

05

Динамическое деформационное старение материалов с пайерлсовским механизмом пластичности

© Б.В. Петухов

Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН,
119333 Москва, Россия
e-mail: petukhov@ns.crys.ras.ru

(Поступило в Редакцию 3 ноября 2015 г.)

Предложена синергетическая модель для описания влияния динамического деформационного старения на пластичность материалов, контролируруемую преодолением дислокациями барьеров Пайерлса. Принимается во внимание иммобилизация дислокаций собираемыми в дислокационные ядра примесями. Изучены типы поведения рассчитываемых деформационных кривых в зависимости от материальных параметров и условий механических испытаний.

Введение

Распространенным способом изучения механических свойств материалов является измерение деформационных кривых при заданной постоянной скорости деформации $\dot{\epsilon}$, т.е. изменения требуемого для поддержания процесса напряжения со временем t (или, что эквивалентно, с деформацией $\epsilon = \dot{\epsilon}t$). Затем обработкой деформационных кривых с использованием основополагающих моделей извлекают количественные характеристики механизмов деформации, например динамики дислокаций. Влияние неконтролируемых примесей часто искажает получаемые результаты. Поэтому полезно иметь возможность по качественному виду деформационных кривых определять вовлеченность в процесс примесных эффектов. В связи с этим возникает задача описания качественных изменений вида деформационных кривых под воздействием примесной подсистемы кристалла.

Тенденция дислокационных ядер обрастать примесями приводит к модификации динамического поведения дислокаций — так называемому „старению“. Следствиями дислокационного старения на макроскопическом уровне являются упрочнение материалов, изменение скоростной чувствительности деформирующего напряжения, иногда аномалии температурной зависимости пределов текучести и скачкообразное пластическое течение [1,2], называемые в совокупности динамическим деформационным старением материала (ДДС).

Описание пластичности материалов часто производится в рамках механистического подхода с помощью феноменологических уравнений, подбираемых для воспроизведения каких-либо экспериментальных результатов [3]. Однако динамическое деформационное старение по своей сути — процесс с памятью, поэтому установить правильный набор уравнений на чисто феноменологической основе довольно затруднительно. В данном случае представляется полезным включать физические представления о пластическом течении, как движении дислокаций через потенциальные барьеры, определяемые микроструктурой материала. Достоинством таких подходов является возможность учета специфики

материалов с различными механизмами подвижности дислокаций. Широкое распространение применительно к материалам, в которых движение дислокаций контролируется локальными препятствиями, получили теории диффузионного притока примесей в ядра в течение ожидания термической флуктуации, перебрасывающей дислокационный сегмент через препятствие [4,5]. В эти промежутки времени происходит фактически статическое старение дислокационных сегментов. Скачки дислокационных сегментов происходят на значительные расстояния, превышающие межатомное, что позволяет в этом случае не учитывать увлечение сбрасываемых примесей и предысторию накопления примесей в ядрах. Детальное описание физических основ таких теорий и многочисленные ссылки содержатся в обзоре [6]. Развиваются модели особенностей пластического течения, связанных с возникающей при определенных условиях N -образной формой скоростной чувствительности силы торможения дислокаций, например [7]. Менее развиты модели ДДС для материалов, в которых подвижность дислокаций контролируется собственным потенциальным рельефом кристаллической решетки — так называемыми барьерами Пайерлса — с периодом, равным постоянной решетки. В круг таких материалов входят ковалентные кристаллы, металлы с объемно-центрированной кубической решеткой, интерметаллиды и многие другие [1,2]. Целью настоящей работы является разработка теории ДДС для материалов подобного типа, в которых скачкообразность движения дислокаций сказывается лишь в микроскопическом масштабе, а на большем масштабе движение может считаться непрерывным. Строго говоря, именно в этом случае старение дислокаций имеет подлинно динамическую природу.

1. Синергетическая модель пластичности идеального кристалла за счет движения и размножения дислокаций в ансамбле

В качестве стартовой основы рассмотрим модель деформации достаточно совершенного кристалла с пре-

небрежимо низким содержанием примесей [8,9]. Полная скорость деформации $\dot{\epsilon}$ складывается из упругой $(1/S)d\sigma/dt$ и пластической $NbV(\sigma_{ef})$ составляющих

$$(1/S)d\sigma/dt = \dot{\epsilon} - NbV(\sigma_{ef}). \quad (1)$$

Здесь σ — приложенное напряжение, S — упругий модуль, t — время, N — плотность дислокаций, b — величина вектора Бюргера, V — скорость дислокаций, σ_{ef} — эффективное напряжение, получающееся модификацией внешнего напряжения σ внутренними напряжениями различной природы. Зависимость скорости от напряжения будем описывать выражением $V(\sigma_{ef}) = B\sigma_{ef}^m$, где B — дислокационная подвижность, m — эмпирический показатель скоростной чувствительности.

Способность дислокаций к саморазмножению будет описываться вслед за работами [8,9] эмпирическим законом

$$dN/dt = w\sigma_{ef}^n V(\sigma_{ef})N, \quad (2)$$

где значения параметров w и n варьируются от материала к материалу. Часто уравнение (2) дополняется также слагаемыми, описывающими аннигиляцию дислокаций [1,6,10]. Однако в настоящей работе этого делаться не будет, исходя из предположения о наличии сравнительно небольшой плотности подвижных дислокаций в рассматриваемой окрестности предела текучести.

Уравнения (1),(2) успешно применялись для описания особенностей деформации щелочно-галоидных и полупроводниковых кристаллов в работах [8–14] и др. Применяемые к различным материалам модели классифицируются значениями показателей степени (m, n) в зависимостях от напряжения фигурирующих в уравнениях (1), (2) функций. Для описания явления динамического деформационного старения следует обобщить теорию учетом взаимодействия дислокационного ансамбля с примесной подсистемой кристалла.

2. Динамическое деформационное старение

В дислокационных ядрах имеются энергетически предпочтительные места для примесей. В результате дислокации притягивают к себе примеси, которые либо диффундируют в ядра, либо собираются ими при контакте в процессе перемещения дислокации по кристаллу. Примеси, находящиеся в ядре дислокации, имеют собственное сцепление с кристаллической решеткой, что уменьшает силу, движущую дислокацию. Количество собранных в ядро примесей зависит от времени рождения дислокации и времени ее жизни (возраста!) в переменных внешних условиях, что придает буквальный смысл понятию старения. Таким образом, в динамике дислокационного ансамбля в примесных материалах существует своеобразная память о предшествующей индивидуальной истории движения дислокаций [14,15]. Этот факт означает, что деформация должна, строго говоря, описываться нелокальными по времени соотношениями,

что не принимается во внимание в большинстве феноменологических подходов. Ниже развивается модель, учитывающая разновозрастность дислокаций в ансамбле как необходимый ингредиент адекватного описания процесса деформации.

Чтобы это сделать, будем оперировать не полной плотностью дислокаций, а дифференциальной величиной: скоростью генерации дислокаций $\rho(t)$ в интервале времени между t и $t + dt$. Прирост полной плотности дислокаций ΔN за время dt будет даваться величиной $\Delta N = \rho(t)dt$. Полная плотность ко времени t представляет собой сумму вкладов, произведенных в различные предыдущие моменты времени. В результате имеем модифицированное соотношение (2)

$$\begin{aligned} \rho(t) &= wN_0\sigma_{ef}^n(t)V[\sigma_{ef}(t)] \\ &+ w \int_0^t dt_1 \rho(t_1)\sigma_{ef}^n(t, t_1)V[\sigma_{ef}(t, t_1)] \\ &= wBN_0\sigma_{ef}^{n+m} + wB \int_0^t dt_1 \rho(t_1)\sigma_{ef}^{n+m}(t, t_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N_0 — начальная плотность дислокаций, t_1 — время рождения новых дислокаций. Аналогичным образом изменяется уравнение для деформирующего напряжения (1)

$$\begin{aligned} (1/S)d\sigma/dt &= \dot{\epsilon} - bN_0V[\sigma_{ef}(t)] \\ &- b \int_0^t dt_1 \rho(t_1)V[\sigma_{ef}(t, t_1)] = \dot{\epsilon} \\ &- bBN_0\sigma_{ef}^m - bB \int_0^t dt_1 \rho(t_1)\sigma_{ef}^m(t, t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) наглядно иллюстрируют наличие памяти дислокаций об эволюции в предыдущие моменты их „биографий“.

Движение конкретной дислокации в примесном кристалле со временем затухает вследствие нарастания содержания примесей в ее ядре, и протекание деформации поддерживается за счет рождения новых „свежих“ дислокаций. Так, в теории Анантакришны [6] учитывается влияние атомов примесей на убывание плотности подвижных дислокаций непосредственным заданием скорости этого процесса во всем ансамбле. В предлагаемой в настоящей работе модели до некоторой степени принимается во внимание индивидуальная кинетика собирания примесей дислокационными ядрами. Это достигается учетом конкретного значения внешнего напряжения, действующего при рождении дислокации. Последующий процесс старения дислокации моделируется постепенным убыванием эффективного напряжения, движущего дислокацию, от момента ее рождения.

Будет рассматриваться ситуация, когда кинетика дислокации осуществляется на временах, малых по сравнению с кинетикой всего дислокационного ансамбля. Процесс иммобилизации отдельной дислокации будем моделировать с помощью убывания действующего на нее эффективного напряжения

$$\sigma_{\text{ef}}(t, t_1) = \sigma(t) \exp[-(t - t_1)/\tau_{\text{im}}]. \quad (5)$$

Здесь t — текущий момент времени, t_1 — момент рождения дислокации, τ_{im} — среднее время иммобилизации, определяемое темпом набора примесей в ядро. В момент рождения дислокации $t = t_1$ избытка примесей не ней нет и действующее на нее эффективное напряжение равно внешнему $\sigma_{\text{ef}}(t, t) = \sigma(t)$. При увеличении возраста дислокации $t - t_1$ движущее ее эффективное напряжение затухает вследствие нарастания в ядре примесного содержания и обусловленной им силы торможения. Время τ_{im} считается малым по сравнению с временем изменения напряжения $\sigma(t)$. Кинетика иммобилизации определяется такими факторами, как концентрация примесей в кристалле c_0 , сила их взаимодействия с дислокациями и т.п. Например, при полном увлечении примесей в слое шириной r , τ_{im} было оценено в [14,15] как $\tau_{\text{im}} \sim a^2/(rB\beta c_0)$. Здесь β — коэффициент пропорциональности между содержанием примесей на дислокации и создаваемым ими тормозящим напряжением. Таким образом, посредством параметра τ_{im} реализуется комбинированное влияние всех этих факторов на процесс деформации.

Отвлекаясь от некоторых второстепенных в рассматриваемом случае побочных явлений типа деформационного упрочнения, изучим возможные типы проявления динамического дислокационного старения в кинетике пластического течения в различных (m, n) моделях. Деформационное упрочнение может быть впоследствии приближенно учтено как дополнительный аддитивный вклад во внутреннее напряжение, не меняющий качественных выводов.

На деформационных кривых может иметься так называемый зуб текучести, в окрестности которого деформирующее напряжение меняется резко, а затем происходит переход к более плавному поведению. Расчет с помощью уравнений (3)–(5) показывает, что высота зуба текучести, называемая верхним пределом текучести, так же как его ширина, существенно модифицируются в примесных кристаллах по сравнению с беспримесными. Приведенные далее рисунки иллюстрируют эти изменения. Но к особенно показательным изменениям деформационных кривых динамическое старение дислокаций приводит на стадии, следующей за пределом текучести.

3. Стационарное состояние

С течением процесса деформации возможен выход на стационарное состояние (условия реализации которого будут изучены ниже). В стационарном состоянии напряжение и скорость генерации дислокаций принимают

постоянные значения $\sigma = \sigma_s$ и $\rho = \rho_s$ соответственно. Подставляя эти константы в уравнения (3)–(5) и выполняя интегрирование по времени, получаем в пределе $t \rightarrow \infty$ их значения

$$\sigma_s = \left(\frac{n+m}{wB\tau_{\text{im}}} \right)^{1/(n+m)}, \quad \rho_s = \frac{\dot{\epsilon}m}{bB\tau_{\text{im}}} \left(\frac{wB\tau_{\text{im}}}{n+m} \right)^{m/(n+m)}. \quad (6)$$

Можно сравнить полученное значение стационарного напряжения с аналогичной величиной, рассчитанной в модели полного увлечения примесей [14,15] для случая $m = 1$, $\sigma = [(n+1)\beta c_0 r / (wa^2)]^{1/(n+1)}$, и убедиться в их согласии при указанном выше значении времени иммобилизации τ_{im} . Обращает на себя внимание тот факт, что примесный вклад в деформирующее напряжение (6) не зависит от скорости деформации $\dot{\epsilon}$.

Ниже будет дано несколько иное представление уравнений модели, более удобное для расчетов и, в частности, для исследования устойчивости стационарного состояния. Подставляя явную зависимость эффективного напряжения от времени (5) в (3), деля обе части уравнения на $\sigma^{n+m} \exp[-(n+m)t/\tau_{\text{im}}]$ и дифференцируя по времени, получаем

$$\sigma \dot{\rho} - (n+m)\rho \dot{\sigma} + (n+m)\rho \sigma / \tau_{\text{im}} - wB\rho \sigma^{n+m+1} = 0. \quad (7)$$

Продельвая аналогичную процедуру с уравнением (4), приводим его к виду

$$\sigma \ddot{\sigma} - m\dot{\sigma}(\dot{\sigma} - S\dot{\epsilon}) + m\sigma(\dot{\sigma} - S\dot{\epsilon})/\tau_{\text{im}} + bBS\rho \sigma^{m+1} = 0. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (7), (8) имеют то же самое стационарное решение (6), как и следует.

4. Моды выхода на стационарное состояние и критерий его устойчивости

Целью этого раздела является исследование вида деформационных кривых за пределом текучести в зависимости от параметров задачи, в первую очередь от показателей (m, n) . Изучим с помощью полученной системы дифференциальных уравнений (7), (8) поведение вблизи стационарного решения (6) в линейном по отклонениям приближении, полагая $\rho = \rho_s + \delta\rho$, $\sigma = \sigma_s + \delta\sigma$. В дальнейшем будем использовать масштабные факторы для напряжения S , для времени $t_0 = 1/(wBS^{m+n})$, для скорости генерации дислокаций $\rho_0 = (1/b)w^2BS^{m+2n}$, для плотности дислокаций $\rho_0 t_0$, а также безразмерные параметры $\varepsilon = \dot{\epsilon}t_0$, $\tau = \tau_{\text{im}}/t_0$.

Для исследования устойчивости стационарного решения будем искать временную зависимость отклонений в виде $\delta\rho, \delta\sigma \sim \exp(\lambda t/\tau)$. Стандартным образом получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (9)$$

где $a_1 = (m+u)$, $a_2 = (n+2m)u$, $a_3 = (n+m)^2u$, $u = m\varepsilon\tau/\sigma_s$.

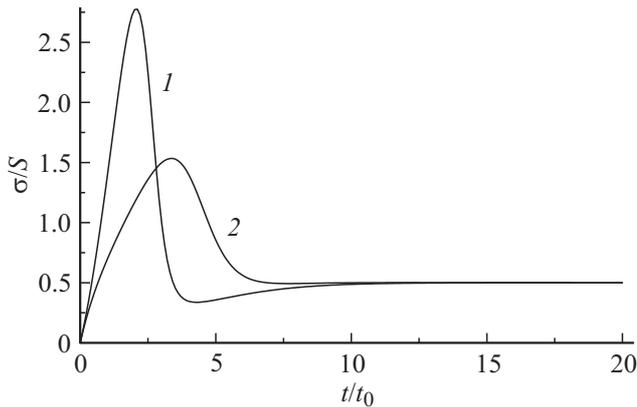


Рис. 1. Деформационные кривые для значений параметров $n = 0, m = 1, \tau = 2, \epsilon = 0.99$ (1), $\epsilon = 1.01$ (2).

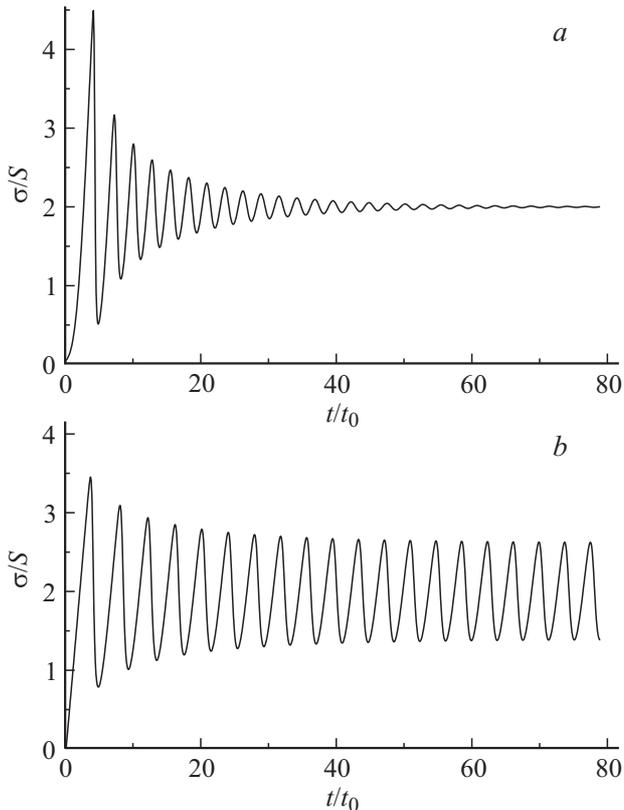


Рис. 2. Деформационные кривые для значений параметров $n = 1, m = 1, \tau = 0.5, \epsilon = 2$ (a), $\epsilon = 0.5$ (b).

Стационарное состояние будет устойчиво, если отклонения от него $\delta\rho, \delta\sigma \sim \exp(\lambda t/\tau)$ убывают со временем, что имеет место, когда действительные части всех решений характеристического уравнения отрицательны. Согласно известному критерию для кубического уравнения (см., например, [17]), это реализуется при $a_1 a_2 > a_3$, т.е. в данном случае при $u > \frac{n^2 + nm - m^2}{n + 2m}$. Если $n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}m$, правая часть отрицательна или равна нулю и устойчивость выполняется при любых прочих параметрах. Например, при $n = 0$ стационарное состояние

устойчиво при любых неотрицательных m . Это согласуется с видом деформационных кривых, рассчитанных с помощью уравнений (7), (8) и проиллюстрированных на рис. 1. Требующееся для устойчивости ограничение на u имеет место при $n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}m$. Например, при $n = 1, m = 1$ для устойчивости требуется $u = \epsilon\tau^{3/2}/\sqrt{2} > 1/3$. В этом случае деформационная кривая имеет вид, изображенный на рис. 2, a, и выход на стационарное состояние происходит путем затухающих осцилляций. При $\epsilon\tau^{3/2}/\sqrt{2} \leq 1/3$ стационарное состояние неустойчиво и вместо него реализуются незатухающие колебания, как это проиллюстрировано на рис. 2, b.

Найдем условие наличия осцилляций на деформационных кривых при однородной деформации. Осцилляций не будет, когда все 3 корня характеристического уравнения действительны. Тривиально исследуется случай $n = 0$, когда характеристическое уравнение легко решается и имеет корни $\lambda_3 = -m, \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\{-u \pm (u^2 - 4mu)^{1/2}\}$. Корни действительны при $u (= m^{1-1/m}\epsilon\tau^{1+1/m}) \geq 4m$. При $u < 4m$ можно ожидать наличия осцилляций на деформационных кривых. Однако, как показывает расчет, хотя осцилляции в этом случае действительно есть, размах их мал и на рис. 1 они проявляются лишь в одном видимом глазу минимуме за зубом текучести.

Займемся общим случаем при $n > 0$. При малых u имеется один действительный отрицательный корень $\lambda_3 \approx -m$, а два других имеют мнимые части $\lambda_{1,2} \approx -u/2 \pm i(mu)^{1/2}$. При больших u один корень большой отрицательный $\lambda_3 \approx -u$, два других определяются выражением

$$\lambda_{1,2} \approx \frac{1}{2}\{-(n + 2m)\} \pm i[3n^2 + 4nm]^{1/2}. \quad (10)$$

Таким образом, при $n, m > 0$ корни могут быть вещественными лишь в ограниченном промежуточном интервале значений u . Теория кубических уравнений утверждает, что типы решения классифицируются с помощью дискриминанта [17]

$$\begin{aligned} D &= a_1^2 a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - 27a_3^2 + 18a_1 a_2 a_3 \\ &= -n(3n + 4m)u^3 + (14n^2 + 38nm + 26m^2)nu^2 \\ &\quad + (-27n^4 - 90n^3m - 101n^2m^2 - 38nm^3 + m^4) \\ &\quad \times u - 4(n + m)^2 m^3 \end{aligned} \quad (11)$$

и исчерпываются тремя, описанными ниже.

1. $D > 0$, уравнение имеет три различных вещественных корня.
2. $D < 0$, уравнение имеет один вещественный и пару комплексно-сопряженных корней.
3. $D = 0$, уравнение имеет три вещественных корня, по крайней мере два из которых совпадают.

Таким образом, граница между осциллирующим и монотонным поведением деформационных кривых за

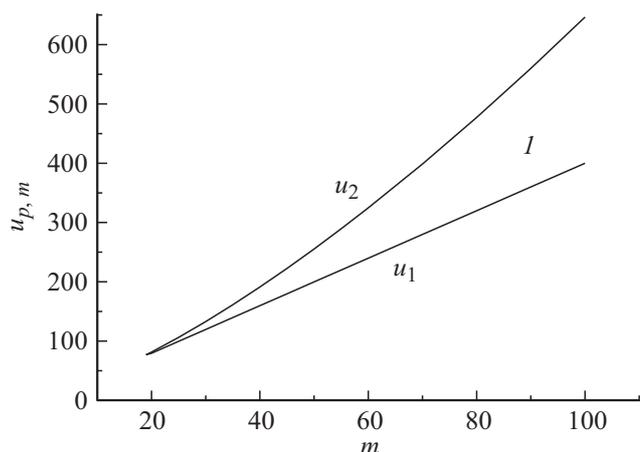


Рис. 3. Области значений параметров, при которых имеет место либо монотонное (I), либо осциллирующее поведение деформационных кривых за пределом текучести.

пределом текучести определяется условием $D = 0$ и, когда она существует, может быть рассчитана с помощью выражения (11). В качестве иллюстрации результат подобного расчета изображен на рис. 3 для $n = 1$ и произвольных m . При параметрах, отвечающих области I, между границами u_1 и u_2 можно ожидать монотонного поведения деформационных кривых, в остальных случаях — осциллирующего.

На рис. 4 проиллюстрированы фазовые диаграммы различных типов решений для модели $m = n = 1$, реализующихся при значениях управляющего параметра u по разные стороны от критического $1/3$: устойчивый фокус при $D > 0$ ($u = 1, 4a$) и предельный цикл, когда $D < 0$ ($u = 0.2, 4b$).

5. Обсуждение результатов

Взаимодействие дислокаций с примесной подсистемой оказывает существенное влияние на механические свойства материалов, в частности на их пластичность. Модель деформации чистого материала, даваемая уравнениями (1), (2), приводит, если отвлечься от деформационного упрочнения, к монотонному устойчивому поведению деформационных кривых за пределом текучести. Обобщенная модель для легированных материалов и сплавов, учитывающая влияние примесной подсистемы, характеризуется большим разнообразием возможных типов деформационных кривых. Стационарное состояние за пределом текучести может достигаться как монотонно, так и после серии затухающих осцилляций. Кроме того, при соответствующих значениях параметров стационарное состояние вообще не реализуется, а вместо него происходят незатухающие однородные колебания напряжения. Наличие таких колебаний может служить предвестником возникновения неоднородных неустойчивостей пластического течения типа эффекта Портевена-Ле Шателье [6] и соответствует схематике экспериментально наблюдаемых типов поведения легированных кристаллах кремния [18].

В публикациях, посвященных механическим испытаниям, в качестве характерных признаков проявления динамического деформационного старения рассматриваются особенности поведения температурных и скоростных зависимостей деформирующего напряжения [19]. Экспериментально наблюдаемое в легированных кристаллах ослабление скоростной чувствительности получает объяснение в наличии существенного примесного вклада, даваемого выражением (6) и, как отмечалось, не зависящего от скорости деформации. Более непосредственным признаком динамического деформационного старения может служить наличие осцилляций на кривых напряжение–деформация. Иногда для удобства извлечения температурной и скоростной зависимостей деформирующего напряжения производят сглаживание осцилляций на измеряемых деформационных кривых, чтобы иметь возможность применения моделей, относящихся к беспримесным материалам [20]. Такой подход работает и привлекателен простотой применения. Однако развитая в настоящей работе теория дает основу для более адекватного анализа экспериментальных данных.

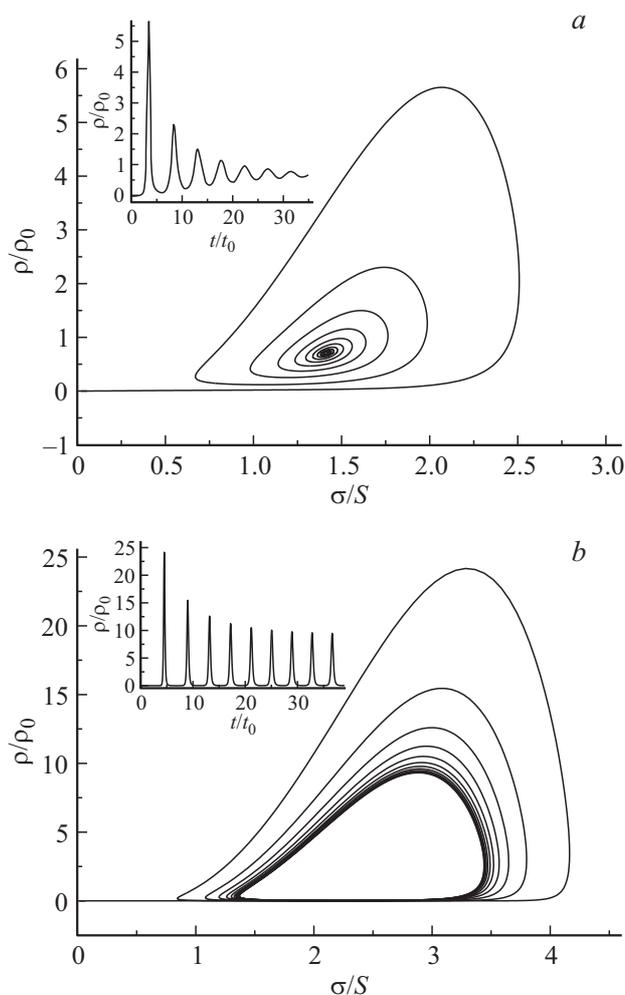


Рис. 4. Фазовый портрет решений уравнений модели $m = n = 1$, показывающий поведение скорости генерации дислокаций ρ при значениях управляющего параметра $u = 1$ (a) и $u = 0.2$ (b). На вставках изображена временная эволюция ρ .

Список литературы

- [1] *Messerschmidt U.* Dislocation Dynamics During Plastic Deformation. Springer Series in Material Science (Eds.: R. Hull, C. Jagadish, R.M. Osgood, Jr. J. Parisi, Z. Wang, H. Warlimont) Heidelberg, Dordrecht, London, N Y, 2010.
- [2] *Nadgorny E.* // *Progr. Mater. Sci.* 1988. Vol. 31. N 1. P. 1–530.
- [3] *Akhtar R., Khan S.* // *International J. Plasticity.* 1999. Vol. 15. N 9. P. 963–980.
- [4] *Лебедин М.А., Дунин-Барковский Л.Р.* // *ЖЭТФ.* 1998. Т. 113. Вып. 5. С. 1816–1829.
- [5] *Lebyodkin M.A., Lebedkina T.A., Chmelik F., Lamark T.T., Estrin Y., Fressengeas C., Weiss J.* // *Phys. Rev. B.* 2009. Vol. 79. N 174114.
- [6] *Ananthakrishna G.* // *Phys. Rep.* 2007. Vol. 440. N 4–6. P. 113–259.
- [7] Малащенко В.В. // *ФТТ.* 2015. Т. 57. Вып. 12. С. 100–102.
- [8] *Johnston W.G., Gilman J.J.* // *J. Appl. Phys.* 1959. Vol. 30. N 2. P. 129–144.
- [9] *Alexander H.* Dislocations in solids / Ed. by F.R.N. Nabarro. Amsterdam–Oxford–N.Y.–Tokyo, North-Holland, 1986. Vol. 7. Chapt. 35. P. 113–235.
- [10] *Малыгин Г.А.* // *УФН.* 1999. Т. 169. Вып. 9. С. 979–1010.
- [11] *Cochard J., Yonenaga I., Gouttebroze S., M'Hamdi M., Zhang Z.L.* // *J. Appl. Phys.* 2010. Vol. 108. N 103524.
- [12] *Suezawa M., Sumino K., Yonenaga I.* // *Phys. Stat. Sol. A.* 1979. Vol. 51. N 1. P. 217–226.
- [13] *Rabier J., George A.* // *Rev. Phys. Appl.* 1987. Vol. 22. N 11. P. 1327–1351.
- [14] *Петухов Б.В.* // *ЖТФ.* 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 42–47.
- [15] *Петухов Б.В.* // *ЖТФ.* 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 82–87.
- [16] *Petukhov B.V.* // *Phys. Stat. Sol. (c).* 2005. Vol. 2. N 6. P. 1864–1868.
- [17] *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, ГРФМЛ, 1986. 544 с.
- [18] *Siethoff H.* // *Acta Metal.* 1973. Vol. 21. N 11. P. 1523–1531.
- [19] *Gross T.S., Mathews V.K., De Angelis R.J., Okazaki K.* // *Mater. Sci. Eng. A.* 1989. Vol. 117. N 9. P. 75–82.
- [20] *Kapoor R., Nemat-Nasser S.* // *Metall. Mater. Trans. A.* 2000. Vol. 31. N 3. P. 815–823.