

Свойства вихрей джозефсоновского перехода, окруженного двумя сверхпроводящими волноводами

© А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, С.Г. Успенский

Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
119991 Москва, Россия

E-mail: malish@sci.lebedev.ru

(Поступила в Редакцию 23 декабря 2003 г.)

Для джозефсоновского перехода, магнитосвязанного с окружающими его сверхпроводящими волноводами, получены решения уравнения для разности фаз куперовских пар на джозефсоновском переходе и отвечающие таким решениям магнитные поля. Показано, что для свободно движущихся вихрей (при пренебрежении диссипацией) существуют две запрещенные зоны, ограничивающие сверху скорости движения вихрей. Найдены условия, при которых двум высокоскоростным разрешенным областям отвечают быстрые вихри. Для случаев пропускания тока только через джозефсоновский переход или через всю структуру установлена зависимость транспортного тока от скорости вихря. Обнаружен эффект обратного тока, когда в разрешенных зонах скоростей вихри движутся в направлении, противоположном обычному.

Работа выполнена при поддержке грантов президента РФ НШ-1985.2003.2, МК-1800.2003.02 и в рамках Федеральной целевой научно-технической программы (госконтракт с Минпромнауки № 40.012.11.1357 от 22.04.2003).

1. Введение

Исследование вихрей в слоистых джозефсоновских структурах давно привлекает внимание специалистов (см., например, [1–3]). Интерес к таким исследованиям обусловлен прежде всего тем, что высокотемпературные сверхпроводники можно рассматривать как слоистые структуры, состоящие из проводящих слоев, разделенных диэлектрическими слоями, через которые возможно туннелирование куперовских пар [4]. Кроме того, свойства вихрей в структурах, содержащих несколько слоев, существенно отличаются от их свойств в одиночном джозефсоновском переходе (ДП) [5,6]. Появление новых свойств обусловлено не только изменением пространственного распределения магнитного поля вихрей [5], но и возможностью генерации электромагнитных полей вне ДП движущимися вихрями [7,8]. В частности, в работе [8] показано, как изменяются свойства вихря в ДП, магнитосвязанном с плоским волноводом. В [8] предсказана возможность распространения вихря со скоростью, много большей скорости Свихарта ДП, и найдено порождаемое таким быстрым вихрем возмущение разности фаз волновых функций сверхпроводников в волноводе, которому отвечает определенное электромагнитное поле.

С целью дальнейшего изучения возможности управления свойствами вихрей посредством изменения параметров слоистой структуры в настоящей работе рассмотрен движущийся вихрь в более сложной структуре, состоящей из ДП, связанного с двумя плоскими волноводами, находящимися по обе стороны ДП. В том случае, когда скорости Свихарта в волноводах V_{s1} и V_{s2} превосходят скорость Свихарта V_s в ДП, установлено, что благодаря наличию двух волноводов появляются две дополнительные области скоростей, в которых разрешено движение более быстрых вихрей со скоростями

$v > V_s$. Если $V_{s2} > V_s > V_{s1}$, то существует лишь одна область скоростей, в которой возможен быстрый вихрь, а при $v < V_s$ из-за влияния волновода со скоростью Свихарта V_{s1} появляется запрещенная зона скоростей. Наконец, если $V_s > V_{s1}, V_{s2}$, то влияние обоих волноводов приводит к появлению двух запрещенных зон скоростей в области $v < V_s$. Во всех перечисленных случаях найдена связь транспортного тока через ДП со скоростью вихря. Показано, что во всех областях скоростей, где разрешено движение вихря, значения величины тока, поддерживающего вынужденное движение вихря, малы по сравнению с критическим джозефсоновским током j_c , если малы диссипативные потери как в ДП, так и в волноводах, а скорость вихря не слишком близка к скоростям, ограничивающим области разрешенного движения. Вид функции $j(v)$ установлен для двух способов пропускания тока через слоистую структуру. Если ток пропускается только через ДП, вынужденное движение вихря поддерживается силой Лоренца, возникающей из-за взаимодействия тока лишь с частью магнитного поля вихря, локализованного в ДП и сверхпроводниках, прилегающих к ДП. Если же ток пропускается через всю слоистую структуру, то эффективная область взаимодействия тока с магнитным полем вихря шире, а основной вклад в силу Лоренца возникает от тех областей структуры, в которых сосредоточено магнитное поле вихря. Например, магнитное поле быстрых вихрей в основном локализовано в волноводах и прилегающих к ним сверхпроводниках. Поэтому вклад в силу Лоренца от протекания тока по этим областям является наибольшим, что проявляется в относительном уменьшении величины тока, необходимой для поддержания вынужденного движения вихря, по сравнению со случаем пропускания тока только через ДП.

Еще одно необычное явление возникает тогда, когда хотя бы одна из скоростей Свихарта, например V_{s1} , мень-

ше скорости V_s . В таких условиях магнитное поле вихря, имеющего скорость Свихарта немного меньше V_{s1} , в окрестности волновода направлено против магнитного поля в ДП. Вследствие этого, как показано далее, суммарная сила Лоренца меняет знак, и вихри с такими скоростями движутся в направлении, противоположном тому, в котором движутся вихря со скоростями, сильно отличающимися от V_{s1} . Если скорости Свихарта обоих волноводов меньше V_s , то существуют два интервала скоростей, близких к V_{s1} и V_{s2} , в которых вихри движутся в другом направлении, чем при скоростях, далеких от V_{s1} и V_{s2} .

2. Система уравнений для разности фаз

Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из тонкого несверхпроводящего слоя с диэлектрической постоянной ε и проводимостью σ , расположенного в области $-d < x < d$, и двух несверхпроводящих волноводов с диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2 и проводимостями σ_1 и σ_2 , расположенных в областях $-L_1 - d - 2d_1 < x < -L_1 - d$ и $L_2 + d < x < L_2 + d + 2d_2$ соответственно. Несверхпроводящие слои разделены сверхпроводящими слоями, имеющими толщины L_1 и L_2 и лондоновские длины λ_1 и λ_2 . В областях $x < -L_1 - d - 2d_1$ и $x > L_2 + d + 2d_2$ расположены сверхпроводники с лондоновскими длинами λ_0 и λ_3 . При этом полагаем толщины волноводов достаточно большими, чтобы пренебречь сверхпроводящим туннельным током через них. В этом случае данную систему можно рассматривать как ДП, расположенный между двумя волноводами.

Будем считать, что электромагнитные поля не зависят от координаты y . Также полагаем несверхпроводящие слои достаточно тонкими, что позволяет считать магнитные поля внутри них не зависящими от координаты x .

Непрерывность x -компоненты обобщенного тока на границах раздела сверхпроводящих и несверхпроводящих слоев позволяет записать уравнение, связывающее разность фаз волновых функций $\varphi(z, t)$, $\varphi_{w1}(z, t)$, $\varphi_{w2}(z, t)$ в сверхпроводниках, разделенных соответствующим несверхпроводящим слоем, с y -компонентами магнитного поля в этом слое $H(z, t)$, $H_1(z, t)$, $H_2(z, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial \varphi_{w1}(z, t)}{\partial t} &= -\frac{4|e|c}{\hbar} \frac{d_1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} H_1(z, t), \\ \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial \varphi_{w2}(z, t)}{\partial t} &= -\frac{4|e|c}{\hbar} \frac{d_1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} H_2(z, t), \\ \omega_j^2 \sin \varphi(z, t) + \beta \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} &+ \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} = -\frac{4|e|c}{\hbar} \frac{d}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} H(z, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\beta = (4\pi\sigma)/\varepsilon$; $\beta_i = (4\pi\sigma_i)/\varepsilon_i$, $i = 1, 2$; ω_j — джозефсоновская частота: $\omega_j^2 = 16\pi|e|j_c d/\hbar\varepsilon$.

Еще одна система уравнений, связывающая поля с разностями фаз, следует из уравнений Максвелла и условий непрерывности магнитного поля и z -компоненты электрического поля на границах слоев [9]:

$$\begin{aligned} a_1 H(z, t) - B_1 H_1(z, t) &= \frac{\hbar c}{2|e|} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{w1}(z, t), \\ a_2 H(z, t) - B_2 H_2(z, t) &= \frac{\hbar c}{2|e|} \frac{\partial}{\partial z} \varphi_{w2}(z, t), \\ a_2 H_2(z, t) - B_0 H(z, t) + a_1 H_1(z, t) &= \frac{\hbar c}{2|e|} \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B_0 = 2d + \lambda_1 \operatorname{cth}(L_1/\lambda_1) + \lambda_2 \operatorname{cth}(L_2/\lambda_2),$$

$$B_1 = 2d_1 + \lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{cth}(L_1/\lambda_1),$$

$$B_2 = 2d_2 + \lambda_3 + \lambda_2 \operatorname{cth}(L_2/\lambda_2), \quad a_i = \lambda_i / \operatorname{sh}(L_i/\lambda_i), \quad i = 1, 2.$$

Решая систему (2) относительно компонент магнитного поля, получаем

$$\begin{aligned} H(z, t) &= -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial z} [a_1 B_2 \varphi_{w1}(z, t) \\ &+ B_1 B_2 \varphi(z, t) + a_2 B_1 \varphi_{w2}(z, t)], \\ H_1(z, t) &= -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial z} [(B_0 B_2 - a_2^2) \varphi_{w1}(z, t) \\ &+ a_1 B_2 \varphi(z, t) + a_1 a_2 \varphi_{w2}(z, t)], \\ H_2(z, t) &= -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial z} [a_1 a_2 \varphi_{w1}(z, t) + a_2 B_1 \varphi(z, t) \\ &+ (B_0 B_1 - a_1^2) \varphi_{w2}(z, t)], \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Delta = B_0 B_1 B_2 - a_2^2 B_1 - a_1^2 B_2$; $\phi_0 = \pi \hbar c / |e|$ — квант магнитного потока. Подставляя выражения для магнитных полей в первые два уравнения системы (1), описывающие волноводы, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial \varphi_{w1}(z, t)}{\partial t} &= V_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial z^2} \\ &+ S_{10} V_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + S_{10} S_{02} V_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial \varphi_{w2}(z, t)}{\partial t} &= V_{s2}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial z^2} \\ &+ S_{20} V_{s2}^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + S_{01} S_{20} V_{s2}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

а из третьего уравнения системы (1), описывающего ДП, следует

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \sin \varphi(z, t) + \beta \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} &= V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} \\ &+ S_{01} V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial z^2} + S_{02} V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения (4) и (5) составляют замкнутую систему уравнений для разностей фаз. Здесь величины V_s , V_{s1} и V_{s2} представляют собой скорости Свихарта магнито-связанных ДП и волноводов

$$V_s^2 = c^2 \frac{2d}{\varepsilon} \frac{B_1 B_2}{\Delta}, \quad V_{s1}^2 = c^2 \frac{2d_1}{\varepsilon_1} \frac{B_0 B_2 - a_2^2}{\Delta},$$

$$V_{s2}^2 = c^2 \frac{2d_2}{\varepsilon_2} \frac{B_0 B_1 - a_1^2}{\Delta},$$

S_{10} и S_{20} — константы взаимодействия, описывающие влияние ДП на первый и второй волноводы,

$$S_{10} = \frac{a_1 B_2}{B_0 B_2 - a_2^2}, \quad S_{20} = \frac{a_2 B_1}{B_0 B_1 - a_1^2},$$

а S_{01} и S_{02} — константы взаимодействия, описывающие влияние волноводов на ДП, $S_{01} = a_1/B_1$, $S_{02} = a_2/B_2$. Подчеркнем, что скорости Свихарта V_s , V_{s1} и V_{s2} определены с учетом взаимодействия ДП и волноводов. Видно, что в пределе больших расстояний между несверхпроводящими слоями все константы взаимодействия стремятся к нулю, а значения величин V_s , V_{s1} , V_{s2} стремятся к значениям скоростей Свихарта изолированного ДП и двух изолированных волноводов.

3. Свободно движущиеся джозефсоновские вихри

Рассмотрим вихревые структуры, свободно движущиеся вдоль оси Oz с постоянной скоростью v . Существование подобных структур возможно, в частности, в случае пренебрежимо малой диссипации энергии в несверхпроводящих слоях. Пренебрегая величинами β , β_1 и β_2 в (4) и (5), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (V_{s1}^2 - v^2)\psi''_{w1}(\xi) + S_{10}V_{s1}^2\psi''(\xi) + S_{10}S_{02}V_{s1}^2\psi''_{w2}(\xi) &= 0, \\ (V_{s2}^2 - v^2)\psi''_{w2}(\xi) + S_{20}V_{s2}^2\psi''(\xi) + S_{01}S_{20}V_{s2}^2\psi''_{w1}(\xi) &= 0, \\ S_{01}V_s^2\psi''_{w1}(\xi) + S_{02}V_s^2\psi''_{w2}(\xi) &+ (V_s^2 - v^2)\psi''(\xi) = \omega_j^2 \sin \psi(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\psi(\xi) = \varphi(z, t)$, $\psi_{w1}(\xi) = \varphi_{w1}(z, t)$, $\psi_{w2}(\xi) = \varphi_{w2}(z, t)$, где $\xi = z - vt$. Согласно первым двум уравнениям (6),

$$\begin{aligned} \psi''_{w1}(\xi) &= S_{10}V_{s1}^2 \\ &\times \frac{v^2 - (1 - S_{20}S_{02})V_{s2}^2}{(V_{s1}^2 - v^2)(V_{s2}^2 - v^2) - S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}V_{s1}^2V_{s2}^2} \psi''(\xi), \\ \psi''_{w2}(\xi) &= S_{20}V_{s2}^2 \\ &\times \frac{v^2 - (1 - S_{10}S_{01})V_{s1}^2}{(V_{s1}^2 - v^2)(V_{s2}^2 - v^2) - S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}V_{s1}^2V_{s2}^2} \psi''(\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки (7) в третье уравнение системы (6) получаем одно уравнение для функции $\psi(\xi)$

$$\sin \psi(\xi) = k_j^{-2}(v)\psi''(\xi), \quad (8)$$

где функция $k_j(v)$ определена как

$$\omega_j^2 k_j^{-2}(v) = \frac{(v_0^2 - v^2)(v_1^2 - v^2)(v_2^2 - v^2)}{(\tilde{v}_1^2 - v^2)(\tilde{v}_2^2 - v^2)}. \quad (9)$$

Здесь v_0 , v_1 и v_2 — корни уравнения

$$\begin{aligned} (V_s^2 - v^2)(V_{s1}^2 - v^2)(V_{s2}^2 - v^2) &- S_{01}S_{10}V_s^2V_{s1}^2(V_{s2}^2 - v^2) - S_{02}S_{20}V_s^2V_{s2}^2(V_{s1}^2 - v^2) \\ + S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}V_{s1}^2V_{s2}^2(V_s^2 + v^2) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а положительные величины, определяемые формулами

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n^2 &= \frac{V_{s1}^2 + V_{s2}^2}{2} \\ + \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{(V_{s1}^2 - V_{s2}^2)^2 + 4S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}V_{s1}^2V_{s2}^2}, \quad n &= 1, 2, \end{aligned}$$

являются корнями уравнения

$$(V_{s1}^2 - v^2)(V_{s2}^2 - v^2) - S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}V_{s1}^2V_{s2}^2 = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (8), которое отвечает случаю движущегося с постоянной скоростью v устойчивого элементарного вихря (2 π -кинк), имеет вид

$$\psi(\xi) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp(k_j(v)\xi) \right\}. \quad (12)$$

Это решение описывает вихрь только в том случае, когда функция $k_j(v)$, определяемая формулой (9), является действительной. Например, в случае, когда константы связи S_{10} , S_{20} , S_{01} и S_{02} невелики, движение элементарного вихря возможно в одной из трех областей скоростей: 1) от нуля до меньшего из корней уравнения (10); 2) от меньшего корня уравнения (11) до того из трех корней (10), который не является ни минимальным, ни максимальным; 3) от наибольшего из корней (11) до наибольшего из корней (10).

В том случае, когда константы связи S_{10} , S_{20} , S_{01} и S_{02} малы, а скорости Свихарта V_s , V_{s1} и V_{s2} не совпадают друг с другом, причем $V_{s2} > V_{s1}$, корни уравнения (11) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= V_{s1} + O(S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}), \\ \tilde{v}_2 &= V_{s2} + O(S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}), \end{aligned} \quad (13)$$

а корни уравнения (10) приближенно равны

$$\begin{aligned} v_0 &\approx V_s \left(1 + \frac{1}{2} S_{01}S_{10} \frac{V_{s1}^2}{V_s^2 - V_{s1}^2} + \frac{1}{2} S_{02}S_{20} \frac{V_{s2}^2}{V_s^2 - V_{s2}^2} \right), \\ v_1 &\approx V_{s1} \left(1 + \frac{1}{2} S_{01}S_{10} \frac{V_s^2}{V_{s1}^2 - V_s^2} \right), \\ v_2 &\approx V_{s2} \left(1 + \frac{1}{2} S_{02}S_{20} \frac{V_s^2}{V_{s2}^2 - V_s^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Когда скорость Свихарта ДП мала по сравнению со скоростями Свихарта волноводов ($V_s \ll V_{s1} < V_{s2}$), корни уравнений (10) принимают совсем простой вид

$$\begin{aligned} v_0 &\approx V_s [1 - (S_{01}S_{10} + S_{02}S_{20})/2], \\ v_1 &\approx V_{s1} \left(1 + \frac{1}{2} S_{01}S_{10} \frac{V_s^2}{V_{s1}^2} \right), \\ v_2 &\approx V_{s2} \left(1 + \frac{1}{2} S_{02}S_{20} \frac{V_s^2}{V_{s2}^2} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что в этом случае существуют две сравнительно узкие области скоростей (\tilde{v}_1, v_1) и (\tilde{v}_2, v_2) , в которых движение 2π -кинка возможно со скоростями, значительно превышающими скорость Свихарта ДП. По аналогии с рассмотрением работы [8] можно считать, что в этих областях существует быстрый джозефсоновский вихрь, скорость которого значительно превышает скорость Свихарта ДП, являющуюся предельной для вихря, движущегося в изолированном ДП. Подчеркнем, что в отличие от данных работы [8] в рассматриваемой нами структуре, состоящей из ДП и двух магнитосвязанных с ним волноводов, возникает не одна, а две области быстрого вихря, поэтому можно говорить о первом и втором быстрых вихрях соответственно.

Рассмотрим теперь еще один простой предельный случай, когда $V_{s1} \ll V_s < V_{s2}$. Подобная ситуация реализуется, например, если лондоновские длины сверхпроводников близки по величине $\lambda_0 \approx \lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3 \approx \lambda$, а $\varepsilon_1(d_1 + \lambda)/d_1 \gg \varepsilon(d_1 + \lambda)/d > \varepsilon_2(d_2 + \lambda)/d_2$. Корни уравнения (10) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} v_0 &\approx V_s \left(1 - \frac{1}{2} S_{02}S_{20} \frac{V_{s2}^2}{V_{s2}^2 - V_s^2} \right), \\ v_1 &\approx V_{s1} (1 - S_{01}S_{10}/2), \\ v_2 &\approx V_{s2} \left(1 + \frac{1}{2} S_{02}S_{20} \frac{V_s^2}{V_{s2}^2 - V_s^2} \right). \end{aligned}$$

Сравним эти результаты с результатами работы [8], где рассматривалась структура из ДП, магнитосвязанного с одним волноводом. Можно увидеть, что добавление второго волновода с относительно небольшой скоростью Свихарта V_{s1} создает вблизи V_{s1} , где ранее была область разрешенного движения, узкую запрещенную зону. Если же добавляется волновод со скоростью Свихарта V_{s2} , большей, чем скорость Свихарта ДП, то возникает узкая разрешенная для движения вихря область. Если в данном случае скорость Свихарта добавленного волновода много больше, чем для ДП ($V_s \ll V_{s2}$), то также можно говорить о возникновении области быстрого джозефсоновского вихря.

В том случае, когда скорости Свихарта обоих волноводов меньше, чем скорость Свихарта ДП ($V_{s1} < V_{s2} < V_s$), влияние волноводов приводит к тому, что движение вихря возможно не при всех скоростях

$v < V_s$, а лишь в трех областях, разделенных двумя сравнительно узкими запрещенными зонами, находящимися вблизи скоростей Свихарта волноводов.

Обсудим теперь три частных случая, не описываемых формулами (13) и (14). Во-первых, при совпадении всех трех скоростей Свихарта ($V_s = V_{s1} = V_{s2}$) решения уравнения (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &\approx V_{s1} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}} \right), \\ \tilde{v}_2 &\approx V_{s1} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{S_{01}S_{10}S_{02}S_{20}} \right), \end{aligned}$$

а решения уравнения (10) описываются соотношениями

$$\begin{aligned} v_0 &= V_s + O(S_{01}S_{10} + S_{02}S_{20}), \\ v_1 &\approx V_s \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{S_{01}S_{10} + S_{02}S_{20}} \right), \\ v_2 &\approx V_s \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{S_{01}S_{10} + S_{02}S_{20}} \right). \end{aligned}$$

В этом случае вблизи скорости Свихарта находятся две сравнительно узкие запрещенные для движения элементарного вихря зоны.

Во-вторых, если скорости Свихарта ДП и одного из волноводов совпадают ($V_s = V_{s1} \neq V_{s2}$), то для решений уравнения (11) по-прежнему справедливы формулы (13), в то время как решения уравнения (10) описываются следующими приближенными формулами:

$$\begin{aligned} v_0 &\approx V_s \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{S_{01}S_{10}} \right), \quad v_1 \approx V_s \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{S_{01}S_{10}} \right), \\ v_2 &\approx V_{s2} \left(1 + \frac{1}{2} S_{02}S_{20} \frac{V_s^2}{V_{s2}^2 - V_s^2} \right). \end{aligned}$$

Если при этом $V_s < V_{s2}$, то вблизи скорости Свихарта V_s имеется сравнительно узкая запрещенная зона, рядом с которой находится узкая разрешенная область. Еще одна узкая разрешенная для движения элементарного вихря область находится вблизи V_{s2} . В том случае, когда $V_s \ll V_{s2}$, в этой области возможно движение быстрого вихря. Если же $V_{s2} < V_s$, то вблизи каждой из скоростей Свихарта находится сравнительно узкая запрещенная для движения вихря зона.

В-третьих, если скорости Свихарта волноводов равны и много больше скорости Свихарта ДП ($V_s \ll V_{s1} = V_{s2}$), то движение элементарного вихря со скоростью, значительно большей скорости Свихарта ДП, возможно в двух узких областях вблизи $V_{s1} = V_{s2}$, разделенных также сравнительно узкой запрещенной зоной. Ширина разрешенных зон в этом случае $\sim (S_{01}S_{10} + S_{02}S_{20})V_s^2/V_{s1}$. Подчеркнем, что такая же картина разрешенных скоростей движения вихря и запрещенных для движения зон возникает и при $v < 0$.

4. Магнитное поле свободно движущегося вихря

Движущийся в слоистой структуре вихрь создает определенное пространственное распределение магнитного поля. Поля внутри несверхпроводящих слоев описываются формулами (3), (7) и (12), а магнитные поля в сверхпроводниках связаны с полями в ДП и волноводах соотношениями

$$\begin{aligned}
 H(x < -L_1 - d - 2d_1, z, t) &= H_1(z, t) \exp[(x + L_1 + d + 2d_1)/\lambda_0], \\
 H(-L_1 - d < x < -d, z, t) &= H(z, t) \frac{\text{sh}[(x + L_1 + d)/\lambda_1]}{\text{sh}(L_1/\lambda_1)} - H_1(z, t) \frac{\text{sh}[(x + d)/\lambda_1]}{\text{sh}(L_1/\lambda_1)}, \\
 H(d < x < d + L_2, z, t) &= H_2(z, t) \frac{\text{sh}[(x - d)/\lambda_2]}{\text{sh}(L_2/\lambda_2)} - H(z, t) \frac{\text{sh}[(x - d - L_2)/\lambda_2]}{\text{sh}(L_2/\lambda_2)}, \\
 H(x > d + L_2 + 2d_2, z, t) &= H_2(z, t) \exp[-(x - L_2 - d - 2d_2)/\lambda_2]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Из формулы (12) следует, что характерный масштаб изменения магнитного поля вихря вдоль оси Oz определяется зависящей от скорости движения вихря величиной $k_j^{-1}(v)$, задаваемой формулой (9). Из (9) видно, что масштаб изменения поля вдоль оси Oz уменьшается с приближением скорости вихря v к одному из корней (10) и, наоборот, увеличивается с приближением v к корням (11).

Распределение магнитного поля вихря вдоль оси Ox полностью описывается соотношениями (15). Видно, что характерными масштабами изменения поля вдоль этой оси являются лондоновские длины сверхпроводников. Структура магнитного поля при этом зависит как от соотношения скоростей Свихарта ДП и волноводов, так и от скорости движения вихря.

На рис. 1 представлена структура магнитного поля вихрей для всех исследованных нами случаев. Графики построены по формулам (3), (7), (12) и (15) при $t = 0$. Строя графики, мы полагали $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ и $L_1 = L_2 = \lambda$. Мы также предполагали, что ширины волноводов заметно меньше λ . Такое соотношение длин L_1 , L_2 и лондоновских глубин отвечает константам связи $S_{01} = S_{10} = S_{02} = S_{20} \approx 0.4$. Общим для всех графиков является то, что магнитное поле как функция переменной z имеет максимум в точке $z = 0$, а вдоль оси Ox оно локализовано вблизи границ сверхпроводников в слоях толщиной λ , что отвечает эффекту Мейсснера. Поэтому далее будем считать, что магнитное поле сосредоточено вблизи того или иного несверхпроводящего слоя.

Рассмотрим случай, когда $V_{s2} = 2V_{s1} = 6V_s$. При таком соотношении скоростей Свихарта ДП и волноводов

движение элементарного вихря возможно в широкой области скоростей $v < v_0 \sim V_s$ и в двух узких областях скоростей вблизи V_{s1} и V_{s2} . В каждой из областей разрешенного движения магнитное поле вихря имеет свою структуру. На рис. 1, *a* приведен график для магнитного поля медленного вихря, имеющего скорость $v = 0.6V_s < v_0 \sim V_s$. Видно, что поле такого вихря в основном сосредоточено вблизи ДП, который на этом рисунке находится в плоскости $x = 0$. На рис. 1, *b* показано магнитное поле первого быстрого вихря. Это магнитное поле в отличие от поля медленного вихря сосредоточено вблизи первого волновода, расположенного на рисунке в плоскости $x = -\lambda$. Магнитное поле второго быстрого вихря в основном сосредоточено вблизи второго волновода, который расположен в плоскости $x = \lambda$. Зависимость поля такого вихря от координат подобна приведенной на рис. 1, *b*, но поле сосредоточено около второго волновода.

Рассмотрим теперь случай $V_{s2} = 4V_s/3 = 2V_{s1}$. Этот случай характеризуется наличием двух сравнительно широких и одной узкой областей разрешенного движения элементарного вихря. Магнитное поле медленного вихря, движущегося со скоростью $v < v_1 \sim V_{s1}$, представлено на рис. 1, *c* и *d*. Из рис. 1, *c*, на котором изображено поле вихря, движущегося со скоростью $v = 0.5V_{s1}$, соответствующей середине разрешенной области, видно, что магнитное поле в основном локализовано вблизи ДП. Также видно, что часть магнитного поля, локализованная вблизи первого волновода, изменила свой знак. С увеличением скорости медленного вихря (и тем самым с приближением ее к скорости Свихарта первого волновода) его влияние на структуру поля увеличивается. На рис. 1, *d* приведен график для магнитного поля медленного вихря в той части разрешенной области, которая непосредственно примыкает к скорости Свихарта первого волновода. Влияние волновода здесь проявляется в том, что большая часть магнитного поля в структуре изменила свое направление на противоположное. На рис. 1, *e* представлено магнитное поле вихря, движущегося со скоростью $v = 1.1V_{s1}$, отвечающей середине широкой разрешенной области $\tilde{v}_1 \approx V_{s1} < v < v_0 \sim V_s$. Это магнитное поле сосредоточено в сверхпроводниках вблизи первого волновода и ДП. На рис. 1, *f* представлено магнитное поле быстрого вихря, скорость которого находится в узкой разрешенной области вблизи скорости Свихарта второго волновода. Как и в случае быстрого вихря на рис. 1, *b*, поле в основном сосредоточено вблизи волновода, влияние которого и приводит к возникновению узкой разрешенной зоны.

Наконец, обсудим пространственное распределение магнитного поля вихрей в случае $V_s = 3V_{s2}/2 = 3V_{s1}$. В этом случае движение вихря разрешено в трех широких областях скоростей, разделенных двумя узкими запрещенными зонами. Магнитное поле вихря, движущегося со скоростью, находящейся в середине разрешенной области $v < v_1 \sim V_{s1}$, похоже на поле вихря на рис. 1, *a*.

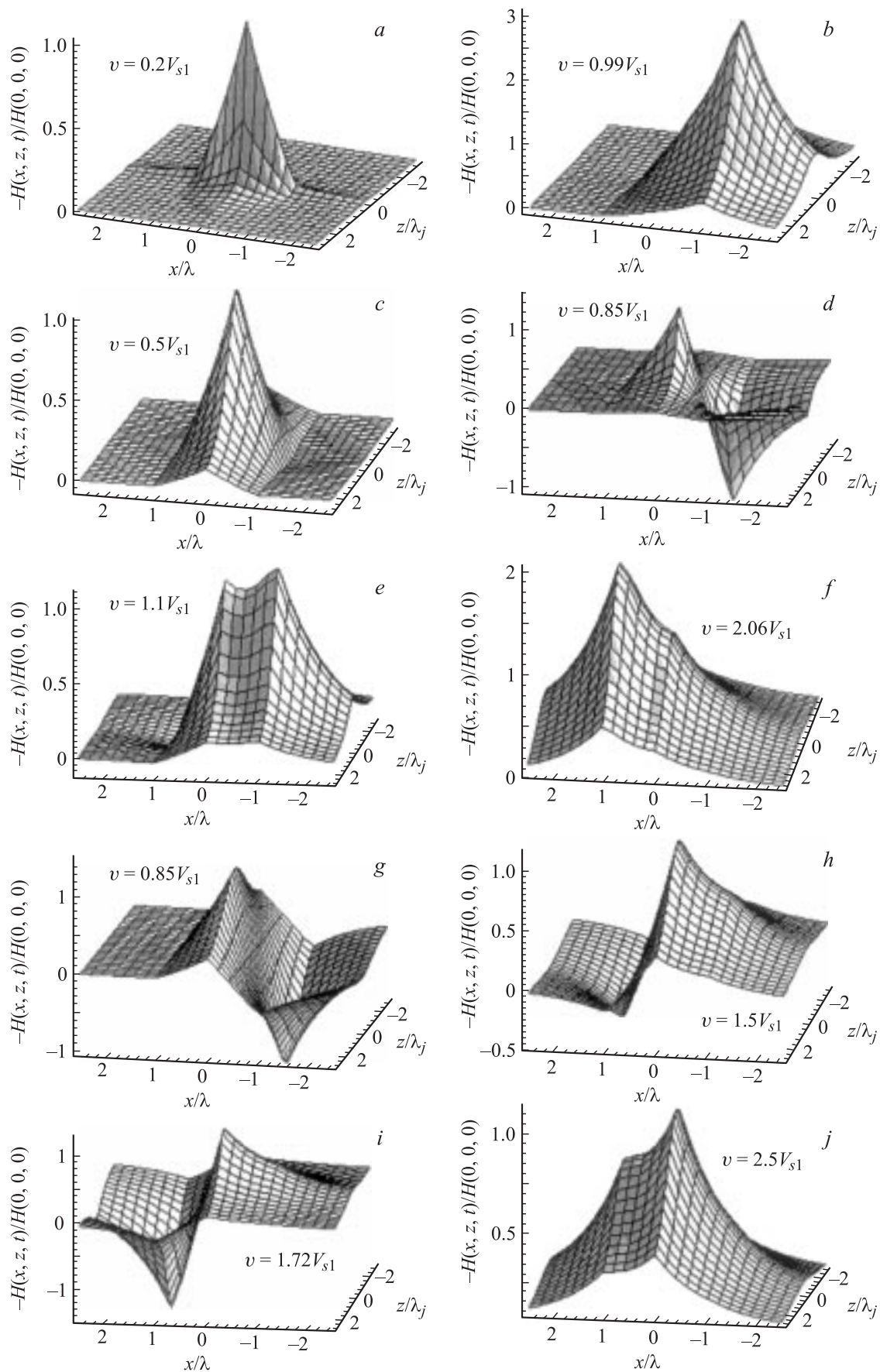


Рис. 1. Структура магнитного поля вихрей. $V_s = V_{s1}/3$, $V_{s2} = 2V_{s1}$ (a, b); $V_s = 3V_{s1}/2$, $V_{s2} = 2V_{s1}$ (c-f); $V_s = 3V_{s1}$, $V_{s2} = 2V_{s1}$ (g-j).

График магнитного поля вихря, скорость которого находится в области $v < v_1 \sim V_{s1}$, но, ближе к скорости $v_1 \sim V_{s1}$, представлен на рис. 1, *g*. Как и для вихря на рис. 1, *d*, часть магнитного поля, сосредоточенная в сверхпроводниках вблизи первого волновода, изменила свой знак на противоположный. На рис. 1, *h* и *i* приведены графики для магнитного поля вихрей, движущихся со скоростями, отвечающими разрешенной области $\bar{v} \approx V_{s1} < v < v_2 \sim V_{s2}$. На рис. 1, *h* представлен вихрь, движущийся со скоростью $v = 1.5V_{s1}$, что соответствует середине этой разрешенной области. Видно, что часть поля, локализованная вблизи второго волновода, изменила свой знак. Как и ранее (рис. 1, *c* и *d*), влияние второго волновода возрастает по мере приближения скорости вихря к $v_2 \sim V_{s2}$. Для вихря, движущегося в области скоростей, примыкающей к $v_2 \sim V_{s2}$, большая часть магнитного поля изменяет свой знак на противоположный (рис. 1, *i*). На рис. 1, *j* представлен график магнитного поля вихря, который движется со скоростью, находящейся в середине третьей широкой разрешенной области $\bar{v}_2 \approx V_{s2} < v < v_0 \sim V_s$. Основная часть магнитного поля такого вихря сосредоточена в сверхпроводниках, примыкающих к ДП и второму волноводу.

Приведенные на рис. 1 графики исчерпывают все многообразие профилей магнитного поля элементарных вихрей, которые могут двигаться в структуре, состоящей из ДП и двух связанных с ним волноводов. Полученные в этом разделе сведения о магнитном поле вихря позволяют понять возможность поддержания его вынужденного движения с помощью различных способов пропускания тока через слоистую структуру.

5. Вынужденное движение вихря

Рассмотрим движение вихря под действием транспортного тока плотностью j , протекающего вдоль оси x через ДП. В этом случае система уравнений для разностей фаз состоит из двух уравнений (4) и уравнения (5), в которое добавлена плотность тока:

$$\begin{aligned} \omega_j^2 \sin \varphi(z, t) + \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial t^2} + \omega_j^2 \frac{j}{j_c} + \beta \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} \\ = V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + S_{01} V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial z^2} + S_{02} V_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать только вихри, движущиеся с постоянной скоростью. Тогда, используя приближенное решение уравнений (4) (см. Приложение), которое возможно в пределе малой диссипации энергии в несверхпроводящих слоях, представим (16) в виде (ср. с (8))

$$\sin \psi(\xi) - k_j^{-2}(v) \psi''(\xi) + \frac{j}{j_c} = \frac{v\beta(v)}{\omega_j^2} \psi'(\xi), \quad (17)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \beta(v) = \beta + \beta_1 V_s^2 V_{s1}^2 S_{01} S_{10} \frac{(V_{s2}^2 - v^2 - S_{02} S_{20} V_{s2}^2)^2}{(\bar{v}_1^2 - v^2)^2 (\bar{v}_2^2 - v^2)^2} \\ + \beta_2 V_s^2 V_{s2}^2 S_{02} S_{20} \frac{(V_{s1}^2 - v^2 - S_{01} S_{10} V_{s1}^2)^2}{(\bar{v}_1^2 - v^2)^2 (\bar{v}_2^2 - v^2)^2}. \end{aligned}$$

В пределе малых констант связи S_{10} , S_{20} , S_{01} , S_{02} из (17) приближенно находим (ср. с [8])

$$\begin{aligned} \beta(v) \approx \beta + \beta_1 S_{01} S_{10} \frac{V_s^2 V_{s1}^2}{(V_{s1}^2 - v^2)^2} \\ + \beta_2 S_{02} S_{20} \frac{V_s^2 V_{s2}^2}{(V_{s2}^2 - v^2)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Эта формула отвечает такому пределу, когда взаимодействием волноводов друг с другом можно полностью пренебречь.

Пользуясь формальным сходством уравнения (17) с уравнением, описывающим равномерное движение вихря в изолированном ДП, и следуя работе [10], для связи плотности транспортного тока со скоростью движения вихря получаем

$$\left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} = \frac{4 \beta(v) v k_j(v)}{\pi \omega_j^2}. \quad (19)$$

Обсудим зависимость (19) в случае, когда для структуры, состоящей из ДП и двух магнитосвязанных с ним волноводов с малыми константами связи S_{10} , S_{20} , S_{01} , S_{02} и $\beta_1 \sim \beta_2$, выполнено условие $V_s \ll V_{s1} \ll V_{s2}$. В этом случае слоистая структура характеризуется наличием широкой области скоростей медленного вихря и двух узких областей скоростей быстрого вихря. В широкой области скоростей медленного вихря $0 < v < v_0 \approx V_s [1 - (S_{01} S_{10} + S_{02} S_{20})/2]$ зависимость (19) приближенно можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{4}{\pi} \left(\beta + \beta_1 S_{01} S_{10} \frac{V_s^2}{V_{s1}^2} + \beta_2 S_{02} S_{20} \frac{V_s^2}{V_{s2}^2} \right) \\ \times \frac{v}{\omega_j} \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - v^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Зависимость (20) отличается от известной зависимости работы [10] для одного перехода, во-первых, появлением слагаемых, связанных с диссипацией в волноводах, а во-вторых, тем, что вместо скорости Свихарта ДП под знаком корня стоит несколько меньшая величина v_0 .

В двух узких областях скоростей $\bar{v}_i \approx V_{si} < v < v_i \approx V_{si} (1 + S_{0i} S_{i0} V_s^2 / 2V_{si}^2)$, когда речь идет о движении первого и второго быстрых вихрей имеем

$$\left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{4}{\pi} \left[\beta + \beta_i S_{0i} S_{i0} \frac{V_s^2 V_{si}^2}{(v^2 - V_{si}^2)^2} \right] \frac{v}{\omega_j} \sqrt{\frac{v - V_{si}}{v_i - v}}. \quad (21)$$

Здесь $i = 1, 2$ для первого и второго быстрых вихрей соответственно. Из (21) видно, что для обоих быстрых

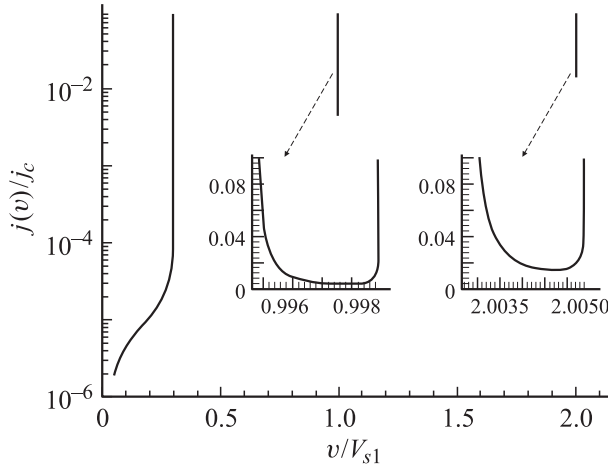


Рис. 2. Плотность транспортного тока в зависимости от скорости вихря в случае $V_s = V_{s1}/3$ и $V_{s2} = 2V_{s1}$.

вихрей зависимость $j(v)$ внутри соответствующих разрешенных зон имеет минимум. Заметим, что в случае движения быстрого вихря в ДП, магнитосвязанном с одним волноводом, ток также имел локальный минимум в области скоростей существования быстрого вихря. Если $\beta \ll \beta_1 V_{s1}^2 / (S_{01} S_{10} V_s^2) \sim \beta_2 V_{s2}^2 / (S_{02} S_{20} V_s^2)$, что отвечает случаю, когда потери в волноводах велики по сравнению с потерями в ДП, то из (21) находим минимальное значение транспортного тока в этих областях

$$\min \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{64}{3\sqrt{3}\pi} \frac{\beta_i V_{si}^2}{\omega_j V_s^2} \frac{1}{S_{0i} S_{i0}}.$$

Видно, что минимальное значение транспортного тока, достаточного для поддержания движения быстрого вихря, определяется параметрами того волновода, с которым связано существование данного быстрого вихря. Достигается это минимальное значение в точке, отстоящей на четверть ширины разрешенной области от ее верхней границы. На рис. 2 показана зависимость $j(v)$, построенная по формуле (19) для всех областей разрешенных скоростей движения элементарного вихря. График построен для случая $V_s = V_{s1}/3$ и $V_{s2} = 2V_{s1}$, $S_{01} = S_{10} = S_{02} = S_{20} = 0.3$, $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 10^{-5} \omega_j$. Из этого рисунка видно, что транспортный ток в области движения самого медленного вихря с ростом скорости монотонно возрастает до границы разрешенной области. В то же время в узких областях движения быстрого вихря транспортный ток имеет локальный минимум, который значительно меньше критического тока j_c . Согласно соотношениям (21) и рис. 2, если скорость вихря близка к скорости, отвечающей минимуму тока, но несколько меньше ее, функция $j(v)$ имеет отрицательную производную. Учитывая аналогию между $j(v)$ и вольт-амперной характеристикой проводника, будем называть область, где $j'(v) < 0$, областью с отрицательной дифференциальной проводимостью. Наличие такой области на кривой $j(v)$ означает, что систему из ДП,

магнитосвязанного с волноводом(ами), можно использовать как генератор электромагнитного излучения.

Рассмотрим теперь случай, когда скорость Свихарта одного из волноводов много меньше скорости Свихарта ДП: $V_{s1} \ll V_s \ll V_{s2}$. В этом случае из (19) для области скоростей $0 < v < v_1 \approx V_{s1}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ имеем

$$\left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{4}{\pi} \left[\beta + \beta_1 S_{01} S_{10} \frac{V_s^2 V_{s1}^2}{(V_{s1}^2 - v^2)^2} \right] \frac{v}{v_0 \omega_j} \sqrt{\frac{V_{s1} - v}{v_1 - v}}. \quad (22)$$

Для второй широкой области $\tilde{v}_1 \approx V_{s1} < v < v_0 \approx V_s(1 - S_{02}S_{20}/2)$ ток принимает вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{4}{\pi} \left[\beta + \beta_2 S_{02} S_{20} \frac{V_s^2}{V_{s2}^2} \frac{(V_{s1}^2 - v^2 - S_{01} S_{10} V_{s1}^2)^2}{(V_{s1}^2 - v^2)^2} \right. \\ \left. + \beta_1 S_{01} S_{10} \frac{V_s^2 V_{s1}^2}{(V_{s1}^2 - v^2)^2} \right] \frac{v}{\omega_j} \sqrt{\frac{v^2 - V_{s1}^2}{(v_0^2 - v^2)(v^2 - v_1^2)}}. \quad (23) \end{aligned}$$

В сравнительно узкой области $\tilde{v}_2 \approx V_{s2} < v < v_2 \approx V_{s2}(1 + S_{02}S_{20}V_s^2/2V_{s2}^2)$, в которой возможно движение быстрого вихря, из (19) следует приближенное соотношение (21).

Отвечающая случаю $V_{s1} < V_s < V_{s2}$ зависимость плотности тока от скорости вихря представлена на рис. 3,а. График функции $j(v)$ построен при $V_s = 3V_{s1}/2$, $V_{s2} = 2V_{s1}$, $S_{01} = S_{10} = S_{02} = S_{20} = 0.3$, $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 10^{-5} \omega_j$. Видно, что в области движения самого медленного вихря функция $j(v)$ монотонно возрастает, в то время как в двух других разрешенных для движения вихря областях (как в узкой, так и в широкой) функция $j(v)$ имеет внутри области локальный минимум. В каждой из этих областей при приближении скорости к нижней границе $j'(v) < 0$.

Наконец, рассмотрим случай, когда скорости Свихарта обоих волноводов меньше, чем в ДП: $V_{s1} \ll V_{s2} \ll V_s$. Ток в области скоростей $0 < v < v_1 \approx V_{s1}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ описывается формулой (22). Отметим, что независимо от соотношений скоростей Свихарта транспортный ток как функция скорости в области движения самого медленного вихря всегда монотонно возрастает.

Во второй широкой области скоростей $v_1 < \tilde{v}_1 \approx V_{s1} < v < v_2 \approx V_{s2}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ из (19) следует

$$\begin{aligned} \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{4}{\pi} \left[\beta + \beta_1 S_{01} S_{10} \frac{V_s^2 V_{s1}^2 (V_{s2}^2 - v^2 - S_{02} S_{20} V_{s2}^2)^2}{(V_{s1}^2 - v^2)^2 (V_{s2}^2 - v^2)^2} \right. \\ \left. + \beta_2 S_{02} S_{20} \frac{V_s^2 V_{s2}^2 (V_{s1}^2 - v^2 - S_{01} S_{10} V_{s1}^2)^2}{(V_{s1}^2 - v^2)^2 (V_{s2}^2 - v^2)^2} \right] \\ \times \frac{v}{V_s \omega_j} \sqrt{\frac{(v^2 - V_{s1}^2)(V_{s2}^2 - v^2)}{(v^2 - v_1^2)(v_2^2 - v^2)}}. \quad (24) \end{aligned}$$

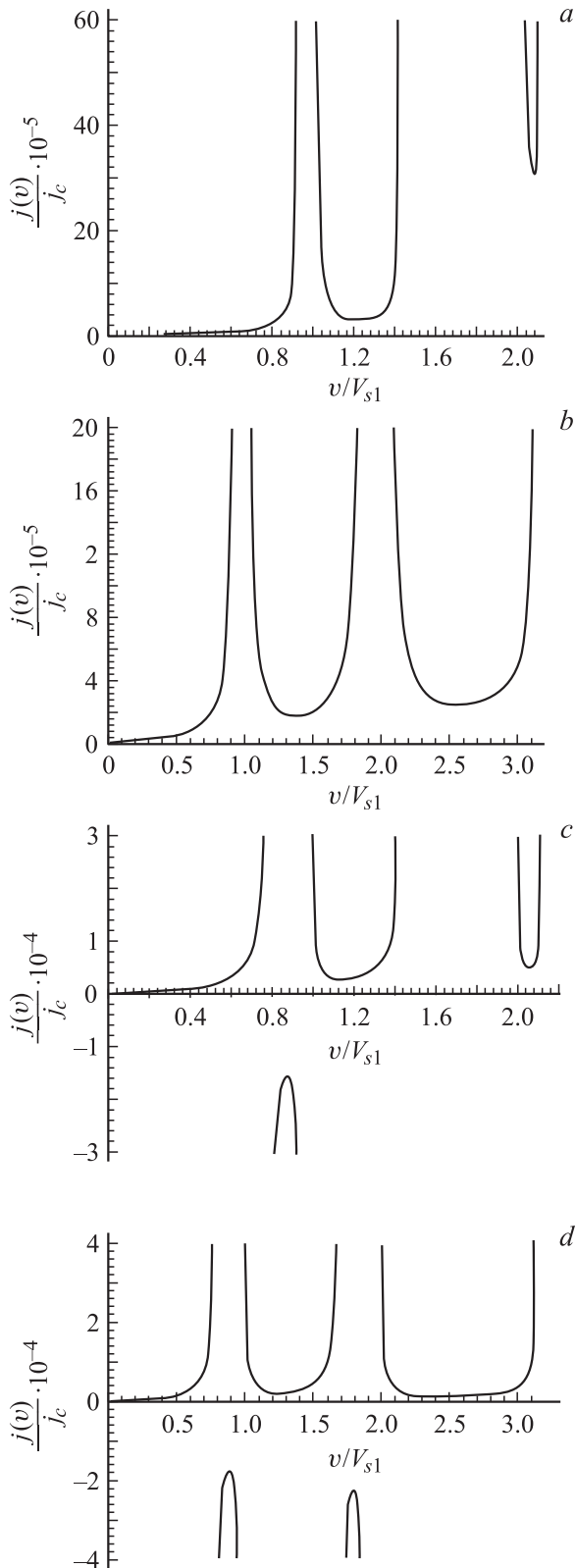


Рис. 3. Та же функция, что и на рис. 2. $V_s = 3V_{s1}/2$, $V_{s2} = 2V_{s1}$ (a, c); $V_s = 3V_{s1}$, $V_{s2} = 2V_{s1}$ (b, d). Части c и d отвечают случаю, когда ток протекает через ДП и волноводы.

Наконец, в третьей широкой разрешенной области $v_2 < \tilde{v}_2 \approx V_{s2} < v < v_0 \approx V_s$ из (19) имеем

$$\left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \approx \frac{4}{\pi} \left[\beta + \beta_1 S_{01} S_{10} \frac{V_s^2 V_{s1}^2 (V_{s2}^2 - v^2 - S_{02} S_{20} V_{s2}^2)^2}{v^4 (V_{s2}^2 - v^2)^2} + \beta_2 S_{02} S_{20} \frac{V_s^2 V_{s2}^2}{(V_{s2}^2 - v^2)^2} \right] \frac{1}{\omega_j} \sqrt{\frac{v^2 - V_{s2}^2}{(v_0^2 - v^2)(v^2 - v_2^2)}}. \quad (25)$$

График функции $j(v)$ в случае, когда движение вихря возможно в трех сравнительно широких разрешенных областях, разделенных двумя узкими запрещенными зонами, приведен на рис. 3, b. График построен при $V_s = 3V_{s1}$, $V_{s2} = 2V_{s1}$ и при тех же, что и ранее, значениях констант связи и параметров β/ω_j , β_i/ω_j . Из рис. 3, b видно, что ток в первой разрешенной области монотонно растет, а внутри каждой из двух широких областей он имеет локальный минимум и участок, где $j'(v) < 0$.

6. Вынужденное движение вихря при протекании тока через всю структуру

Рассмотрим движение вихря под действием транспортного тока плотностью j , протекающего вдоль оси Ox не только через ДП, но и через оба волновода. В этом случае система уравнений для разностей фаз состоит из уравнения (16) и двух уравнений (4), в которые добавлен ток:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial t^2} + \frac{16\pi |e| d_1}{\hbar \varepsilon_1} j \\ + \beta_1 \frac{\partial \varphi_{w1}(z, t)}{\partial t} = V_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial z^2} \\ + S_{10} V_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + S_{10} S_{02} V_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial t^2} + \frac{16\pi |e| d_2}{\hbar \varepsilon_2} j \\ + \beta_2 \frac{\partial \varphi_{w2}(z, t)}{\partial t} = V_{s2}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w2}(z, t)}{\partial z^2} \\ + S_{20} V_{s2}^2 \frac{\partial^2 \varphi(z, t)}{\partial z^2} + S_{20} S_{01} V_{s2}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{w1}(z, t)}{\partial z^2}. \quad (26) \end{aligned}$$

Когда ток и диссипация в ДП и волноводах малы, из системы уравнений (26) можно приближенно найти ψ_{w1} и ψ_{w2} аналогично тому, как это было сделано в разделе 5. Используя приближенные выражения для ψ_{w1} и ψ_{w2} , вместо уравнения (17) получим

$$\sin \psi(\xi) - k_j^{-2}(v) \psi''(\xi) + \frac{j}{j_c} \frac{1}{I(v)} = \frac{v\beta(v)}{\omega_j^2} \psi'(\xi), \quad (27)$$

где введено обозначение

$$I(v) = \left\{ 1 - \frac{V_s^2}{(\tilde{v}_1^2 - v^2)(\tilde{v}_2^2 - v^2)} \times \left[S_{01} \frac{d_1}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{d} (V_{s2}^2(1 - S_{02}S_{20}) - v^2) + S_{02} \frac{d_2}{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon}{d} (V_{s1}^2(1 - S_{01}S_{10}) - v^2) \right] \right\}^{-1}. \quad (28)$$

С учетом данных раздела 5 и работы [10] из уравнения (27) находим

$$\frac{j(v)}{j_c} = \frac{4}{\pi} \frac{\beta(v)vk_j(v)}{\omega_j^2} I(v). \quad (29)$$

Формула (29) отличается от полученной в предыдущем разделе формулы (19) наличием множителя $I(v)$. Этот зависящий от скорости множитель возник благодаря протеканию тока не только через ДП, но и через волноводы.

Как и в предыдущем разделе, обсудим связь плотности транспортного тока со скоростью движения вихря в условиях, когда малы константы связи ДП и волноводов. В случае $V_s \ll V_{s1} \ll V_{s2}$, когда существуют две области быстрого вихря, в разрешенной области малых скоростей $0 < v < v_0 \approx V_s[1 - (S_{01}S_{10} + S_{02}S_{20})/2]$ имеем

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \frac{1}{1 - S_{10} - S_{20}}. \quad (30)$$

Здесь и далее $[j(v)/j_c]_{JJ}$ — зависимость транспортного тока от скорости в том случае, когда ток протекает только через ДП. В данном случае она дается формулой (20). Соотношение (30) отличается от (20) постоянным множителем, величина которого больше единицы. Это означает, что при пропускании тока через всю структуру для поддержания вынужденного движения медленного вихря необходима большая величина тока, чем в том случае, когда ток протекает только через ДП. Иная ситуация имеет место в двух узких областях скоростей, где разрешено движение быстрых вихрей. В узких областях скоростей $\tilde{v}_i \approx V_{si} < v < v_i \approx V_{si}(1 + S_{0i}S_{i0}V_s^2/2V_{si}^2)$ разрешенного движения первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) быстрых вихрей связь тока со скоростью дается соотношением

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \left(1 + S_{i0} \frac{V_{si}^2}{v^2 - V_{si}^2} \right)^{-1}. \quad (31)$$

Напомним, что зависимость тока от скорости быстрых вихрей в случае его протекания только через ДП дается формулой (21). Из (31) видно, что протекание тока через волноводы привело к относительному уменьшению $j(v)$ на величину $\sim S_{0i}V_s^2/V_{si}^2$ для первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) быстрых вихрей.

Поясним полученные результаты. Для понимания особенностей взаимодействия движущегося вихря с током при различных способах его пропускания через слоистую структуру необходимо знать область сосредоточения магнитного поля вихря. При протекании через слоистую структуру транспортного тока на вихрь действует сила Лоренца, плотность которой на единицу длины вдоль оси Oy имеет вид

$$F_z = - \int dx dz \frac{jH(x, z, t)}{c}, \quad (32)$$

где $H(x, z, t)$ — магнитное поле вихря. Интегрирование в (32) необходимо проводить по всем областям протекания транспортного тока. В том случае, когда транспортный ток протекает через всю слоистую структуру, подставив (15) в (32), получим

$$F_z = - \frac{j}{c} \int dz [(B_1 - a_1)H_1(z, t) + (B_0 - a_1 - a_2)H(z, t) + (B_2 - a_2)H_2(z, t)]. \quad (33)$$

Подставив в (33) выражения для магнитных полей самого медленного вихря, следующие из (3) и (7), получим явное выражение для плотности силы Лоренца, действующей на медленный вихрь,

$$F_z \approx \frac{j}{c} \phi_0(1 - S_{10} - S_{20}). \quad (34)$$

Если транспортный ток протекает только через ДП, то вместо (33) имеем

$$F_z = - \frac{j}{c} \int dz [B_0H(z, t) - a_1H_1(z, t) - a_2H_2(z, t)]. \quad (35)$$

Отсюда, принимая во внимание явный вид магнитных полей, находим

$$F_z \approx \frac{j}{c} \phi_0. \quad (36)$$

Из сравнения (34) и (36) видно, что при протекании тока через всю слоистую структуру сила Лоренца меньше, чем в случае протекания тока только через ДП. Сопротивление движению вихря в слоистой структуре обусловлено диссипацией энергии в несверхпроводящих слоях. Отвечающее омическим потерям изменение энергии системы W описывается соотношением

$$\frac{dW}{dt} = - \int dx dz \sigma E_x^2, \quad (37)$$

где интегрирование идет по несверхпроводящим слоям. Воспользовавшись нестационарным соотношением Джозефсона, а также (7) и (12), из (37) получим

$$\frac{dW}{dt} = - \frac{4}{\pi} \frac{\phi_0 j_c}{\omega_j^2} \frac{v^2 k_j(v) \beta(v)}{c} \equiv -v F_{\text{diss}}. \quad (38)$$

Соотношение (38) определяет диссипативную силу F_{diss} , действующую на вихрь, движущийся со скоростью v .

Из (38) следует, что сила трения, действующая на элементарный вихрь, равна

$$F_{\text{diss}} = \frac{4}{\pi} \frac{\phi_0 j_c}{\omega_j^2} \frac{v k_j(v) \beta(v)}{c}. \quad (39)$$

Согласно соотношениям (37)–(39), величина силы трения не зависит от способа пропускания тока через слоистую структуру. Величина транспортного тока, необходимого для поддержания вынужденного движения вихря, определяется путем приравнивания силы Лоренца, поддерживающей движение вихря, и силы трения, тормозящей это движение. Сравнение (34), (36) с (39) показывает, что протекание транспортного тока через всю слоистую структуру привело к уменьшению силы Лоренца и, следовательно, к увеличению необходимого для поддержания движения вихря транспортного тока.

Поясим теперь формулу (31). Магнитное поле первого быстрого вихря, как видно из рис. 1, *b*, в основном сосредоточено вблизи первого волновода, который на этом рисунке находится в плоскости $x = -\lambda$. Точно так же поле второго быстрого вихря сосредоточено в основном вблизи второго волновода, расположенного в плоскости $x = \lambda$. В том случае, когда транспортный ток пропускается только через ДП, он не проходит через области сосредоточения основной части магнитного поля быстрого вихря. Эти области, таким образом, не вносят вклада в силу Лоренца (32). Если же транспортный ток той же плотности пропускается через всю слоистую структуру, то вклады от основной части магнитного поля, сосредоточенного вблизи волновода, существенно увеличивают силу Лоренца, действующую на быстрый вихрь. Поскольку сила трения (39) остается неизменной, для поддержания вынужденного движения быстрого вихря с данной скоростью необходим транспортный ток меньшей плотности, что и отражено в (31).

Рассмотрим движение вихря под действием транспортного тока в случае, когда скорость Свихарта одного из волноводов много меньше скорости V_s : $V_{s1} \ll V_s \ll V_{s2}$. На рис. 3, *c* представлен график зависимости $j(v)$ для случая $V_s = 3V_{s1}/2$ и $V_{s2} = 2V_{s1}$, $S_{01} = S_{10} = S_{02} = S_{20} = 0.3$, $\beta = \beta_1 = \beta_2 = 10^{-5}\omega_j$ во всех разрешенных областях скоростей. Из графиков видно, что в области разрешенного движения медленного вихря $0 < v < v_1 \approx V_{s1}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ появился участок отрицательного тока. Рассмотрим этот эффект более подробно. Вблизи правой границы разрешенной области $v < v_1$ большая часть магнитного поля медленного вихря, как видно из рис. 1, *d*, под влиянием волновода изменила свое направление на противоположное. Вследствие этого и сила Лоренца (32), действующая на вихрь, изменила свое направление. В двух других разрешенных зонах подобного эффекта не наблюдается, что очевидно из рис. 1, *e* и *f*. В пределе слабой связи между волноводами и ДП в случае $V_{s1} \ll V_s \ll V_{s2}$ для области скоростей

$0 < v < v_1 \approx V_{s1}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ из (29) можно записать

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \left(1 - S_{10} \frac{V_{s1}^2}{V_{s1}^2 - v^2} - S_{20} \frac{V_{s1}^2 - v^2 - V_{s1}^2 S_{01} S_{10}}{V_{s1}^2 - v^2} \right)^{-1}. \quad (40)$$

Согласно (40), в области разрешенного движения $0 < v < v_1 \approx V_{s1}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ возможно изменение знака тока. Перемена знака в (40) является следствием изменения знака множителя $I(v)$ (28): изменение знака тока обусловлено протеканием транспортного тока через волноводы. Из (40) следует, что ток принимает отрицательное значение в области скоростей

$$V_{s1} \sqrt{1 - S_{10}} \approx V_{s1}(1 - S_{10}/2) < v < v_1. \quad (41)$$

Из (3) и (7) следует, что в этой области скоростей магнитные поля в несверхпроводящих слоях принимают вид

$$\begin{aligned} H(z, t) &\approx -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t), \\ H_1(z, t) &\approx \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{B_1} \frac{S_{10} V_{s1}^2}{V_{s1}^2 - v^2} \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t), \\ H_2(z, t) &\approx 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь оставлены только главные слагаемые, не содержащие малости по константам связи S_{10} , S_{20} , S_{01} , S_{02} . Из (42) видно, что в таком приближении в области скоростей (41) магнитные поля в первом волноводе и ДП направлены в противоположные стороны, что полностью согласуется с рис. 1, *d*. Подставив (42) в (32), после интегрирования получим

$$F_z \approx \frac{j}{c} \phi_0 \left(1 - S_{10} \frac{V_{s1}^2}{V_{s1}^2 - v^2} \right). \quad (43)$$

Из (43) видно, что в области скоростей (41) сила, действующая на вихрь, изменяет знак, что отвечает вынужденному движению вихря в обратном направлении. Из этого следует, что волновод со скоростью Свихарта, меньшей, чем в ДП, способен создать условия для движения вихря в обратном направлении.

Во второй широкой разрешенной зоне $\tilde{v}_1 \approx V_{s1} < v < v_0 \approx V_s(1 - S_{02}S_{20}/2)$ ток описывается формулой (40). Для вихря в этой зоне, как видно из рис. 1, *e*, магнитное поле локализовано в ДП и первом волноводе, а изменение его направления в окрестности второго волновода ничтожно мало.

В узкой зоне быстрого вихря $\tilde{v}_2 \approx V_{s2} < v < v_2 \approx V_{s2}(1 + S_{02}S_{20}V_s^2/2V_{s2}^2)$ ток описывается формулой

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \left(1 + S_{20} \frac{V_{s2}^2}{v^2 - V_{s2}^2} \right)^{-1}. \quad (44)$$

Из рис. 3, *c* и формул (40) и (44) можно видеть, что как в широкой, так и в узкой разрешенных зонах ток внутри зоны имеет локальный минимум и участки, где $j'(v) < 0$.

График функции $j(v)$ для случая, когда в системе присутствуют два волновода со скоростями, меньшими, чем скорость Свихарта ДП ($V_{s1} \ll V_{s2} \ll V_s$), представлен на рис. 3, *d*. График построен для значений скоростей $V_s = 3V_{s1}$, $V_{s2} = 2V_{s1}$, остальные параметры те же, что и ранее. Видно, что на графике $j(v)$ появляются две области отрицательного тока — около каждой из скоростей Свихарта волноводов. В этом случае для описания зависимости транспортного тока от скорости в первой области скоростей $0 < v < v_1 \approx V_{s1}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ можно использовать формулу (40). В следующей области разрешенного движения $\tilde{v}_1 \approx V_{s1} < v < v_2 \approx V_{s2}(1 - S_{01}S_{10}/2)$ имеем

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \left[1 + S_{10}V_{s1}^2 \frac{V_{s2}^2 - v^2 - S_{02}S_{20}V_{s2}^2}{(v^2 - V_{s1}^2)(V_{s2}^2 - v^2)} + S_{20}V_{s2}^2 \frac{V_{s1}^2 - v^2 - S_{01}S_{10}V_{s1}^2}{(v^2 - V_{s1}^2)(V_{s2}^2 - v^2)} \right]^{-1}. \quad (45)$$

Из (45), в частности, следует, что внутри зоны разрешенного движения появляется вторая область отрицательного тока. Из рис. 1, *i* можно видеть, что вблизи скорости Свихарта второго волновода также происходит изменение знака большей части магнитного поля, что и является причиной изменения направления движения вихря.

Наконец, в третьей области $\tilde{v}_2 \approx V_{s2} < v < v_0 \approx V_s$ из (29) получаем

$$\frac{j(v)}{j_c} \approx \left[\frac{j(v)}{j_c} \right]_{JJ} \times \left[1 + S_{10}V_{s1}^2 \frac{V_{s2}^2 - v^2 - S_{02}S_{20}V_{s2}^2}{v^2(V_{s2}^2 - v^2)} + \frac{S_{20}V_{s2}^2}{V_{s2}^2 - v^2} \right]^{-1}. \quad (46)$$

Магнитное поле в этом случае, как видно из рис. 1, *j*, локализовано вблизи ДП и второго волновода. Часть поля, локализованная вблизи волновода и не входящая в выражение для силы Лоренца (32) при пропускании тока только через ДП, является причиной изменения величины тока при его пропускании через всю структуру. Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи вынужденного движения вихрей в слоистой структуре.

7. Заключение

Для слоистой структуры, представляющей собой ДП, магнитосвязанный с двумя волноводами, использована система уравнений для разностей фаз куперовских пар, учитывающая влияние волноводов на ДП и друг на друга. В бездиссипативном пределе изучена возможность существования в такой структуре движущегося с постоянной скоростью элементарного вихря. Обнаружено, что такой вихрь может существовать в трех областях скоростей конечной ширины. В этом проявляется отличие рассмотренной нами системы от системы

с одним волноводом, где таких разрешенных областей было только две. Показано, что, когда скорость Свихарта ДП значительно меньше скоростей Свихарта волноводов, возможно движение элементарного вихря в двух узких областях скоростей, значительно превосходящих скорость Свихарта ДП. Наличие второй области быстрого вихря обусловлено присутствием в структуре второго волновода, имеющего сравнительно большую скорость Свихарта. В разрешенных для движения элементарного вихря зонах возможно вынужденное движение вихря под действием тока, протекающего через ДП, величина которого мала по сравнению с критическим джозефсоновским током. Обнаружено качественно новое явление, состоящее в том, что при наличии в системе волновода со скоростью Свихарта, значительно меньшей, чем в ДП, возможно вынужденное движение элементарного вихря в противоположном обычному направлении.

Приложение

Остановимся более подробно на выводе уравнения (17). Система (4), (16) для вихрей, движущихся с постоянной скоростью v , принимает вид (ср. с (6))

$$\begin{aligned} (V_{s1}^2 - v^2)\psi''_{w1}(\xi) + \beta_1 v \psi'_{w1}(\xi) + S_{10}V_{s1}^2 \psi''(\xi) \\ + S_{10}S_{02}V_{s1}^2 \psi''_{w2}(\xi) = 0, \\ (V_{s2}^2 - v^2)\psi''_{w2}(\xi) + \beta_2 v \psi'_{w2}(\xi) + S_{20}V_{s2}^2 \psi''(\xi) \\ + S_{01}S_{20}V_{s2}^2 \psi''_{w1}(\xi) = 0, \\ S_{01}V_{s1}^2 \psi''_{w1}(\xi) + S_{02}V_{s2}^2 \psi''_{w2}(\xi) + (V_s^2 - v^2)\psi''(\xi) \\ + \beta_2 v \psi'_{w2}(\xi) = \omega_j^2 \sin \psi(\xi) + \omega_j^2 \frac{j}{j_c}. \end{aligned} \quad (47)$$

С помощью первых уравнений (47) выразим вторые производные функций $\psi_{w1}(\xi)$ и $\psi_{w2}(\xi)$

$$\begin{aligned} \psi''_{w1}(\xi) = \left\{ (S_{10}S_{20}S_{02}V_{s1}^2V_{s2}^2 - S_{10}V_{s1}^2(V_{s2}^2 - v^2))\psi''(\xi) \right. \\ \left. - \beta_1 v (V_{s2}^2 - v^2)\psi'_{w1}(\xi) + \beta_2 S_{10}S_{02}v V_{s1}^2 \psi'_{w2}(\xi) \right\} \\ \times [(\tilde{v}_1^2 - v^2)(\tilde{v}_2^2 - v^2)]^{-1}, \\ \psi''_{w2}(\xi) = \left\{ (S_{01}S_{10}S_{20}V_{s1}^2V_{s2}^2 - S_{20}V_{s2}^2(V_{s1}^2 - v^2))\psi''(\xi) \right. \\ \left. - \beta_2 v (V_{s1}^2 - v^2)\psi'_{w2}(\xi) + \beta_1 S_{01}S_{20}v V_{s2}^2 \psi'_{w1}(\xi) \right\} \\ \times [(\tilde{v}_1^2 - v^2)(\tilde{v}_2^2 - v^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Ограничимся рассмотрением малой диссипации в несверхпроводящих слоях. В линейном приближении по β_1 и β_2 в левые части уравнений (48), содержащих β_1 и β_2 , можно подставить первые производные $\psi_{w1}(\xi)$ и $\psi_{w2}(\xi)$, получающиеся из не учитывающих диссипацию выражений (7). Это достигается

однократным интегрированием выражений (7) с учетом обращения в нуль функций ψ'_{w1} и ψ'_{w2} при $\xi \rightarrow \pm\infty$. В итоге (48) позволяет получить приближенные выражения для вторых производных разностей фаз волновых функций на обоих волноводах через разность фаз на ДП. Если подставить эти явные выражения для вторых производных в последнее уравнение системы (47), получается искомое уравнение (17).

Список литературы

- [1] Yu.S. Kivshar, B.A. Malomed. *Phys. Rev. B* **37**, 16, 9325 (1988).
- [2] N.G. Grønbech-Jensen, M.R. Samuelsen, P.S. Lomdahl, J.A. Blackburn. *Phys. Rev. B* **42**, 7, 3976 (1990).
- [3] E. Goldobin, A. Wallraff, N. Thussen, A.V. Ustinov. *Phys. Rev. B* **57**, 1, 130 (1998).
- [4] L.N. Bulaevskii, D. Dominguez, M.P. Maley, A.R. Bishop, O.K.C. Tsui, N.P. Ong. *Phys. Rev. B* **54**, 10, 7521 (1996).
- [5] S. Sakai, P. Bodin, N.F. Pedersen. *J. Appl. Phys.* **73**, 5, 2411 (1993).
- [6] S. Sakai, A.V. Ustinov, H. Kohlstedt, A. Petraglia, N.F. Pedersen. *Phys. Rev. B* **50**, 17, 12905 (1994).
- [7] V.V. Kurin, A.V. Yulin. *Phys. Rev. B* **55**, 17, 11659 (1997).
- [8] A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin. *Phys. Lett. A* **306**, 2–3, 153 (2002).
- [9] Ю.М. Алиев, К.Н. Овчинников, В.П. Силин, С.А. Урюпин. *ЖЭТФ* **107**, 3, 972 (1995).
- [10] D.W. McLaughlin, A.C. Scott. *Phys. Rev. A* **18**, 4, 1652 (1978).