Принципиальной основой для использования обыкновенных дифференциальных уравнений служит то обстоятельство, что в случае идеальной невязкой несжимаемой жидкости подсистема уравнений для обобщенных координат и скоростей тела отделяется от уравнений динамики жидкости, как показано в свое время Кирхгофом [14,15]. Влияние жидкости на динамику тела выражается в добавлении присоединенных масс и моментов инерции, обусловленных вовлечением в движение прилегающих областей жидкости.

Имея в виду плоскую задачу о движении тела, имеющего эллиптическое сечение с большой и малой полуосями a и b , используем нормированные переменные

$$u = v_x / \sqrt{\tilde{g}a}, \quad v = v_y / \sqrt{\tilde{g}a}, \quad w = \omega \sqrt{a/\tilde{g}}, \quad \tau = t \sqrt{\tilde{g}/a}, \quad (1)$$

где $\tilde{g} = g(1 - \rho)$, $\rho = \rho_f / \rho_s$, $\beta = b/a$, g — ускорение свободного падения, ρ_f — плотность жидкости, ρ_s — плотность тела, v_x и v_y —

проекции скорости тела, измеренной в лабораторной системе отсчета, на главные оси эллипса, $\omega = \dot{\theta}$ — угловая скорость тела. Добавляя в уравнения члены, отвечающие за сопротивление поступательному и вращательному движению, пропорциональные квадрату обобщенных скоростей [3], запишем

$$\begin{aligned} A\dot{u} &= Bvw - Dvw - C|u|u - \sin\theta, & B\dot{v} &= -Auw + Duw - E|v|v - \cos\theta, \\ \dot{w} &= -Guv - H|w|w, & \dot{\theta} &= w \end{aligned} \quad (2)$$

и для координат центра масс в лабораторной системе отсчета $X = x/a$, $Y = y/a$:

$$\dot{X} = u \cos\theta - v \sin\theta, \quad \dot{Y} = u \sin\theta + v \cos\theta. \quad (3)$$

Модель обладает зеркальной симметрией: $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow v$, $\theta \rightarrow -\theta$, $X \rightarrow -X$, $Y \rightarrow Y$, и симметрией относительно поворота на 180° : $u \rightarrow -u$, $v \rightarrow -v$, $\theta \rightarrow \theta + \pi$, $X \rightarrow X$, $Y \rightarrow Y$.

Подбору подлежат семь коэффициентов A, B, C, D, E, G, H . Коэффициенты A и B учитывают присоединенные массы, ассоциирующиеся с движением вдоль длинной и короткой главной оси эллипса. Соответственно структуре уравнений Кирхгофа коэффициенты A и B входят в первое и второе уравнения симметрично, и такую структуру разумно сохранить. Коэффициент D учитывает силу, определяемую циркуляцией поля скорости вокруг тела; циркуляция принята зависящей только от угловой скорости и прямо ей пропорциональной. (Оказывается, что учет вклада, обусловленного поступательным движением, по формуле Жуковского не способствует улучшению модели, по крайней мере, в рассмотренных здесь ситуациях.) Величины C и E задают силы сопротивления движению вдоль главных осей. Коэффициент G определяется моментом силы, возникающим из-за поступательного движения, а H учитывает момент сопротивления вращению; эти коэффициенты зависят также от собственного и присоединенного момента инерции.

Имея целью определить коэффициенты в уравнениях, предварительно проводим численное решение задачи о падении тела эллиптического сечения в жидкости в двумерной постановке [6,7]. По ходу расчетов осуществляется запись временных рядов для переменных X, Y, u, v, w, θ с малым шагом Δt . На рис. 1 режимы падения тела в жидкости иллюстрируются стробоскопическими изображениями его положения в пространстве.

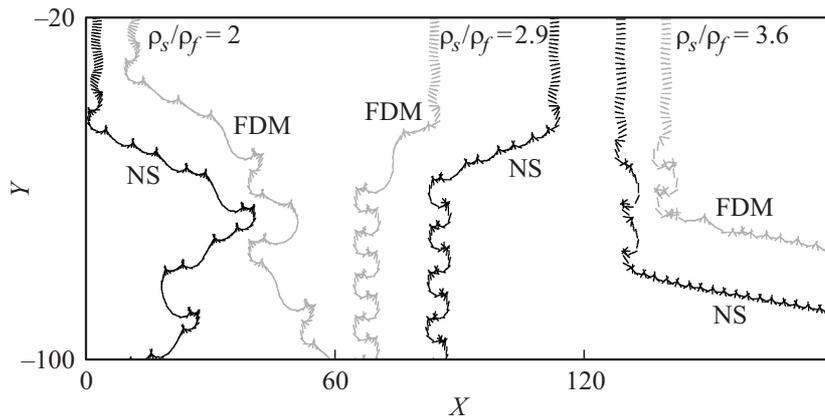


Рис. 1. Стробоскопическое представление падения тела в жидкости — показано положение большой полуоси эллипса в последовательные моменты времени с шагом 0.025 s, по результатам численного моделирования на основе уравнений Навье–Стокса (NS) и в рамках модели (2), (3) с коэффициентами из таблицы (FDM). Траектории в левой части рисунка отвечают хаотической авторотации, в центре — возникновению периодических автоколебаний (флаттера), в правой части рисунка — режиму периодической авторотации.

Для построения процедуры обработки данных замечаем, что на интервале времени длительности T , исходя из первых трех уравнений (2), можно записать

$$\begin{aligned}
 A[u(t_k+T) - u(t_k)] - B \int_{t_k}^{t_k+T} v w dt + D \int_{t_k}^{t_k+T} v w dt + C \int_{t_k}^{t_k+T} |u| u dt + \int_{t_k}^{t_k+T} \sin \theta dt &= 0, \\
 A \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt + B[v(t_k+T) - v(t_k)] - D \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt + E \int_{t_k}^{t_k+T} |v| v dt + \int_{t_k}^{t_k+T} \sin \theta dt &= 0, \\
 G \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt + H \int_{t_k}^{t_k+T} |w| w dt + [w(t_k+T) - w(t_k)] &= 0. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Далее, полагая $t_k = kT/2$, перебираем k от 1 до $k_{\max} = [2T_{\max}/T - 1]$ и находим интегралы численно, используя временные ряды, полученные

при решении задачи о падении тела в жидкости с привлечением уравнений Навье–Стокса. Для минимизации суммы

$$S = \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left[(Ap_1^k + Bp_2^k + Dp_3^k + Cp_4^k + a^k)^2 + (Aq_1^k + Bq_2^k + Dq_3^k + Eq_5^k + b^k)^2 + (Gs_1^k + Hs_2^k + c^k)^2 \right], \quad (5)$$

$$p_1^k = u(t_k + T) - u(t_k), \quad p_2^k = - \int_{t_k}^{t_k+T} v w dt, \quad p_3^k = \int_{t_k}^{t_k+T} v w dt,$$

$$p_4^k = \int_{t_k}^{t_k+T} |u| u dt, \quad p_5^k = 0, \quad a^k = \int_{t_k}^{t_k+T} \sin \theta dt,$$

$$q_1^k = \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt, \quad q_2^k = v(t_k + T) - v(t_k), \quad q_3^k = - \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt,$$

$$q_4^k = 0, \quad q_5^k = \int_{t_k}^{t_k+T} |v| v dt, \quad b^k = \int_{t_k}^{t_k+T} \cos \theta dt,$$

$$s_1^k = \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt, \quad s_2^k = \int_{t_k}^{t_k+T} u w dt, \quad c^k = w(t_k + T) - w(t_k)$$

решаем систему линейных алгебраических уравнений, распадающуюся на систему 5-го порядка для коэффициентов A, B, C, D, E и 2-го порядка для G, H :

$$\mathbf{ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = \{A, B, C, D, E\}, \quad \mathbf{cy} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{y} = \{G, H\}, \quad (6)$$

Коэффициенты в модельных уравнениях (2), описывающих движение в жидкости тела эллиптического профиля в зависимости от его плотности

$\rho_s, \text{kg/m}^3$	1710	2000	2300	2600	2900	3600
<i>A</i>	1.3945	1.3392	1.2581	1.1975	1.1551	1.0388
<i>B</i>	4.7378	3.9290	3.2845	2.7320	2.3245	1.9196
<i>C</i>	0.1069	0.0891	0.0873	0.0850	0.1209	0.1044
<i>D</i>	1.9730	1.8751	1.7952	1.6617	1.6221	1.2957
<i>E</i>	1.7720	1.5770	1.3803	1.3248	1.1254	0.7034
<i>G</i>	0.8681	0.8665	0.8516	0.7893	0.7710	0.5636
<i>H</i>	0.4130	0.3884	0.3163	0.2723	0.2775	0.0073

где элементы матриц **a**, **c** и векторов **b**, **d** с индексами $i, j = 1, \dots, 5$, $m, n = 1, 2$ имеют вид

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} (p_i^k p_j^k + q_i^k q_j^k), \quad b_j = \sum_{k=1}^{k_{\max}} (a^k p_j^k + b^k q_j^k),$$

$$c_{mn} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} s_m^k s_n^k, \quad d_n = \sum_{k=1}^{k_{\max}} c^k s_n^k. \quad (7)$$

Для серии вариантов, относящихся к телам разной плотности ρ_s , при задании

$$a = 0.00486 \text{ м}, \quad b = a/6 = 0.00081 \text{ м}, \quad \eta = 0.001 \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2 \quad (8)$$

обработка данных дает коэффициенты, приведенные в таблице. Параметр $T = 3$ был подобран эмпирически для лучшего соответствия динамики модели численным данным. Заметим, что вариант обработки с применением интегральной формулировки уравнений оказывается более успешным, чем непосредственная подгонка правых частей уравнений, отвечающая предельному случаю $T \rightarrow 0$.

Для случая идеальной жидкости коэффициенты, учитывающие присоединенные массы, вычисляются аналитически [14,1,4]: $A = 1 + \rho\beta$ и $B = 1 + \rho\beta^{-1}$, где $\rho = \rho_f/\rho_s$, $\beta = b/a$, т.е. $(A - 1)/(B - 1)$ — постоянная, определяемая геометрией: $\beta^2 = 1/36 \approx 0.0277\dots$ Замечательно, что по данным таблицы это отношение также практически постоянно: $\beta_*^2 \approx 0.115$ (с ошибкой в 3-м знаке после запятой, если исключить

крайние столбцы). Это, по-видимому, косвенно свидетельствует о правомерности выбранной формы уравнений. С другой стороны, комбинация $\rho^{-2}(A-1)(B-1)$, равная 1 в случае идеальной жидкости, не остается константой, заметно увеличиваясь в рассматриваемом диапазоне с ростом ρ .

Судя по числам из таблицы, вклад присоединенной массы для продольного движения $\sim (A-1)$ больше, чем дает теория идеальной жидкости, на фактор от 4 до 3 для столбцов с 1-го по 5-й. Для поперечного движения вклад присоединенной массы $\sim (B-1)$ для 1-го и 2-го столбца практически такой же, как для идеальной жидкости, но в остальных случаях меньше на фактор от 0.9 до 0.5. Оценить роль присоединенного момента инерции по имеющимся данным с достаточной достоверностью не удастся. Для тела в виде пластины, что эквивалентно эллипсу с большим отношением полуосей, циркуляция по формуле, выводимой из постулата Жуковского–Чаплыгина в предположении малой вязкости, $\Gamma = -2\pi a v_y \operatorname{sgn} v_x + \pi \theta a^2$ [14]. Если игнорировать первый член, то с учетом нормировки это отвечает $D = \rho \beta^{-1}$. Из таблицы можно видеть, что сила, определяемая циркуляцией, меньше этой величины на фактор от 1.8 (1-й столбец) до 1.3 (6-й столбец).

На рис. 1 стробоскопические диаграммы, полученные численным решением уравнений (2), (3) и помеченные меткой FDM, демонстрируют очевидное сходство с результатами прямого численного моделирования на основе уравнений Навье–Стокса. Точного совпадения наблюдаемых форм ожидать не приходится из-за чувствительности движений к возмущению начальных условий. На рис. 2 показаны фазовые портреты аттракторов модели (2), построенные по результатам расчетов для трех значений отношения плотности тела и жидкости. Два из них отвечают хаотической динамике, а третий — регулярному движению (предельный цикл). На рис. 3 для сравнения приводятся диаграммы, полученные при численном моделировании с решением уравнений Навье–Стокса. Сходство рис. 2 и 3 подтверждает успешность описания конечномерной моделью не только в качественном, но и в количественном отношении. Отметим, что для любого регулярного или хаотического аттрактора имеется две возможности: 1) объект симметричен, т.е. при преобразовании симметрии переходит в себя; 2) объект несимметричен, и при преобразовании получается другой объект той же природы — симметричный партнер. Такого рода сосуществующие аттракторы легко обнаруживаются при численном решении уравнений (2) с разными начальными условиями.

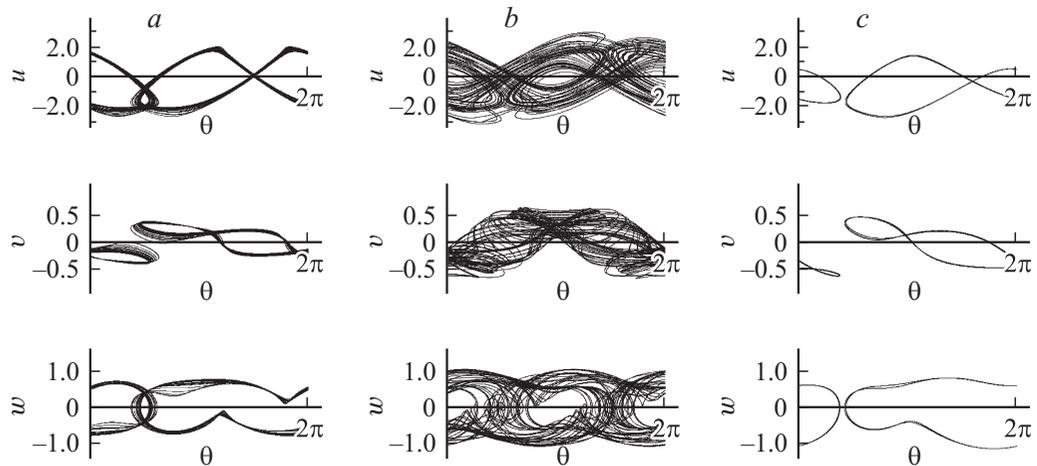


Рис. 2. Фазовые портреты аттракторов, построенные по результатам численных расчетов для модели (2), с коэффициентами из таблицы: a — $\rho_s = 1710 \text{ kg/m}^3$ (показатели Ляпунова 0.048, 0.000, -0.37 , -0.41); b — $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ (показатели Ляпунова 0.094, 0.000, -0.34 , -0.53), c — $\rho_s = 2600 \text{ kg/m}^3$ (показатели Ляпунова 0.000, -0.27 , -0.34 , -0.43).

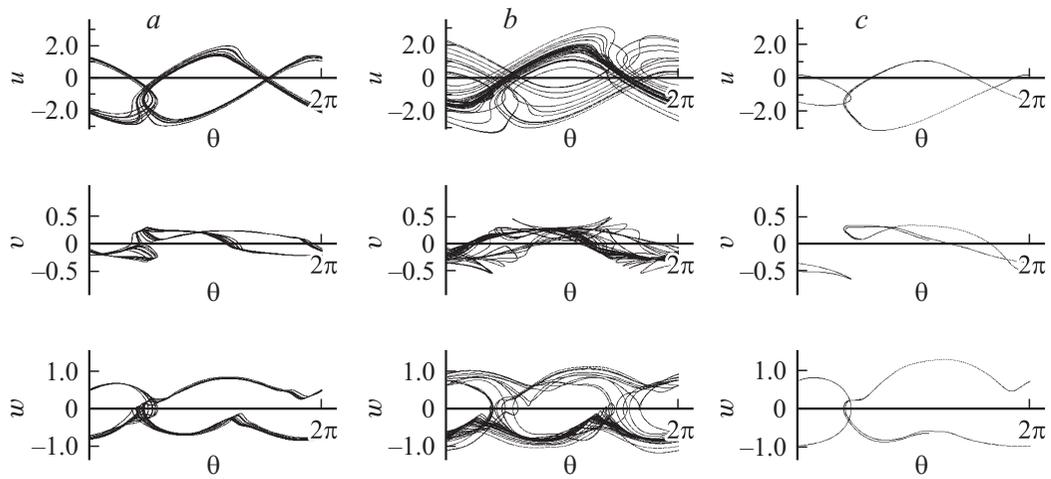


Рис. 3. Фазовые портреты аттракторов, построенные по результатам прямого численного моделирования динамики с решением уравнений Навье–Стокса при параметрах (8) и плотности тела $\rho_s = 1710 \text{ kg/m}^3$ (a), $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ (b), $\rho_s = 2600 \text{ kg/m}^3$ (c).

Имея конечномерную модель, для обоснования хаотической или регулярной природы движений можно провести вычисление спектра показателей Ляпунова. Для полной системы (2), (3) он включает два нулевых показателя, отвечающих возмущениям сдвига координат центра масс X и Y , и четыре показателя, относящихся к аттрактору подсистемы (2). Для аттракторов, отличных от неподвижной точки, один из этих четырех показателей всегда нулевой; он ассоциируется с возмущением типа сдвига вдоль фазовой траектории.

Учитывая присутствие в уравнениях (2) функций с разрывом второй производной, предпочтительным представляется вариант методики расчета показателей Ляпунова, не использующий линеаризованных уравнений в вариациях [13]. Для режимов, отвечающих первым трем столбцам таблицы, наличие положительного показателя говорит о хаотическом характере движения. Для остальных режимов наибольший показатель нулевой, что соответствует регулярным (периодическим) режимам (см. подпись к рис. 2.)

Таким образом, в данной работе показана возможность приближенного описания движения тела эллиптического сечения под действием силы тяжести в жидкости с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, реконструируемых на основе обработки результатов численного решения задачи на базе уравнений Навье–Стокса. Предлагаемый подход интересен, в частности, применительно к задачам управления движением тел в жидкости, поскольку описание динамики проще, чем при строгих вычислениях, а степень количественного соответствия лучше, чем у ранее обсуждавшихся феноменологических моделей.

Разработка конечномерной модели, расчеты на ее основе и сравнение данных выполнены А.В. Борисовым, С.П. Кузнецовым при поддержке гранта РФФИ № 15-12-20035. Численное решение уравнений Навье–Стокса с получением данных для обработки выполнено И.С. Мамаевым, В.А. Тененевым в рамках гранта РФФИ № 14-19-01303.

Список литературы

- [1] *Andersen A., Pesavento U., Wang Z.* // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 541. P. 65–104.
- [2] *Tanabe Y., Kaneko K.* // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 73. P. 1372–1375.
- [3] *Belmonte A., Eisenberg H., Moses E.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. N 2. P. 345–348.

- [4] *Kuznetsov S.P.* // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20. N 3. P. 345–382.
- [5] *Аульченко С.М., Каледин В.О., Шпакова Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 3. С. 33–39.
- [6] *Vetchanin E.V., Mataev I.S., Tenenev V.A.* // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. V. 18. P. 100–117.
- [7] *Рамоданов С.М., Тенев В.А.* // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 635–647.
- [8] *Kozlov V.V., Ramodanov S.M.* // J. Appl. Mathem. Mechanics. 2001. V. 65. P. 579–587.
- [9] *Ramodanov S.M., Tenenev V.A., Treschev D.V.* // Regul. Chaotic Dyn. 2012. V. 17. P. 547–558.
- [10] *Кулин А.А., Ветчанин Е.В.* // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 633–645.
- [11] *Козлов В.В.* // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 1. С. 79–86.
- [12] *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling. Springer Science & Business Media, 2010.
- [13] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2006.
- [14] *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
- [15] *Borisov A.V., Mataev I.S.* // Chaos. 2006. V. 16. N 1. P. 013–118.