

## Эволюция вихря в газоразрядной плазме с учетом сжимаемости газа

© В.С. Сухомлинов,<sup>1</sup> А.С. Мустафаев<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
198504 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Национальный минерально-сырьевой университет „Горный“,  
199106 Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Университет ИТМО,  
197101 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: v\_sukhomlinov@mail.ru, rectorat@spmi.ru

(Поступило в Редакцию 6 октября 2015 г. В окончательной редакции 9 марта 2016 г.)

Проведено теоретическое рассмотрение динамики вихревой трубки в сжимаемой среде с рэлеевским механизмом энерговыделения. Построена аналитическая теория этого явления, рассмотрены различные приближения. Значительно расширен диапазон условий применимости теории поведения вихря. На основе модели плазмы как рэлеевской среды показано, что при давлении воздуха в десятки Торг при определенной относительной ориентации оси вихря и вектора электрического поля вихревая трубка в плазме тлеющего разряда разрушается за времена порядка сотых долей секунды. Обнаружено, что учет сжимаемости приводит к возрастанию скорости разрушению вихря. В такой среде для различных начальных параметров проведены расчеты временных зависимостей тангенциальной скорости в вихревой трубке. Получены правила подобия для рассматриваемого явления и универсальная зависимость динамики вихревой трубки.

### Введение

Многочисленные исследования газодинамических явлений в плазме показывают, что они кардинально отличаются от таковых в нейтральном газе. Это относится как к ударным и акустическим волнам [1–9], так и к вихревым образованиям [10]. Данное обстоятельство в настоящее время используется в так называемой плазменной аэродинамике для оптимизации обтекания при сверх- и дозвуковых скоростях [11–13] и стимулирует исследования в этой области. Особое значение с этой точки зрения имеет изучение поведения вихревых структур в плазме газового разряда, поскольку течения в приповерхностном (пограничном) слое, во многом определяющие аэродинамические силы и моменты, как правило, являются вихревыми.

Как известно, рэлеевский механизм энерговыделения заключается в том, что при наличии в упругой среде неоднородностей в местах с большей плотностью выделяется (или поглощается) некоторое количество тепла. Конкретное количество выделяемого (поглощаемого) в единицу времени тепла зависит от характеристик среды. Одним из примеров такой среды является низкотемпературная плазма самостоятельного газового разряда [1–3,6] в ситуации, когда характерные плазменные частоты намного превосходят обратные времена изменения параметров газа. Применительно к вихревым структурам это выполняется в широком диапазоне условий, так как в плазменной аэродинамике характерные круговые частоты вихрей в условиях, интересных с практической точки зрения, лежат в диапазоне от  $0.1\text{--}1000\text{ s}^{-1}$ , а характерные плазменные частоты в тлеющем разряде в воздухе при давлениях в десятки и сотни Торг существенно выше.

В работах [6,14] показано, что если градиент плотности нейтральных частиц и вектор электрического поля

в плазме ортогональны, то в областях с пониженной плотностью энерговыделение растет (и, наоборот). Если же эти векторы коллинеарны, то, напротив, энерговыделение растет в областях с большей плотностью. Физической причиной указанных эффектов является то, что в первом случае в местах с меньшей плотностью газа растет плотность тока при сохранении величины электрического поля, во втором — что в областях с большей плотностью растет электрическое поле при сохранении плотности тока. Это, например, является причиной того, что акустические волны в плазме самостоятельного разряда усиливаются или ослабляются в зависимости от взаимной ориентации направления распространения волны и вектора электрического поля, а структура ударной волны в виде прямого скачка кардинально меняется по сравнению с обычным газом [9]. В работе [10] была построена физическая модель эволюции одиночного вихря в идеальной несжимаемой рэлеевской жидкости. Обнаружено, что в такой среде при определенных условиях вихревая структура разрушается.

В настоящей работе предпринимается попытка построения аналитической теории динамики вихревой трубки в плазме самостоятельного газового разряда на основе рэлеевского механизма тепловыделения в упругой среде.

### 1. Получение основных соотношений

#### Вывод основных уравнений в приближении малых по сравнению со скоростью звука радиальных скоростей

Предположим, что в идеальной первоначально изотермической жидкости (газе) существует стационарная

бесконечная цилиндрическая трубка радиуса  $r_0$ , ось которой направлена вдоль оси  $Z$  цилиндрической системы координат. Тогда радиальная скорость  $v_r$ , а тангенциальная скорость  $v_t$  зависит от полярного радиуса  $r$  по известному закону [15]

$$v_t = \omega r \quad \text{при } r < r_0, \quad v_t = \frac{\omega r_0^2}{r} \quad \text{при } r > r_0, \quad (1)$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения вихря. При этом давление  $P(r)$  описывается соотношениями

$$P(r) = P(\infty) + \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - 2r_0^2) \quad \text{при } r < r_0, \\ P(r) = P(\infty) - \frac{\rho\omega^2 r_0^4}{2r^2} \quad \text{при } r > r_0. \quad (2)$$

Пусть в момент времени  $t = 0$  в жидкости (газе) включается рэлеевский механизм энерговыделения. Согласно (1) и равенству  $v_r|_{t=0} = 0$ , выполняется соотношение

$$\rho \approx \rho(0) \left( 1 + \frac{v_t^2}{a^2} \right), \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность упругой среды,  $\rho_0$  — плотность в отсутствии возмущения,  $a$  — скорость звука.

При разных значениях  $r$  будет выделяться (или поглощаться) различное количество тепла  $Q(r)$ , а значит изменится распределение давления  $P(r)$ . Таким образом, для описания поведения вихревой трубки в рассматриваемой ситуации необходимо использовать нестационарную систему уравнений Эйлера, при этом считается, что  $v_r \ll a$ . Система уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости с источниками тепла в цилиндрической системе координат при наличии аксиальной симметрии и отсутствии производных по координате  $Z$  записывается следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_r \frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = (\gamma - 1)Q(r, t), \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_t^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{\partial v_t}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_r v_t}{r} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

где  $\gamma$  — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

При  $t < 0$  (когда выполняется  $Q(r, t) = 0$ ) стационарное решение системы (4) описывается соотношениями (1), (2). Используя то, что мы рассматриваем малые по сравнению со скоростью звука радиальные скорости, и то, что  $V_r(r, 0) = 0$ , последовательным дифференцированием, исключая из первых двух уравнений давление и плотность, получим

$$\frac{\partial^3 v_r}{\partial t^3} + \frac{v_t^2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial t} - \gamma \frac{v_t^2}{r^2} \frac{\partial^2(rv_r)}{\partial t \partial r} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right] + (\gamma - 1)C_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right] = 0, \quad (5)$$

где

$$C_0 = \frac{dQ}{d\rho_{\rho=\rho_0}}, \quad a^2 = \gamma \frac{P}{\rho}. \quad (6)$$

Рассмотрим область  $r < r_0$ . Можно показать (П. 1), что в этой области выполняется соотношение

$$v_r = T_2(t)r. \quad (7)$$

Тогда справедливо уравнение

$$F' + (4 - \gamma)b(e^F - 1) = \gamma C b t^2, \quad C = \frac{2(\gamma - 1)}{a^2} C_0, \quad (8)$$

где  $F(t) = -4 \int_0^t T_2(x) dx$ ,  $v_t^2(t, r) = T_1(t)r^2$ ,  $T_2(t)$  — некоторые функции времени, которые удовлетворяют системе уравнений

$$T_2''' + (4 - \gamma)T_1 T_2' = 0, \\ T_1' + 4T_1 T_2 = 0. \quad (8a)$$

Функции  $v_r$ ,  $v_t$  выражаются через функцию  $F(t)$  по следующим формулам:

$$v_r(r, t) = -0.25F'(t)r, \\ v_t(r, t) = \omega \exp(0.5F(t))r. \quad (9)$$

Уравнение (8), которое не имеет аналитического решения [17], описывает динамику вихревой трубки в рэлеевской среде при  $r < r_0$  и малых (в известной степени) радиальных скоростях.

### Приближение малых начальных чисел Маха

Будем считать, что начальные тангенциальные скорости малы по сравнению со скоростью звука и рассмотрим сначала область  $r < r_0$ . Перейдем в системе уравнений (4) к безразмерным переменным:

$$x = \frac{r}{r_0} < 1, \quad y = \frac{ta}{r_0}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \\ \bar{v}_x = \frac{v_r}{v_t(0, r_0)}, \quad \bar{v}_y = \frac{v_t}{v_t(0, r_0)}, \\ M_0 = \frac{v_t(0, r_0)}{a}, \quad P_0 = \frac{\rho_0 a^2}{\gamma}, \quad \bar{C} = \frac{C r_0}{a}.$$

Тогда, исключая из этой системы давление и плотность и ограничиваясь линейным по  $M_0 \ll 1$  приближением, получим

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial x \bar{v}_x}{\partial x} \right] = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2x} v_y^2(0, x) = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2} x. \quad (10)$$

При получении (10) учитывалось, что в практически важных случаях значения величин, определяющих безразмерный параметр  $0.5\bar{C}$ , лежат в пределах

$$|C| < 1000 \text{ s}^{-1}, \quad r_0 < 0.1, \quad a \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (10a)$$

Решая уравнение (10) и используя третье уравнение системы (4) в безразмерной форме для скоростей  $\bar{v}_x(y, x)$ ,  $\bar{v}_y(y, x)$ , можно получить (П.2)

$$\begin{aligned}\bar{v}_x(y, x) &= -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{4} x y^2, \\ \bar{v}_y(y, x) &= x \exp\left(\frac{\gamma M_0^2 \bar{C}}{6} y^3\right)\end{aligned}\quad (11)$$

или в размерных переменных

$$\begin{aligned}v_t(t, r) &= \omega r \exp\left(-\frac{\gamma C \omega^2}{6} t^3\right) = \omega r \exp\left[-\left(\frac{t}{t_v}\right)^3\right], \\ t_v &= \left(\frac{6}{\gamma C \omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}\quad (11a)$$

Из (11), в частности, видно, что характерные значения переменной  $y$ , за которые происходит заметное изменение тангенциальной скорости, есть

$$y_c \approx \left(\frac{6}{\gamma \bar{C} M_0^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{что при } C \approx 10 \text{ s}^{-1},$$

$$a \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \omega \approx 100 \text{ s}^{-1}, \quad \text{даёт } y_c \approx 350.$$

Теперь рассмотрим область  $r > r_0$ . С учетом зависимости функции  $v_y(0, x)$  от переменной  $x$  при  $x > 1$  ( $r > r_0$ ) уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial x \bar{v}_x}{\partial x} \right] = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2x^3}. \quad (12)$$

Решая это уравнение (П.3) с использованием системы (4) для  $v_y(y, x)$ , имеем

$$\begin{aligned}v_y(y, x) &= \frac{1}{x} \exp\left\{\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{6} y^3 - \frac{1}{2}(1-x^2)\right\} \\ \text{при } -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{6} y &> \left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

$$v_y(y, x) = \frac{1}{x} \quad \text{при } -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{6} y < \left[\frac{1}{2}(x^2-1)\right]^{\frac{1}{3}}, \quad (13)$$

или в размерных координатах

$$v_t(t, r) = \frac{\omega r_0^2}{r} \exp\left\{-\left(\frac{t}{r_v}\right)^3 - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\right\}$$

$$\text{при } \frac{t}{r_v} > \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right]\right\}^{\frac{1}{3}},$$

$$v_t(t, r) = \frac{\omega r_0^2}{r} \quad \text{при } \frac{t}{r_v} < \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right]\right\}^{\frac{1}{3}}. \quad (13a)$$

При  $\frac{t}{r_v} \gg \left\{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\right\}^{\frac{1}{3}}$  это выражение записывается в виде

$$v_t(t, r) = \frac{\omega r_0^2}{r} \exp\left\{-\left(\frac{t}{r_v}\right)^3\right\},$$

что с точностью до множителя  $\frac{r_0^2}{r^2}$  совпадает с (11a).

Из (13a) следует, что по профилю тангенциальной скорости как бы бежит волна возмущения относительно ее значения при  $t = 0$ , гребень которой перемещается в сторону больших значений радиуса со скоростью

$$\bar{v}(t, r) = \frac{3t^2 r_0^2}{t_v^3 r}. \quad (14)$$

## 2. Обсуждение полученных результатов

Из формулы (11) следует, что при  $t > 0$ ,  $C < 0$  радиальная скорость нарастает со временем и направлена от центра. Физически это вызвано тем, что, согласно вышеизложенному, градиент плотности, обусловленный градиентом давления в первоначально изотермической вихревой трубке, приводит в рэлеевской среде с  $C < 0$  к дополнительному энерговыделению в областях с мень-

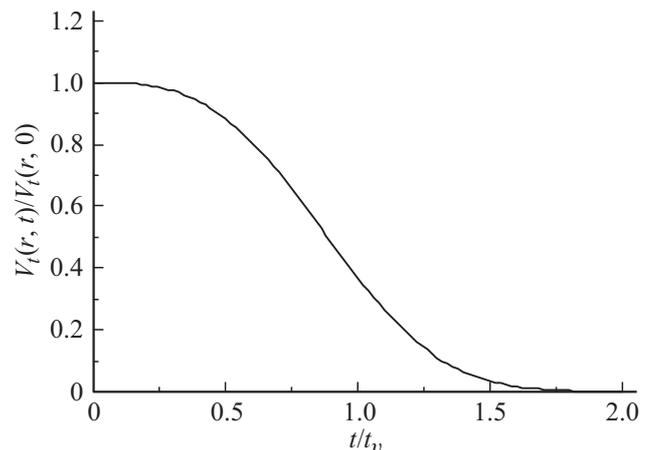


Рис. 1. Зависимость относительной тангенциальной скорости от времени, рассчитанная по формуле (11a).

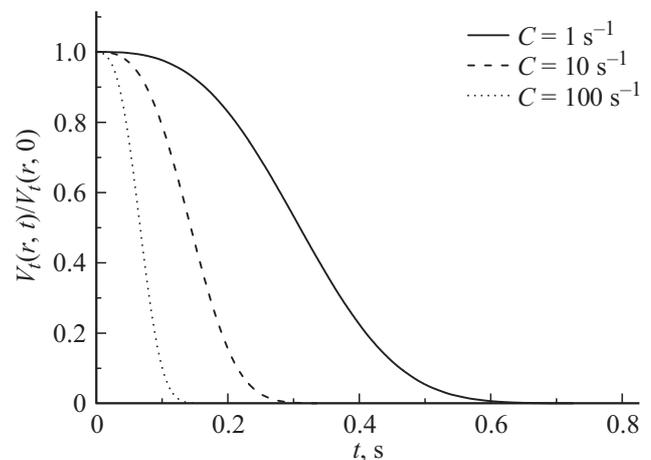
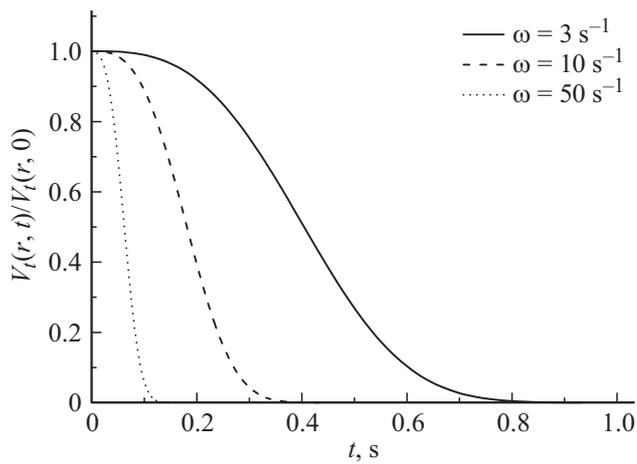
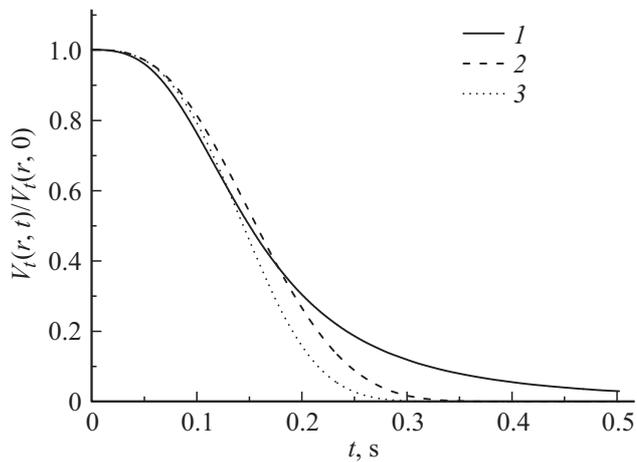


Рис. 2. Зависимость относительной тангенциальной скорости от времени, рассчитанная по формуле (11a), при различных параметрах  $C$ ,  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ .



**Рис. 3.** Зависимость относительной тангенциальной скорости от времени, рассчитанная по формуле (11 а), при различных начальных частотах вращения вихревой трубки,  $C = -5 \text{ s}^{-1}$ .



**Рис. 4.** Сравнение временных зависимостей тангенциальной скорости, полученных при решении соответствующего уравнения работы [10] — 1, уравнения (8) — 2 и рассчитанной по формуле (11 а), при  $C = -10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ .

шей плотностью. Следствием этого является повышение давления относительно равновесного в центральной части вихревой трубки и перетекание жидкости (газа) в периферические области. Рассматривая элементарный объем жидкости  $dV$  массой  $\rho dV$ , который перемещается под действием разности давлений, превосходящей равновесную для данной угловой скорости вращения, из точки  $r = r_1$  в точку  $r = r_2 > r_1$ , можно показать, что из закона сохранения момента импульса следует уменьшение угловой скорости вращения массы  $\rho dV$ . Таким образом, жидкость (газ) перетекает из центральной области в периферическую, одновременно замедляя вращение. В пределе вращение асимптотически замедляется, и мы приходим (в отсутствие теплопроводности) к неоднородно разогретой расширяющейся изобарической среде. Отметим, что уменьшение тангенциальной

скорости при возникновении положительной радиальной скорости в вихревой трубке видно непосредственно из третьего уравнения (4). Действительно, рассмотрим ядро вихревой трубки, т.е. область  $r < r_0$ . В этой области  $\frac{\partial v_r}{\partial r} > 0$ . Тогда непосредственно из третьего уравнения (4) следует, что если  $v_r > 0$ , то  $\frac{\partial v_t}{\partial t} < 0$ , и вихрь со временем разрушается.

Из формулы (11) видно, что динамику вихревой трубки в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения можно описать некоторой универсальной кривой, вид которой приведен на рис. 1. Характерное время разрушения (при  $C < 0$ )  $t_v$  падает с ростом модуля постоянной  $C$  и ростом начальной частоты вращения трубки. Физически первое обстоятельство объясняется тем, что с увеличением  $|C|$  растет выделяемая из-за неоднородности газа мощность тепла, а второе — тем, что с ростом частоты вращения вихря растет начальный градиент плотности газа в вихревой трубке, что также приводит в рэлеевской среде к более интенсивному энерговыделению в областях с меньшей плотностью газа (при  $C < 0$ ). Сказанное иллюстрируют расчеты, представленные на рис. 2 и 3, где приведены временные зависимости тангенциальной скорости при различных величинах  $C$  и  $\omega$  соответственно.

На рис. 4 приведены результаты расчетов зависимости тангенциальной скорости от времени, полученные при решении уравнений (8), соответствующего уравнения из работы [10] (решение задачи об эволюции вихря в рэлеевской среде без учета сжимаемости), а также рассчитанные по формуле (11а). Видно, что качественно все кривые совпадают, однако, согласно вышеизложенному, более точным является решение уравнения (8) и расчеты по (11а). Отметим, что расхождения решения из работы [10] с решениями (8) и (11а) наиболее значительны при больших временах. Это, очевидно, связано с тем, что при выводе соответствующих уравнений авторы [10] считали радиальную скорость малой по сравнению с тангенциальной, а, как мы видели, радиальная скорость нарастает со временем. Кроме того, из данных рис. 4 следует, что учет сжимаемости приводит к более быстрому распаду вихря в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения. Это можно объяснить тем, что в этом случае (при учете сжимаемости) при расширении вихря в результате роста давления в центральной области происходит дополнительное уменьшение плотности, что, в свою очередь, вызывает дополнительное энерговыделение при  $C < 0$ .

Интересно отметить, что при больших значениях параметра  $|C|$  расчеты по (8) и (11а) практически совпадают (рис. 5). На рис. 6 приведены радиальные профили относительной тангенциальной скорости вихревой трубки при  $r > r_0$ , рассчитанные по формулам (13а). Как отмечалось выше, по профилю тангенциальной скорости бежит волна, максимум которой перемещается со скоростью, описываемой формулой (14).

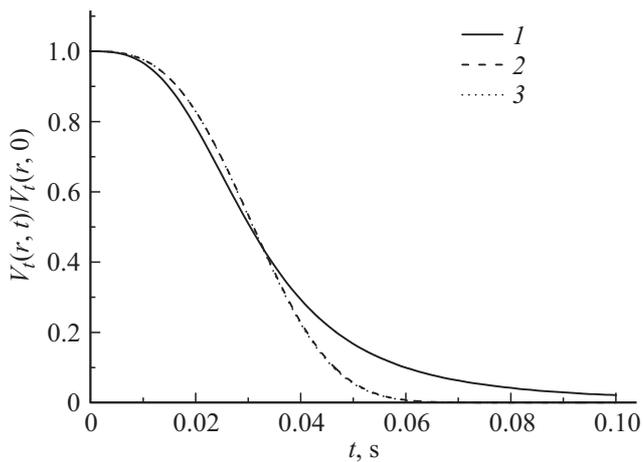


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но при  $C = -1000 \text{ s}^{-1}$ .

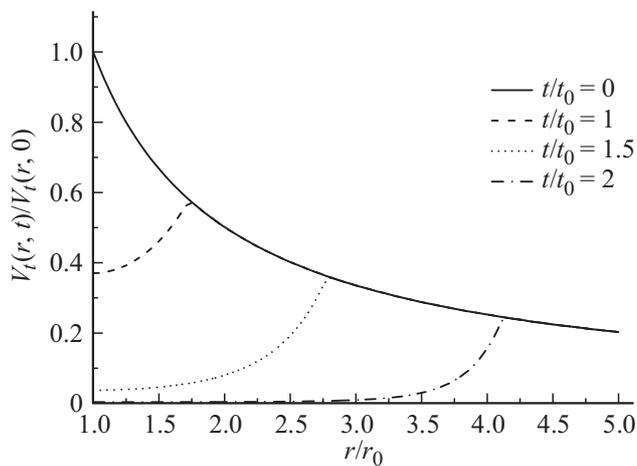


Рис. 6. Зависимость относительной тангенциальной скорости в вихревой трубке при  $r > r_0$  и различных значениях величины  $\frac{t}{t_0}$ .

В работе [10] для параметра  $C$  в случае тлеющего газового разряда получено соотношение

$$C = \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma P(\infty)} jE.$$

Отсюда следует, что в плазме самостоятельного газового разряда вихревая трубка будет разрушаться за счет рэлеевского механизма энерговыделения в соответствии с вышеописанными формулами только когда ось вихревой трубки коллинеарна вектору электрического поля в плазме, поскольку, как отмечалось выше, именно в этом случае в центральной области вихря будет выделяться больше энергии, чем в периферических областях, за счет более высокой плотности тока при постоянном значении электрического поля. Следствием этого будет расширение вихря с одновременным его замедлением и последующим полным разрушением. В случае же, когда вектор электрического поля ортогонален оси трубки, как показывает качественный анализ, вихрь со временем

распадается на несколько более мелких вихрей, которые со временем также разрушаются, но их динамика не описывается полученными в настоящей работе соотношениями. Действительно, в этой ситуации, согласно вышесказанному, при значениях угла  $\varphi = 0, \pi$  (рис. 7) будет наблюдаться увеличение энерговыделения, а при  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  — снижение. Это приведет к тому, что с учетом дозвукового характера движения жидкости (газа) при  $\varphi = 0, \pi$  газ будет тормозиться, а при  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  — ускоряться [19]. В соответствие с системой уравнений (4) при  $\varphi = 0, \pi$  возникнет радиальная скорость от центра вихря, а при  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  — к центру. Это приводит к возникновению четырех вихрей которые, в центре первоначальной вихревой трубки имеют попарно разнонаправленную скорость (рис. 7). При этом направление их вращения противоположно направлению вращения начальной вихревой трубки. В силу этого они тормозятся. После формирования этих четырех вихрей каждый из них может рассматриваться как вихрь в плазме в ситуации, когда электрическое поле ортогонально оси вихря. Таким образом, происходит распад каждого из четырех на четыре вихря и т.д. В промежуточном случае реализуется ситуация, когда проекции электрического поля (на коллинеарное и ортогональное оси вихря направления) инициируют оба механизма одновременно.

Данные, полученные в настоящей работе, позволяют утверждать, что при давлениях в десятки Торг величина  $C \approx 1000 \text{ s}^{-1}$  вихревые структуры с  $\omega \approx 10 \text{ s}^{-1}$  в плазме воздуха разрушаются за времена порядка сотых долей секунды. Отметим, что полученные результаты применимы, если характерное время выравнивания температуры из-за теплопроводности  $t_i$  велико по сравнению с временем  $t_v$ , в противном случае время разрушения вих-

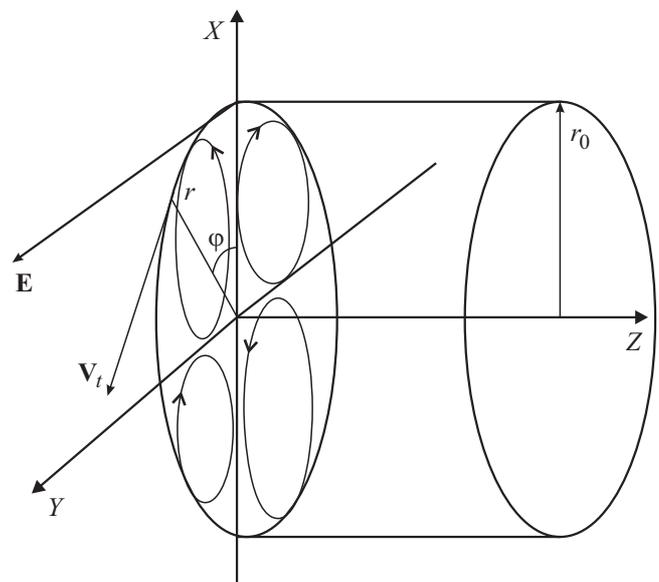


Рис. 7. К пояснению случая, когда ось вихревой трубки и вектор электрического поля ортогональны.

ря будет увеличиваться. Поскольку  $t_t$  пропорционально квадрату радиуса вихревой трубки, а время  $t_v$ , согласно формуле (11а) — величине  $r_0^{\frac{2}{3}}$ , то влияние теплопроводности на процесс разрушения вихрей большего радиуса будет менее значительным.

### Заключение

Таким образом, в работе рассмотрена динамика вихревой трубки в плазме самостоятельного разряда, которая рассматривается как сжимаемая среда с рэлеевским механизмом энерговыделения. Рассмотрены два приближения — малые по сравнению со скоростью звука радиальные скорости и малые по сравнению с единицей числа Маха тангенциальной скорости. Оба приближения выполняются в широком диапазоне условий, интересных с точки зрения применения в плазменной аэродинамике методов энергетического воздействия. Действительно, начальная радиальная скорость в ядре вихря равна нулю, начальные частоты и характерные размеры вихрей лежат в пределах  $\omega_0 < 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $r_0 < 0.1 \text{ m}$ , а скорость звука за счет энергетического воздействия имеет величину порядка  $10^3 \text{ m/s}$ . Как следует из системы уравнений (4), при расширении вихря из-за дополнительного энерговыделения в центральной области радиальная скорость имеет порядок величины  $v_r \propto \frac{r_0}{t_v}$ . Поскольку, как указывалось выше, в практически важных случаях выполняется  $|C| < 1000 \text{ s}^{-1}$ , то из (11а) и значений частот  $\omega_0$  следует  $t_v > 10^{-3} \text{ s}$ . Таким образом, оба использованных приближения  $\frac{v_r}{a}$ ,  $M_0 \ll 1$  выполняются в условиях применения в плазменной аэродинамике методов энергетического воздействия на поток.

### Приложение 1

Покажем, что в рассматриваемом приближении при  $r < r_0$  выполняется равенство

$$v_r = T_2(t)r, \tag{П.1.1}$$

где  $T_2(t)$  — некоторая функция времени. Для этого обратимся к уравнению (5). Если не выполняется (П.1.1), то, очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right] \neq 0. \tag{П.1.2}$$

Тогда в силу приближения малых скоростей уравнение (5) можно переписать в виде

$$r^{-1} \frac{\partial^3 V}{\partial t^3} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right] + (\gamma - 1)C_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right] = 0, \tag{П.1.3}$$

где  $V = rv_r$ . Применяя преобразование Лапласа по переменной  $t$  и учитывая, что  $\frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ , и, как следует из (5):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = -\gamma(\gamma - 1) \frac{C_0 v_t^2(0, r)}{a^2} = -\frac{\gamma}{2} C \omega^2 r^2,$$

для функции

$$g(s, r) = \int_0^\infty V(t, r) \exp(-st) dt$$

получим уравнение

$$g'' - \frac{g'}{r} - g \frac{s^3}{\gamma a^2 \left( s + \frac{C}{2\gamma} \right)} = \frac{\omega^2 C r^2}{2a^2 \left( s + \frac{C}{2} \right)}. \tag{П.1.4}$$

При этом  $C < 0$ ,  $2s > -\frac{C}{2}$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \left[ g(s, r), \frac{dg(s, r)}{dr} \right] = 0$ . Общее решение уравнения (П.1.4) есть сумма общего решения однородного уравнения и частного неоднородного. Однородное уравнение имеет решение, ограниченное при  $r \rightarrow 0$ , в виде [16]

$$g_0(s, r) = \text{const}(s) r I_1 \left( \frac{r}{a} \sqrt{\frac{s^3}{\gamma \left( s + \frac{C}{2\gamma} \right)}} \right), \tag{П.1.5}$$

где  $I_1(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого порядка. При временах  $t \gg \frac{r_0}{a}$  можно ограничиться асимптотикой

$$\frac{r}{a} \sqrt{\frac{s^3}{\gamma \left( s + \frac{C}{2\gamma} \right)}} \rightarrow 0.$$

Тогда с указанной точностью формулу для  $g_0(s, r)$  можно переписать

$$g_0(s, r) = G(s)r^2,$$

где  $G(s)$  — некоторая функция переменной  $s$ .

Частное решение неоднородного уравнения (П.1.4) легко вычисляется

$$g_n(s, r) = -\frac{\gamma \omega^2 C r^2}{2s^3}.$$

Выполняя обратное преобразование от функции  $g_0 + g_n$  с учетом асимптотики функции  $I_1(x)$ , получим

$$v_r(t, r) = T_2(t)r.$$

Таким образом, соотношение (7) доказано.

### Приложение 2

Применим к уравнению (10) преобразование Лапласа по переменной  $y$

$$g'' + \frac{1}{x} g' - g \left( s^2 + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\gamma M - \bar{C}}{2s} x, \tag{П.2.1}$$

Общим решением этого уравнения, ограниченным при  $x = 0$ , является

$$g(s, x) = C(s)I_1(sx) - \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2s^3} x, \quad (\text{П.2.2})$$

где  $C(s)$  — некоторая функция переменной  $s$ . Применяя к (П.2.2) обратное преобразование Лапласа, получаем

$$v_x(y, x) = F(y, x) - \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{4} xy^2, \quad (\text{П.2.3})$$

где  $F(y, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+\infty} C(s)I_1(sx)e^{sy} ds$  и удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial F}{\partial x} \right] = 0, \quad F(0, x) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}_{y=0} = 0. \quad (\text{П.2.4})$$

Покажем, что  $F(y, x) \equiv 0$ . Дифференцируя (П.2.3) и учитывая начальные условия для функции  $v_x(y, x)$ , получаем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}_{y=0} = 0 \quad (\text{П.2.4 а})$$

Будем искать решение (П.2.4) с учетом (П.2.4а) в виде

$$F(y, x) = \sum_{k=3}^{\infty} b_k(x)y^k. \quad (\text{П.2.5})$$

Подставляя (П.2.5) в (П.2.4) и приравнявая члены с одинаковыми степенями  $y$ , имеем

$$k(k-1)b_{k+2} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \frac{d(xb_k)}{dx} \right] = 0. \quad (\text{П.2.6})$$

Но из начальных условий следует, что  $b_0 = b_1 = b_2$ . Тогда из (П.2.6) при  $k = 1$  получаем  $b_3 = 0$ , при  $k = 2$  —  $b_4 = 0$  и т.д. Таким образом,  $b_k \equiv 0$  для любого  $k$  и требуемое утверждение доказано. Из (П.2.3) и системы (4), записанной в безразмерных переменных, следует, что

$$v_x(y, x) = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{4} xy^2, \quad v_y(y, x) = x \exp\left(\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{6} y^3\right).$$

### Приложение 3

Учитывая зависимость функции  $v_y(0, x)$  от переменной  $x$  при  $x > 1$  ( $r > r_0$ ), уравнение (10) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right] = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2x^3}. \quad (\text{П.3.1})$$

Применяя преобразование Лапласа по переменной  $y$ , получаем

$$g'' + \frac{1}{x} g' - g \left( s^2 + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2sx^3}. \quad (\text{П.3.2})$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное при  $x \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$g(s, x) = g_0(s, x) + g_n(s, x), \quad g_0(s, x) = C(s)K_1(sx), \quad g_n(s, x) = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2s} \left( I_1(sx) \int_x^{\infty} \frac{1}{x'^2} K_1(sx') dx' + K_1(sx) \int_1^x \frac{1}{x'^2} I_1(sx') dx' \right), \quad (\text{П.3.3})$$

где  $I_1, K_1$  — модифицированные функции Бесселя и Ганкеля первого порядка соответственно.

Постоянную  $C(s)$  находим, сшивая решения (П.2.2) (см. П.2) и (П.3.3) при  $x = 1$ :

$$C(s) = \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2sK_1(s)} \left\{ \frac{1}{s^2} + I_1(s) \int_1^{\infty} \frac{1}{x'^2} K_1(sx') dx' \right\}. \quad (\text{П.3.3а})$$

Как будет видно ниже, нас в основном, будут интересовать значения  $y \gg 1$ . Тогда можно показать, что основной вклад в обратное преобразование Лапласа от функции  $g(s, x)$  вносит слагаемое  $\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2s^3 K_1(s)} K_1(sx)$ .

Тогда из (П.3.3), (П.3.3а) имеем

$$g(s, x) = \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2s^3} K_1(sx). \quad (\text{П.3.4})$$

Применение к (П.3.4) обратного преобразования Лапласа приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^{y-1} \bar{v}_x(z, x) \frac{(y-z)}{\sqrt{(y-z)^2 - 1}} dz = \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{2x} \int_0^{y-x} z^2 \frac{(y-z)}{\sqrt{(y-z)^2 - x^2}} dz$$

при  $y > x > 1$ .

Можно показать, что при  $y \gg 1$  это уравнение можно приближенно заменить следующим:

$$\int_0^y (y-z) \frac{\partial \bar{v}_x(z, x)}{\partial z} dz = \frac{\gamma M_0 \bar{C}}{x} \int_0^{y-x} z \sqrt{(y-z)^2 - x^2} dz \quad (\text{П.3.5})$$

при фиксированном значении  $x$  для различных растущих функций  $\bar{v}(y, x)$  переменной  $y$ . Уравнение (П.3.5) имеет точное решение [18]

$$\bar{v}_x(y, x) = \frac{2\gamma M_0 \bar{C}}{\pi x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_x^y \frac{1}{\sqrt{y-y_1}} \times \int_0^{y_1-x} y_2 \sqrt{(y_1-y_2)^2 - x^2} dy_2 dy_1 \right].$$

При  $y \gg x$  выполняется

$$\bar{v}_x(y, x) = -\frac{2\gamma M_0 \bar{C}}{4x} y^2 + O(y^3). \quad (\text{П.3.6})$$

Для нахождения тангенциальной скорости воспользуемся (П.3.6) и третьим уравнением (4) в новых независимых переменных

$$p = \frac{M_0 A y^3}{3}, \quad u = \frac{x^2}{2}, \quad 0 < p < \infty, \quad \frac{1}{2} < u < \infty,$$

$$A = -\frac{\gamma M_0 \bar{C}}{4} > 0, \quad \text{если } \bar{C} < 0:$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial p} + \frac{\partial v_y}{\partial u} + \frac{v_y}{2u} = 0. \quad (\text{П.3.7})$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$v_y(p, u) = \frac{\Phi(p - u)}{\sqrt{2u}}.$$

Непосредственной подстановкой этого выражения легко убедиться, что оно удовлетворяет уравнению (П.3.7) при произвольной функции  $\Phi(p - u)$ . Граничное и начальное условия для уравнения (П.3.7) имеют вид

$$v_y\left(p, \frac{1}{2}\right) = \exp(-2M_0 p), \quad v_y(0, u) = \frac{1}{\sqrt{2u}}.$$

Отсюда находим функцию  $\Phi(p)$  и, переходя к переменным  $y, x$ , окончательно имеем для тангенциальной скорости соотношения (13).

## Список литературы

- [1] Александров Н.Л., Напортович А.П. // УФН. 1993. Т. 163. С. 1–26.
- [2] Александров Н.Л., Напортович Н.П., Паль А.Ф., Серов А.О., Старостин А. // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 7. С. 862–870.
- [3] Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 11. С. 1973–1977.
- [4] Uno Ingard // Phys. Rev. 1966. Vol. 145. N 1. P. 41–46.
- [5] Soukhomlinov V.S., Kolovos V.Y., Sheverev V.A., Otugen M.V. // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. P. 427–429.
- [6] Soukhomlinov V.S., Gerasimov N., Sheverev V.A. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2007. Vol. 40. P. 2507–2512.
- [7] Климов А.И., Коблов А.Н., Мишин Г.И., Серов Ю.Л., Явор И.П. // Письма в ЖТФ. 1982. Т. 8. Вып. 7. С. 439–443.
- [8] Мишин Г.И. // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. С. 274–278.
- [9] Герасимов Н.А., Кучинский В.В., Сухомлинов С.В., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 11–19.
- [10] Soukhomlinov V.S., Sheverev V.A., Otugen M.V. // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. P. 058 102.
- [11] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 11. С. 6–11.
- [12] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 34–41.
- [13] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 6. С. 25–31.
- [14] Soukhomlinov V.S., Gerasimov N., Sheverev V.A. // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104. N 4. P. 1–4.
- [15] Бондарев Е.Н., Дубасов В.Т., Рыжов Ю.А., Свиричевский С.Б., Семенчиков Н.В. Аэрогидродинамика. М.: Машиностроение, 1993. С. 90–91.
- [16] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968. 245 с.
- [17] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [18] Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 104 с.
- [19] Вулис Л.А. Термодинамика газовых потоков. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1950. 304 с.