

01;15

## Математическое моделирование мембранно-емкостного компенсационного преобразователя давления

© А.И. Эйхвальд<sup>1</sup>, И.В. Садковская<sup>2</sup>, Т.А. Эйхвальд<sup>2</sup><sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет<sup>2</sup> Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии

им. Д.И. Менделеева, Санкт-Петербург

E-mail: a.eichvald@spbu.ru , eich47@mail.ru

Поступило в Редакцию 1 февраля 2016 г.

Произведено математическое моделирование работы мембранно-емкостного преобразователя давления с электростатической компенсацией прогиба мембраны. Показано, что теория таких приборов некорректна и погрешность измерений давления с их помощью может достигать 25–29% от измеряемой величины, что делает нецелесообразным их использование в метрологии давления.

В 1950–1960 годах в метрологии низкого давления существовала задача найти альтернативу ртутному компрессионному манометру Мак-Леода для воспроизведения Паскаля. Одна из попыток решить эту задачу была связана с использованием мембранно-емкостных преобразователей давления с компенсацией прогиба мембраны электрическим полем (МЕПК) [1]. Принцип действия этого устройства поясняет рис. 1. Тонкая металлическая мембрана 1 разделяет измерительную 2 и сравнительную 3 камеры. В сравнительной камере поддерживается высокий вакуум с остаточным давлением  $p_0$ . В измерительную камеру напускается газ под измеряемым давлением  $p$ . В измерительной камере параллельно мембране на расстоянии  $d$  от нее установлен плоский

электрод 4, образующий с мембраной емкость  $C$ , включенную в измерительную мостовую схему (на рис. 1 не показана). При  $p = p_0$  мембрана плоская, и емкость имеет значение  $C_0$ . При  $p > p_0$  мембрана прогибается и  $C < C_0$ . Если на промежуток мембрана-электрод подать постоянное напряжение, то электрическое поле в промежутке будет действовать на мембрану в сторону, противоположную давлению газа, что можно рассматривать как отрицательное давление  $p_e = -\epsilon_0 E^2/2$  [2], где  $E$  — напряженность электрического поля вблизи мембраны,  $V/m$ ;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная. Варьируя напряжение, можно вернуть емкость к исходному значению  $C_0$ . Идея прибора состояла в том, что необходимое для этого напряжение  $U$  может быть связано с давлением газа простым соотношением. В работе [1] было предложено уравнение измерения, основанное на качественных соображениях, которые, по-видимому, представлялись автору очевидными: когда значение емкости станет равным  $C_0$ , мембрана становится плоской, и при этом сила давления газа, действующая в целом на мембрану, уравновешивается электрической силой, т. е.

$$pS_M = -p_e S_E = \frac{\epsilon_0 U^2}{2d^2} S_E, \quad (1)$$

где  $S_M$  и  $S_E$  — площади мембраны и электрода. Таким образом, измеряемое давление газа выражено через геометрические параметры преобразователя и электрическое напряжение, т. е. прибор может использоваться без предварительной калибровки первичным эталоном давления. Теоретическая оценка систематической погрешности дала значение порядка 1% от измеряемой величины в диапазоне  $10^{-1} - 130$  Па [1].

Несмотря на представленные в [1] положительные результаты исследования МЕРК с помощью манометра Мак-Леода, эта работа не получила дальнейшего развития в зарубежной технике измерений. Недавно в российской научно-технической литературе появились работы, свидетельствующие о возрождении интереса к такому измерительному прибору. В [3,4] описан МЕРК, входящий в состав Государственного специального эталона единицы давления ГЭТ 49-80, относительная погрешность которого в диапазоне давлений  $10^{-2} - 10^4$  Па может составлять менее 0.1% от измеряемой величины [3]. При этом уравнение измерений (1) и его обоснование полностью заимствованы из [1].

Нам представляется, что существующая теория МЕРК и уравнение (1) не вполне корректны по следующим причинам. Из теории

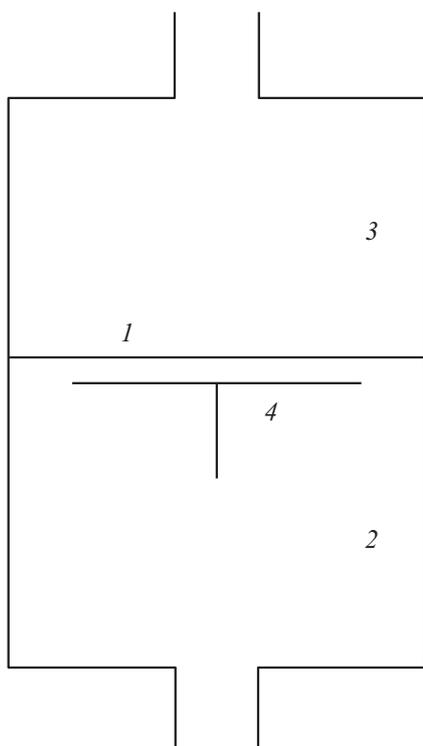


Рис. 1. Схема МЭПК.

упругости [5] следует, что мембрана может быть плоской только тогда, когда равно нулю давление на нее, а не сумма всех действующих на нее сил. Неравенство площадей мембраны и электрода (рис. 1) приводит к тому, что давление на мембрану  $q = p + p_e$  не равно нулю, так как давление газа по всей мембране одинаково, а электростатическое давление действует только в ее центральной части, находящейся напротив электрода. Поэтому в этих условиях мембрана не может быть плоской. Как следствие, в месте закрепления мембраны на стенке камеры может возникнуть сила, действующая на мембрану вдоль ее оси  $F_{st}$ , которую необходимо включить в уравнение механического

1\* Письма в ЖТФ, 2016, том 42, вып. 15

равновесия мембраны:

$$pS_M + p_e S_E + F_{st} = 0. \quad (2)$$

Поскольку эта сила не контролируется в процессе измерения давления, то соотношение между  $p$  и  $p_e$  при  $C = C_0$  становится неопределенным и использование (1) приведет к непредсказуемой ошибке измерений.

В данной работе рассчитано отношение  $K = |p/p_e|$ , при котором емкость  $C$  возвращается к начальному значению  $C_0$ , в двух модельных представлениях о свойствах мембраны: мембрана имеет только однородное натяжение  $T$  (нет сопротивления изгибу), и мембрана характеризуется жесткостью  $D$  (сопротивление изгибу без натяжения). Уравнения прогиба мембраны для этих двух случаев имеют соответственно следующий вид [5]:

$$\Delta z_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = -\frac{q}{T}; \quad \Delta^2 z_2 = \frac{q}{D},$$

где  $z_{1,2}$  — прогиб мембраны в двух моделях,  $q = p + p_e$  — суммарное давление на мембрану. Для осесимметричных условий они могут быть представлены в полярных координатах соответственно в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dz_1}{dr} \right) = -q/T \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dz_2}{dr} \right) \right) \right) = q/D,$$

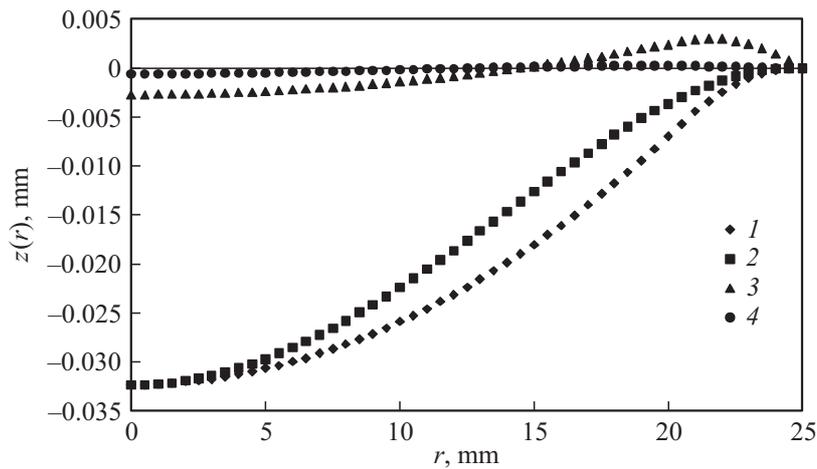
где  $r$  — расстояние от оси до произвольной точки мембраны. Общие решения этих уравнений имеют вид [6]

$$z_1 = -\frac{1}{T} \int \frac{1}{r} \left[ \int r q dr \right] dr + C_1 \ln r + C_2, \quad (3)$$

$$z_2 = \frac{1}{D} \int \left\{ \frac{1}{r} \int \left[ r \int \left( \frac{1}{r} \int q r dr \right) dr \right] dr \right\} dr$$

$$+ B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4,$$

где  $C_1, C_2, B_1, B_2, B_3$  — константы интегрирования. Из условия ограниченности решений и изгибающего момента на оси следует  $C_1 = B_1 = B_3 = 0$  [6]. Константа  $C_2$  определяется из граничного условия  $z_1(R) = 0$ , где  $R$  — радиус мембраны (закрепленная мембрана), а  $B_2$



**Рис. 2.** Прогиб мембраны  $z$  в зависимости от радиуса  $r$ : 1 — первая модель (мембрана с натяжением) при  $K = 0.685$ ; 2 — вторая модель (жесткая мембрана) при  $K = 0.685$ ; 3,4 — первая и вторая модели при  $C = C_0$ .

и  $B_4$  — из условий  $z_2(R) = z_2'(R) = 0$  (заделанная в стенку пластина). Таким образом, решение задачи сводится к повторному численному интегрированию заданной функции  $q(r)$ . Поскольку уравнения (3) линейны, конкретные значения  $T$  и  $D$  для расчета  $K$  несущественны. Значение величин, стоящих в правых частях уравнений, имеет смысл выбирать такими, чтобы прогиб мембраны был много меньше ширины промежутка  $d$ .

Расчеты проводились для геометрических параметров преобразователя, указанных в [4]: радиусы мембраны и электрода  $R_M = 25.0$  mm,  $R_E = 20.7$  mm; расстояние между мембраной и электродом  $d = 0.089$  mm. При этом из (1) следует

$$K = \frac{S_E}{S_M} = 0.685.$$

Функция  $q(r)$  задавалась в ступенчатом виде:  $q(r) = p$  при  $r > R_E$  и  $q(r) = p(1-1/K)$  при  $r > R_E$ . Алгоритм расчетов следующий:

1. Задаемся коэффициентом  $K = 0.685$  и находим решение уравнения (3) для прогиба мембраны.

2. По прогибу мембраны рассчитываем емкость промежутка мембрана-электрод по формуле [1]

$$C = \iint_{S_E} \frac{\varepsilon_0 dS}{d + z(r)}.$$

Сравниваем ее с емкостью  $C_0$ , которая предварительно рассчитывается по этой же формуле с  $z = 0$ .

3. Если они не равны, изменяем коэффициент  $K$  и повторяем процедуру.

Основные результаты расчетов состоят в следующем.

1. При  $K = 0.685$ , когда выполняется равенство (1), мембрана имеет прогиб в сторону электрода в обеих моделях, как показано на рис. 2. Емкость промежутка мембрана-электрод при этом больше начальной  $C_0$ .

2. Емкость  $C$  возвращается к исходному значению  $C_0$  при  $K = 0.915$  в первой модели и  $K = 0.969$  во второй (см. форму мембраны на рис. 2). Это означает, что использование (1) в качестве уравнения измерений приводит к ошибке 25 и 29% соответственно.

Результаты расчетов подтверждают наше предположение о некорректности существующей теории МЕРК и доказывают невозможность использования этого прибора для точных измерений давления без предварительной калибровки с помощью эталона.

## Список литературы

- [1] Drawin H. // Zeitschrift Instrumentenkunde. 1960. V. 68. N 1. P. 1–8.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [3] Израилов Е.К. // Вакуумная техника и технология. 2011. Т. 21. В. 2. С. 129–132.
- [4] Неворотин И.В., Григорьев А.С., Горобей В.Н., Израилов Е.К. // Мир измерений. 2012. № 2. С. 13–18.
- [5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 247 с.
- [6] Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1969. 405 с.