

03
**Расчет сопротивления и теплоотдачи шара обтекающему газу
 в цилиндрическом канале**

© Н.Н. Симаков

Ярославский государственный технический университет,
 150023 Ярославль, Россия
 e-mail: nik_simakov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 16 сентября 2014 г. В окончательной редакции 9 июня 2015 г.)

Описан численный эксперимент по моделированию теплообмена шара с газовым потоком в цилиндрическом канале при стоксовском и переходном режимах обтекания. Рассчитаны и представлены радиальные и аксиальные профили температуры газа, зависимости коэффициента сопротивления тела C_d и числа Нуссельта Nu от числа Рейнольдса Re . Поставлен вопрос о влиянии раннего кризиса сопротивления шара на его теплообмен с обтекающим газом. Сделана оценка этого влияния, которая показала, что с возникновением раннего кризиса сопротивления шара в сильнотурбулентном потоке теплоотдача шара газу должна уменьшаться в 3–6 раз, примерно так же, как его коэффициент сопротивления.

**Введение. Ранний кризис
 сопротивления шара**

Во многих технологических процессах для повышения интенсивности тепломассообмена фаз путем увеличения поверхности их раздела используют распыливание жидкости в газе, например, с помощью форсунок.

При этом образуются капли со средним диаметром $d \sim 10^{-4}$ м. При таких размерах и большом различии динамических коэффициентов вязкости капельной жидкости и обтекающего их газа (для воды и воздуха, примерно, в 60 раз) деформацией капель и внутренним течением жидкости в них можно пренебречь, рассматривая их как твердые шарики.

Действительно, известно (например, из книги [1]), что при малых значениях критерия Вебера $We \ll 1$ отклонение формы капель от сферической незначительно. Для капель воды, распыленной форсункой в воздухе, при их радиусе $R_d = d/2$ имеем

$$We = \rho(V_\infty)^2 R_d / \sigma = 1.2 \cdot 15^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} / (73 \cdot 10^{-3}) \approx 0.2 \ll 1, \tag{1}$$

где ρ — плотность газа-воздуха, V_∞ — скорость капель относительно газа, σ — коэффициент поверхностного натяжения воды. Поэтому деформацию капель можно не учитывать.

В той же книге [1] приведена формула

$$C_d = (\mu^* C_{d\infty} + C_{d0}) / (1 + \mu^*), \tag{2}$$

выражающая коэффициент C_d гидродинамического сопротивления капли через такие же коэффициенты $C_{d\infty}$ для твердой сферы и C_{d0} для газового пузырька и отношение $\mu^* = \mu_L / \mu$ динамических коэффициентов вязкости капельной жидкости μ_L и газа μ . Для капель воды в воздухе $\mu^* \approx 60$, и согласно формуле (2), $C_d \approx C_{d0}$ „с погрешностью не более 5% при $Re < 100$ “ [1], т.е. циркуляция жидкости внутри мелкой капли мало

изменяет ее коэффициент сопротивления по сравнению с твердой сферой.

В расчетах процессов с распыливанием жидкости надо вычислять гидродинамическую силу сопротивления капли

$$F = C_d S \rho (V_\infty)^2 / 2 \tag{3}$$

при ее обтекании газом, для чего необходимо знать скорость V_∞ газа относительно капли вдали от нее и ее коэффициент сопротивления C_d , здесь $S = \pi d^2 / 4$ — площадь миделева сечения сферической капли.

Для случаев обтекания шара ламинарным потоком при малых числах Рейнольдса $Re = V d \rho / \mu \ll 1$ известна формула Стокса

$$C_d = 24 / Re. \tag{4}$$

А для обтекания шара в переходном диапазоне $2 < Re < 700$ известна зависимость Клячко

$$C_d = 24 / Re + 4 / Re^{1/3}, \tag{5}$$

которая в указанном диапазоне достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные, обобщенные кривой Рэлея [2,3].

В работах [4,5] на данных эксперимента показано (рис. 1), что в сильнотурбулентном потоке при $Re \approx 100$ величина C_d для капель может уменьшаться в 4–7 раз по сравнению с общеизвестными значениями, определяемыми формулой (5). Такой же ранний кризис сопротивления наблюдался на одиночном твердом шарике при его обтекании газовой струей, протекающей через конфузор [6].

Стоит заметить, что приведенные на рис. 1 экспериментальные точки лежат близко к штриховой кривой, соответствующей формуле Стокса (4).

Предположение о возможном значительном влиянии геометрии набегающего потока на гидродинамическое сопротивление обтекаемого тела в численном эксперименте не подтвердилось [7]. В качестве другой причины,

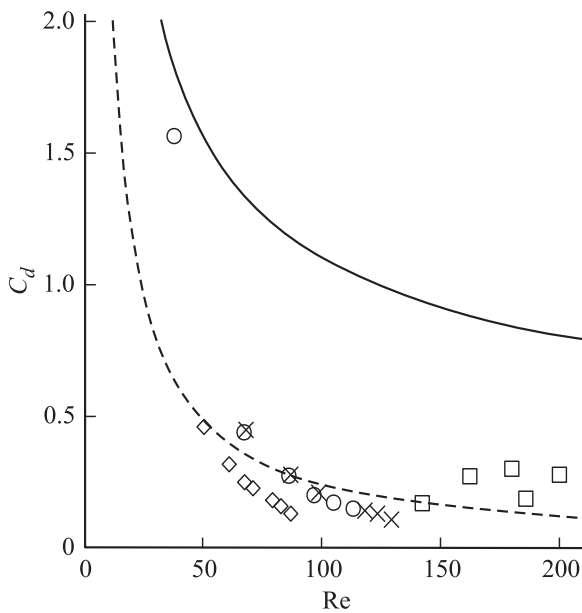


Рис. 1. Зависимости коэффициента сопротивления C_d шара от числа Рейнольдса Re : сплошная кривая — по формуле (5); штриховая линия — по формуле (4); данные эксперимента [4,5] с каплями воды в факеле форсунки при давлениях P , bar: \circ — 5, \times — 3, \diamond — 9, \square — данные эксперимента [6] с шариком, обдуваемым струей в конфузоре.

объясняющей ранний кризис сопротивления сферической частицы, была выдвинута гипотеза о влиянии сильной турбулентности газового потока, которую конфузоре мог еще больше усилить по сравнению со свободной струей и сделать достаточной для возникновения раннего кризиса на одиночном твердом шарике [6,7].

Это предположение было подтверждено численным экспериментом по моделированию обтекания шара свободным газовым потоком как ламинарным, так и сильнотурбулентным [8].

Между явлениями переноса импульса, тепла и массы в неоднородном потоке существует известная аналогия, согласно которой профили скоростей, концентраций примеси и температур в разных сечениях потока могут обладать некоторым подобием [9,10]. С учетом этой аналогии кризис сопротивления шара в сильнотурбулентном потоке с неизбежностью должен влиять на тепло- и массообмен шара с газом. Представляется интересным оценить это влияние каким-либо образом, например, путем численного моделирования обтекания шара газом с учетом теплообмена. Для начала необходимо построить такую модель без учета раннего кризиса сопротивления.

1. Моделирование обтекания шара ламинарным газовым потоком с учетом теплообмена

Основу математической модели течения газа с малыми (по сравнению со скоростью звука V_s) скоростями V

составляют уравнения классической гидродинамики, в том числе уравнение неразрывности

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{V}) = 0 \tag{6}$$

и уравнение Навье–Стокса

$$\partial\mathbf{V}/\partial t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla P/\rho + \nu\Delta\mathbf{V}. \tag{7}$$

Для учета теплообмена между шаром и газом, имеющим температуру T , меньшую, чем у шара, математическая модель дополнялась „общим уравнением переноса тепла“ [9], также называемым „уравнением баланса тепла“ [10], которое в данном случае было приведено к виду

$$\rho c_v dT/dt = -P \text{div} \mathbf{V} + \text{div}(\lambda \nabla T) + \Phi_d. \tag{8}$$

Для замыкания системы уравнений (6)–(8) по аналогии с работами [7,8] использовалось соотношение

$$dP = \gamma P d\rho/\rho, \tag{9}$$

связывающее изменения (по времени и пространству) величин давления P и плотности ρ движущегося газа и непосредственно следующее из уравнения адиабаты Пуассона $P/\rho^\gamma = \text{const}$. В книге [10] предлагалось использовать для этой же цели уравнение Клапейрона–Менделеева

$$P = \rho RT/M, \tag{10}$$

связывающее параметры состояния P , ρ и T идеального газа.

Однако стоит заметить, что уравнение (10) справедливо для газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия. Чего нельзя сказать про движущийся газ с переменными по пространству скоростями и температурами, для которого равновесие можно считать только локальным [11]. Поэтому формулу (10) можно применять для связи средних по времени значений величин P , ρ и T в данной точке пространства, но не для определения связи их дифференциалов.

В уравнениях (6)–(10) и далее использованы также обозначения: R — универсальная газовая постоянная, c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, M — молярная масса, λ и $a = \lambda/(\rho c_v)$ — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости газа. В расчете данные о физических свойствах газа принимались, как для воздуха.

В формуле (8) последний член Φ_d учитывает диссипацию механической энергии газа в тепло. Согласно источникам [9,10] при малых скоростях течения и степени сжатия газа (когда можно положить $\text{div} \mathbf{V} \approx 0$) этот член можно представить в виде

$$\Phi_d = \mu/2(\partial V_i/\partial x_k + \partial V_k/\partial x_i)^2. \tag{11}$$

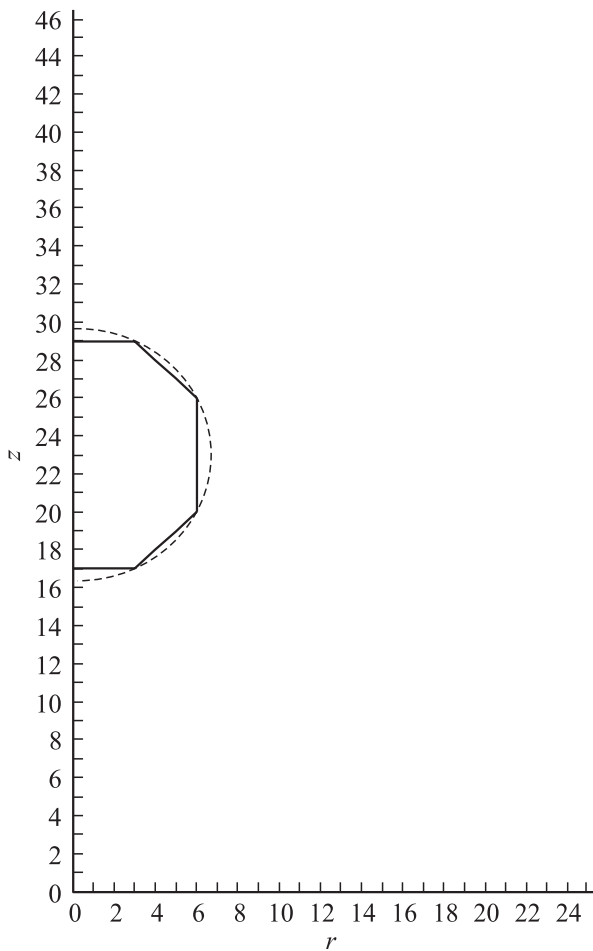


Рис. 2. Расположение осевого полусечения квазишара относительно расчетной сетки, по осям координат r и z отложено число шагов сетки.

При небольших различиях температур шара и обтекающего его газа изменением коэффициентов μ и λ можно пренебречь. Тогда уравнение (8) приводится к виду

$$\partial T / \partial t = -\nabla \nabla T - 0.4T \operatorname{div} \mathbf{V} + a\Delta T + \Phi_d. \quad (12)$$

С учетом формулы (10) и данных для воздуха здесь использованы соотношения $P/(\rho c_v) = RT/(Mc_v) \approx 0.4T$.

При выборе оптимальных (для цели моделирования) системы координат и формы обтекаемого тела были учтены следующие соображения. Если при решении задачи об обтекании шара газом в цилиндрической трубе кругового сечения использовать сферическую систему координат, то в ней удобно задавать границу течения газа на поверхности шара, но крайне неудобно делать то же на поверхности трубы. Так как образующая поверхности трубы не проходит через узлы расчетной сетки. Все будет наоборот, если использовать цилиндрическую систему координат. Поэтому ради упрощения задачи, как в работе [7], был выбран следующий компромиссный вариант.

В цилиндрической системе координат в качестве обтекаемого тела использовался квазишар — тело вращения,

имеющее осевое сечение в форме восьмиугольника, все стороны которого получаются соединением точек расчетной сетки (рис. 2). Это тело аппроксимировало собой и целиком вписывалось в шар радиусом $d/2 = 45^{1/2}h \approx 6.71h$ с центром расположенным на оси трубы в середине расчетной области (h — шаг сетки по координатам r и z).

Для расчета обтекания тела газовым потоком в круглой цилиндрической трубе была выбрана однородная расчетная сетка в виде прямоугольной области с числом точек 26 по радиусу r ($i = 0-25$) и 47 точек по осевой координате z ($j = 0-46$).

Уравнения (6), (7) и (12) в выбранной системе координат записывались в конечно-разностной форме с использованием явной схемы Лакса–Вендроффа [12], аппроксимация конвективных членов и устойчивость которой с помощью спектрального признака были исследованы в работе [12]. Эта же схема использовалась автором настоящей работы ранее в работах [7,8]. Она является устойчивой при ограничении шага τ по времени условием Куранта–Фридрихса–Леви в виде

$$\tau \leq h / ((V + V_s)2^{1/2}), \quad (13)$$

где $V = (V_z^2 + V_r^2)^{1/2}$ — модуль скорости газа, V_z и V_r — проекции скорости газа на оси координат $V_s = (\gamma P / \rho)^{1/2}$ — скорость звука в газе.

В сочетании со схемой Лакса–Вендроффа аппроксимация вязких (диффузионных) членов уравнений (7) и (12) модели проводилась по явной схеме первого порядка точности [12], для которой в случае двумерной сетки условие устойчивости имеет вид

$$\tau \leq h^2 / (4v), \quad (14)$$

где вместо v может быть и коэффициент a температуропроводности газа из формулы (12).

Для обеспечения устойчивости разностной схемы в целом необходимо одновременное выполнение обоих условий (13) и (14) [12], из которых первое в данном случае оказалось более сильным.

Разностные аналоги дифференциальных уравнений (6), (7) и (12) дополнялись соответствующими граничными условиями и решались численно до установления стационарного решения. В частности, на твердых стенках граничным условием было: $\mathbf{V} = 0$ — обращение скорости газа в нуль. Во входном сечении трубы и на ее стенке температура газа поддерживалась постоянной $T = \text{const} = T_1$, на поверхности шара — тоже постоянной, но другой $T = \text{const} = T_2 = T_1 + \Delta T$ с небольшим различием $\Delta T \ll T_1$.

По вычисленному полю температур газа вблизи поверхности обтекаемого тела вычисляли поток тепла с поверхности тела площадью f к обтекающему его газу

$$q = dQ/dt = -\lambda \int (n_z \partial T / \partial z + n_r \partial T / \partial r) df. \quad (15)$$

Затем вычисляли коэффициент α теплоотдачи шара газу и значение числа Нуссельта Nu по формулам

$$\alpha = q / (f \Delta T), \quad Nu = \alpha d / \lambda. \quad (16)$$

По рассчитанному полю скоростей и давлений газа интегрированием напряжений по поверхности обтекаемого тела находили действующую на него в направлении потока газа силу гидродинамического сопротивления

$$F = \int (n_z(-P + 2\mu\partial V_z/\partial z) + n_r\mu(\partial V_z/\partial r + \partial V_r/\partial z))df. \quad (17)$$

После этого по формуле (3) вычисляли коэффициент сопротивления C_d . Здесь обозначено $n_z = \cos\theta$ и $n_r = \sin\theta$ — проекции на координатные оси вектора внешней единичной нормали к поверхности обтекаемого тела, θ — полярный угол между проведенным из центра тела радиусом-вектором \mathbf{r} данной точки поверхности тела и осью OZ .

2. Результаты численного эксперимента

Для проверки факта сеточной сходимости решения разностной задачи к решению дифференциальной при уменьшении шага сетки расчеты некоторых вариантов были выполнены при двух разных шагах, отличающихся вдвое. Результаты, полученные для радиальных профилей аксиальной скорости $wz[i, j = \text{const}]$ обтекающего квазишара газа, представлены на рис. 3. Для соответствующих нечетным первоначальным номерам i результаты расчета получены при уменьшенном вдвое шаге сетки (размером $\max(i) \times \max(j) = 50 \times 92$ вместо первоначального 25×46) и показаны светлыми символами такой же формы, как и для значений с четными номерами i , рассчитанными при первоначальном вдвое большем шаге и показанными на рис. 3 темными символами. Значения j в обоих расчетах тоже приведены в соответствие первоначальной сетке.

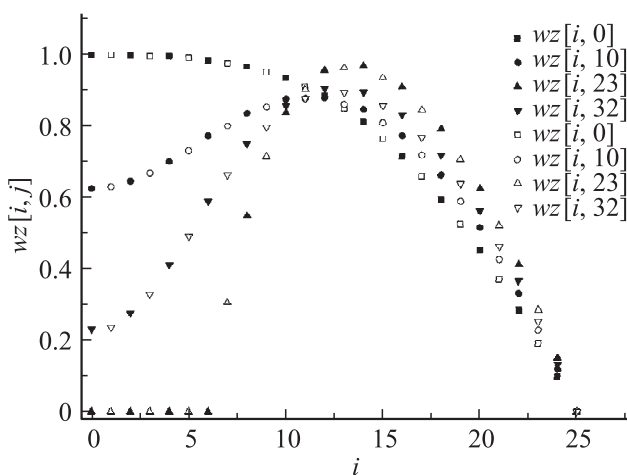


Рис. 3. Радиальные профили аксиальной скорости $wz[i, j]$ газа, обтекающего тело, в форме квазишара, в круглой цилиндрической трубе, в разных поперечных сечениях потока $z_j = \text{const}$ в стоксовском режиме обтекания при $Re = 0.047$. Светлыми символами показаны результаты, полученные на сетке с вдвое меньшим шагом, чем у данных, показанных темными символами.

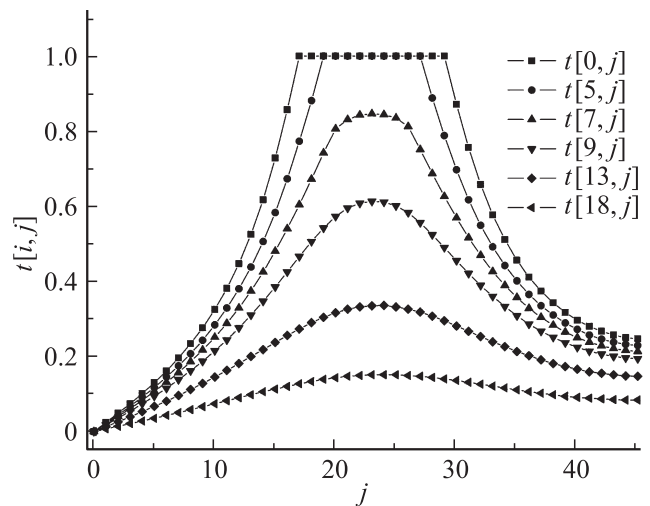


Рис. 4. Аксиальные профили относительной разности температур $t[i, j]$ газа, обтекающего тело, в форме квазишара, в круглой цилиндрической трубе, на разных расстояниях $r_i = \text{const}$ от оси потока в стоксовском режиме обтекания при $Re = 0.047$.

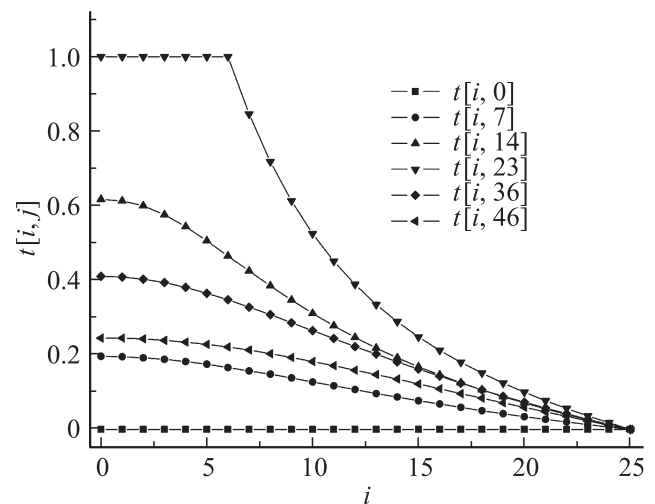


Рис. 5. Радиальные профили относительной разности температур $t[i, j]$ газа, обтекающего тело, в форме квазишара, в круглой цилиндрической трубе в разных поперечных сечениях $z_j = \text{const}$ потока в стоксовском режиме обтекания при $Re = 0.047$.

На рис. 3 очевидна близость результатов обоих расчетов, то же самое установлено для радиальных профилей $t[i, j = \text{const}]$ температуры газа, что и подтверждает сеточную сходимости решения разностной задачи. Отметим также, что показанные на рис. 3 профили скорости очень схожи с такими же профилями, рассчитанными ранее и представленными на рис. 3 в работе [7].

Рассчитанные профили температуры газа представлены на рис. 4–7. На рис. 4 и 5 соответственно представлены аксиальные и радиальные профили, полученные для стоксовского режима обтекания тела газом при

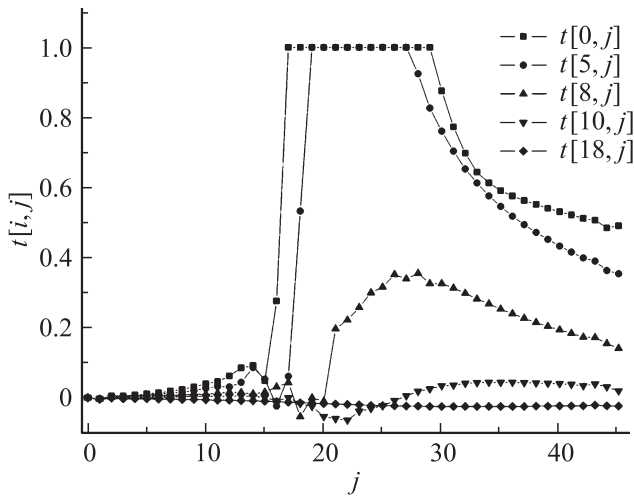


Рис. 6. То же, что и на рис. 4 в переходном режиме обтекания при $Re = 66.3$.

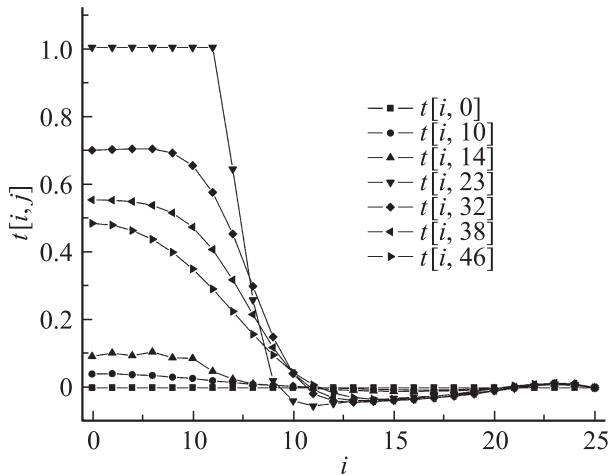


Рис. 7. То же, что и на рис. 5 в переходном режиме обтекания при $Re = 66.3$.

$Re = 0.047$. На рис. 6 и 7 — то же для переходного режима при $Re = 66.3$.

На рис. 4 очевидно, что в стоксовском режиме аксиальные профили температуры $(T[r_i, z_j] - T_1)/\Delta T = t[i, j]$ газа (при $i = \text{const}$), изменяясь с удалением по радиусу r_i от оси потока, все еще напоминают о центральной симметрии, какую эти профили имели бы при теплообмене шара с неподвижным газом. На рис. 6 очевидно, при обтекании тела в переходном режиме те же профили еще более деформированы в направлении потока, и от упомянутой симметрии практически ничего не осталось.

Это обусловлено (как и в случае с правильным шаром) изменением характера обтекания тела газом с возрастанием числа Re , в частности, возникновением вблизи „кормовой“ части возвратно-вихревого течения, которое надежно проявилось на профилях скорости газа, приведенных в работе [7].

На рис. 5 и 7 очевидно, как в обоих режимах обтекания изменяются радиальные (при $j = \text{const}$) профили температуры $t[i, j]$ газа при изменении координаты z_j поперечного сечения потока. На рис. 4–6 очевидно, температура газа в точках выходного сечения выше, чем в сходных точках входного сечения.

Колебания температуры, видимые на профилях рис. 6 и 7, объясняются численным эффектом, возникающим из-за дисперсии гармонических волн на разностной сетке [11,12]. Указанные колебания не мешают, однако, составить правильное представление об изменениях температуры газа, усреднив осцилляции по ближайшим узлам сетки.

Результаты расчетов числа Нуссельта представлены на рис. 8 символами-кружками. Для сравнения в виде кривой приведена известная аппроксимация Ранца–Маршалла [13]

$$Nu = 2 + 0.6 Re^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (18)$$

На рис. 8 очевидно, рассчитанные по вышеописанной численной модели значения числа Nu для тела, обтекаемого газовым потоком в трубе, во всем исследованном диапазоне значений $0.01 < Re < 240$ неплохо согласуются с известными данными. Небольшое различие значений Nu , рассчитанных по модели и формуле (18), можно объяснить отклонением формы моделируемого тела от шаровой и ограниченностью числа узлов расчетной сетки.

Заметим, что значения числа Re вычислялись с использованием средней скорости газа по входному сечению трубы.

Результаты расчетов коэффициента сопротивления C_d представлены на рис. 9 символами, графики известных зависимостей — кривыми. Очевидно, рассчитанные значения $C_d(Re)$ для тела, обтекаемого газовым потоком при $Re < 1$, согласуются с формулой Стокса (4), а при $Re > 5$ — с формулой Клячко (5). Небольшое

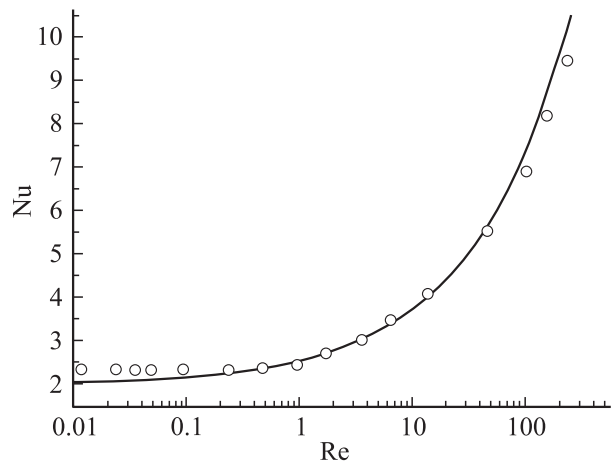


Рис. 8. Зависимости числа Нуссельта Nu тела от числа Рейнольдса Re : \circ — результаты расчета по численной модели обтекания квазিশара ламинарным потоком газа в трубе с учетом теплообмена, сплошная кривая — расчет по формуле (18).

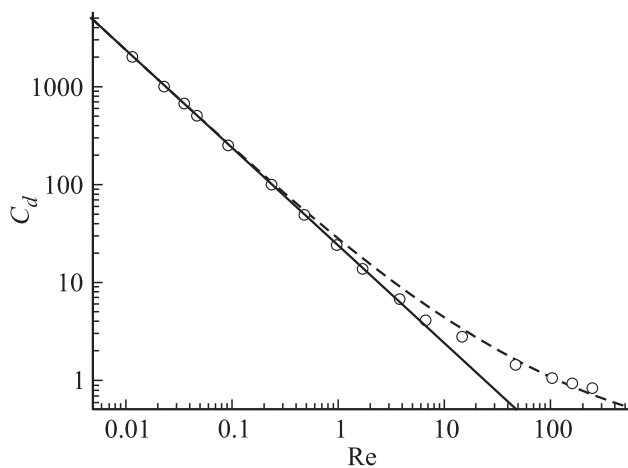


Рис. 9. Зависимости коэффициента сопротивления C_d тела от числа Рейнольдса Re : \circ — результаты расчета обтекания квазিশара ламинарным потоком газа в трубе по численной модели; сплошная кривая — расчет по формуле (4) для стоксовского режима обтекания шара при $Re < 1$; штриховая кривая — расчет по формуле (5) для переходного режима обтекания шара при $Re > 2$.

отличие значений C_d , рассчитанных по предложенной модели и по формулам (4) или (5), объясняется теми же причинами, что и для зависимости $Nu = Nu(Re)$.

Отмеченное хорошее согласие результатов расчета для указанных зависимостей $C_d(Re)$ и $Nu(Re)$ с известными данными позволяет сделать вывод о слабом влиянии имевшегося отклонения формы тела от шаровой и ограничения газового потока стенками канала на значения C_d и Nu . Это установлено в настоящей работе при расчетном соотношении размеров трубы и тела $D : d = 25 : 6$. Понятно, что этот вывод остается справедливым и при еще больших размерах трубы по отношению к размерам тела ($D : d > 25 : 6$).

Заметим, что аналогичный вывод о слабом влиянии стесненности газового потока стенками канала на величину коэффициента сопротивления C_d обтекаемого тела был сделан уже в работе [7] при других соотношениях $D : d$ размеров трубы и тела, равных 23 : 6, 29 : 6, 35 : 6.

3. Ранний кризис теплоотдачи

В работах [7,8] приведено объяснение раннего кризиса сопротивления шара влиянием изначально сильной турбулентности набегающего на него потока. Большая турбулентная вязкость ν_τ потока создает условия обтекания и профили осредненных по времени скоростей газа, сходные со стоксовским обтеканием при $Re < 1$. А малая (по сравнению с ν_τ) величина физической вязкости ν , которая играет основную роль вблизи поверхности шара, уменьшает его коэффициент сопротивления C_d в несколько раз.

Как отмечалось во Введении, с учетом аналогии между явлениями переноса импульса, тепла и массы

примеси кризис сопротивления шара в сильнотурбулентном потоке с неизбежностью должен влиять на тепло- и массообмен шара с газом. Попробуем оценить это влияние следующим образом.

Для связи параметров $\alpha d / \lambda = Nu(Re, Pr)$ конвективного теплообмена сферической капли с газовым потоком известно уравнение Ранца–Маршалла (18), которое упрощается с учетом того, что для газов $Pr^{1/3} \approx 1$.

При кризисе сопротивления улучшается обтекание шарообразной капли, приближаясь к стоксовскому, при этом число $Nu(Re) \rightarrow Nu(0) = 2$. В переходном диапазоне чисел Re , где возникает ранний кризис сопротивления каплей, согласно (18): $Nu_1 = 7$ при $Re_1 = 70$ и $Nu_2 = 11.5$ при $Re_2 = 250$. Тогда отношения $Nu_1 / Nu(0) \approx 3.5$, а $Nu_2 / Nu(0) \approx 5.8$.

Таким образом, интенсивность теплообмена капли с газом при раннем кризисе сопротивления должна уменьшаться в 3.5–5.8 раз, т.е. примерно так же, как коэффициент C_d гидродинамического сопротивления капли.

Проверить эту оценку (что в дальнейшем предполагается сделать) можно аналогично работе [8] — путем численного моделирования обтекания шара сильнотурбулентным газовым потоком с учетом теплообмена шара с газом. Для этого надо дополнить описанную в [8] гидродинамическую модель уравнением (12), учитывающим теплообмен шара с газом.

4. Заключение

Таким образом, описанный в разд. 1 и 2 настоящей работы численный эксперимент показал, что предложенная численная модель обтекания шара ламинарным потоком газа в цилиндрическом канале с учетом теплообмена позволяет вполне удовлетворительно рассчитывать поля скоростей, давлений и температуры газа, силу и коэффициент сопротивления обтекаемого тела, поток тепла и коэффициент теплоотдачи тела газовому потоку. Результаты расчета хорошо согласуются с известными данными.

Отмеченное согласие результатов расчета с известными данными для зависимостей $C_d(Re)$ и $Nu(Re)$ позволяет сделать вывод о слабом влиянии на значения указанных величин ограничения газового потока стенками канала в исследованном диапазоне $0.01 < Re < 240$ при соотношениях поперечных размеров трубы и тела $D : d > 25 : 6$.

В разд. 3 работы представлено теоретическое объяснение раннего кризиса теплоотдачи шара в газовом потоке с сильной турбулентностью и большой турбулентной вязкостью, основанное на аналогии с ранним кризисом сопротивления шара в таком же потоке. Сделана количественная оценка кризиса теплообмена, согласно которой коэффициент теплоотдачи шара газу уменьшается примерно в 3–6 раз.

Список литературы

- [1] Броунштейн Б.И., Фишбеин Г.А. Гидродинамика массо- и теплообмена в дисперсных системах. Л.: Химия, 1977. 280 с.
- [2] Torobin L.B., Gauvin W.H. // Can. J. Chem. Eng. 1959. Vol. 37. N 4. P. 129–141.
- [3] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Пер. с немецкого. М.: Наука, 1974. 712 с.
- [4] Симаков Н.Н. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 2. С. 46–51.
- [5] Simakov N.N., Simakov A.N. // J. Appl. Phys. 2005. Vol. 97. P. 114901.
- [6] Симаков Н.Н. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 1–7.
- [7] Симаков Н.Н. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 23–30.
- [8] Симаков Н.Н. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 4. С. 16–20.
- [9] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. IV. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [10] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- [11] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Московского физико-технического института, 1994. 528 с.
- [12] Поттер Д. Вычислительные методы в физике / Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 392 с.
- [13] Ranz W.E., Marshall W.R. // Chem. Eng. Progr. 1952. Vol. 48. N 5. P. 173.