

01;11

Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов

© С.А. Богомолов¹, Г.И. Стрелкова¹, E. Schöll², В.С. Анищенко¹¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия² Institut für Theoretische Physik, TU Berlin, 10623, Berlin, Germany

E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 21 марта 2016 г.

Рассмотрен переход „когерентность–некогерентность“ в ансамбле нелокально связанных логистических отображений. Обнаружено два типа химерных состояний (амплитудные и фазовые), выявлен механизм и сформулированы условия их возникновения.

Механизмы рождения пространственно-временных структур в ансамблях связанных нелинейных осцилляторов являются важной проблемой современной теории колебаний и волн. Особый интерес в последнее время вызывает анализ так называемых „химерных состояний“ (или химер) в ансамблях связанных идентичных осцилляторов. Химерами называют кластеры осцилляторов с несинхронной динамикой в локализованных областях пространства, в то время как все другие осцилляторы демонстрируют синхронную динамику [1–4].

Несмотря на большое количество работ по химерам, следует отметить, что общие механизмы формирования химерных состояний в различных системах практически остаются невыясненными. Более того, до сих пор отсутствует какая-либо классификация ансамблей взаимодействующих осцилляторов, позволяющая прогнозировать реализацию химер в определенных классах систем. Одна из первых попыток подобной классификации была предпринята в работе [5], в которой выделены классы хаотических систем с гиперболическими и негиперболическими аттракторами и описаны общие для них свойства рождения химер.

В нашей работе исследуется бифуркационный переход от режима полной хаотической синхронизации ансамбля к полной десинхронизации в кольце нелокально связанных идентичных осцилляторов типа ло-

гистических отображений в режиме динамического хаоса. В литературе этот переход называют переходом от когерентности к некогерентности [4]. Этот переход осуществляется через химерные состояния.

Свойства перехода к режиму химер в ансамбле нелокально связанных логистических отображений описаны в работах [6,7], и выявлены важные закономерности исследуемого перехода. Однако остаются нерешенными проблемы относительно механизмов рождения и свойств химерных состояний в рассматриваемой системе. В настоящей работе более детально исследуется переход „когерентность–некогерентность“ в указанной системе и дается ответ на ряд принципиальных вопросов.

Анализируется динамика ансамбля, заданного уравнениями [7]:

$$x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)], \quad (1)$$

где x_i — вещественная динамическая переменная, $i = 1, 2, \dots, N$ — порядковый номер замкнутых в кольцо парциальных осцилляторов, t — дискретное время, σ — коэффициент связи, P — число соседних осцилляторов слева и справа от i -го осциллятора, $r = P/N$ — радиус связи, $f(x_i) = ax_i(1 - x_i)$ для любого i -го осциллятора. В [7] исследована система (1) при задании хаотического режима отображения ($a = 3.8$), числе осцилляторов $N = 100$ и специально выбранных начальных условиях x_i^0 ($i = 1, 2, \dots, 100$). Авторами [6,7] анализируется динамика ансамбля (1) при вариации силы связи σ для фиксированного $r = 0.32$. Исследована эволюция мгновенных пространственных распределений амплитуд x_i при изменении σ . Установлено, что с уменьшением σ в распределении возникает вертикальный фронт (пространственная производная стремится к бесконечности). Именно с разрушением этого фронта авторы [6,7] связывают рождение химерных состояний.

Мы покажем, что формирование вертикального фронта не является достаточным, и сформулируем необходимые и достаточные условия появления химер. Кроме того, будет показано, что в системе (1) могут реализовываться 2 типа химер: амплитудные и фазовые.

Рассмотрим кольцо связанных логистических отображений, описываемое уравнением (1). Положим $N = 1000$, $r = 0.32$ и исследуем динамику системы при вариации параметра σ , задавая начальные условия x_i^0 случайно распределенными в интервале $[0; 1]$.

Второе слагаемое в (1) характеризует суммарное воздействие соседних осцилляторов на конкретный i -й осциллятор ансамбля

$$F(\sigma, r, x_i^t) = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)]. \quad (2)$$

Будем называть функцию $F(\sigma, r, x_i^t)$ функцией связи.

Проведем численный анализ характеристик функции связи (2) при изменении коэффициента связи $0.25 < \sigma < 0.45$ и зафиксировав $r = 0.32$ (как и в работе [7]). В отличие от работ по химерам [5–7], в которых анализировалось мгновенное распределение амплитуд элементов ансамбля x_i^t при некотором $t = t^0$ (так называемый мгновенный профиль), используем иной метод. Для каждого парциального элемента $1 \leq i \leq 1000$ будем выводить на график последние 100 итераций x_i^t $9900 \leq t \leq 10000$. Этот метод позволит диагностировать тип колебаний (периодический или хаотический), определять период колебаний и режимы синхронизации (десинхронизации) элементов ансамбля. При необходимости проводились расчеты и мгновенных профилей x_i при $t = t^0$.

Расчеты показали, что динамика парциальных элементов $x_i(t)$ и функции связи $F(\sigma, t)$ при изменении $0.35 < \sigma < 0.45$ остается синхронной (когерентной) и демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода: циклы периода 2, 4, 8. При этом уже для $\sigma \approx 0.38$ в мгновенном профиле возникает разрыв (производная стремится к бесконечности), однако химеры не возникает. При достижении $\sigma_{cr} \approx 0.35$ функция связи и все парциальные элементы переходят в режим хаотических колебаний. Именно при $\sigma = \sigma_{cr}$ реализуется химерное состояние, представленное на рис. 1. На рис. 1, *a* приведен пространственно-временной профиль функции связи (2), свидетельствующий о хаотизации $F(x_i^t)$, для всех осцилляторов $1 \leq i \leq 1000$. При этом вертикальный фронт мгновенного профиля $x_i^t(t = t^0)$ разрушается с образованием химер (рис. 1, *b*).

Таким образом, переход от когерентной динамики всего ансамбля осцилляторов к рождению областей с некогерентной динамикой (к возникновению химерных состояний) происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода как функции связи, так и каждого из парциальных осцилляторов ансамбля. При этом рождение химерных состояний осуществляется при достижении параметром σ критического

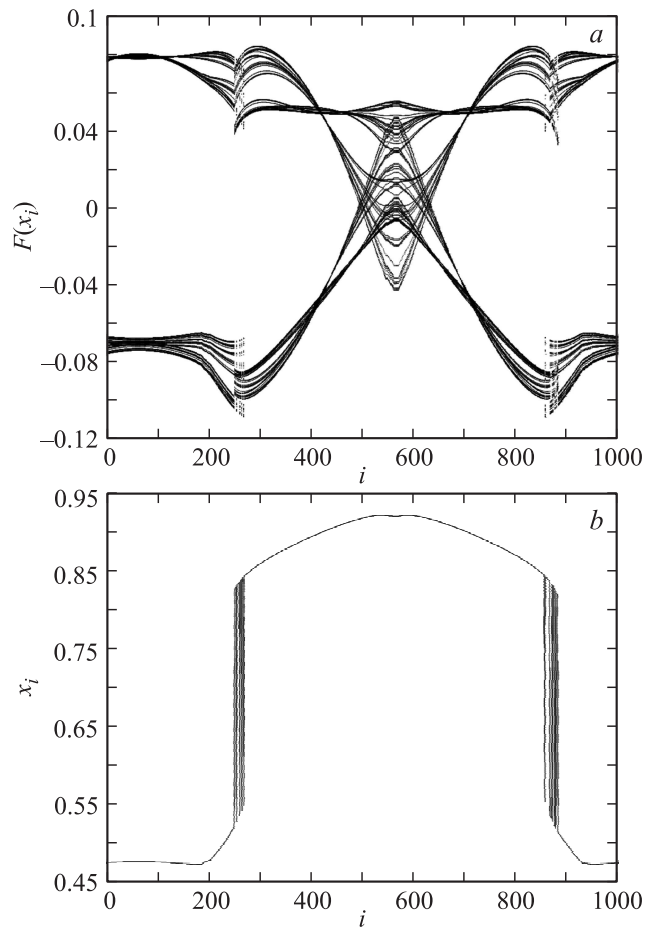


Рис. 1. Пространственно-временной профиль для функции связи (а) и мгновенный профиль (b) для $\sigma_{cr} = 0.35$. Параметры системы (I): $r = 0.32$, $a = 3.8$, $N = 1000$.

значения $\sigma_{cr} \approx 0.35$, при котором наблюдается переход к хаотическому режиму колебаний всех осцилляторов ансамбля и функции связи. Факт появления химер (рис. 1, b) установлен ранее [6,7], однако механизм их рождения не был выяснен.

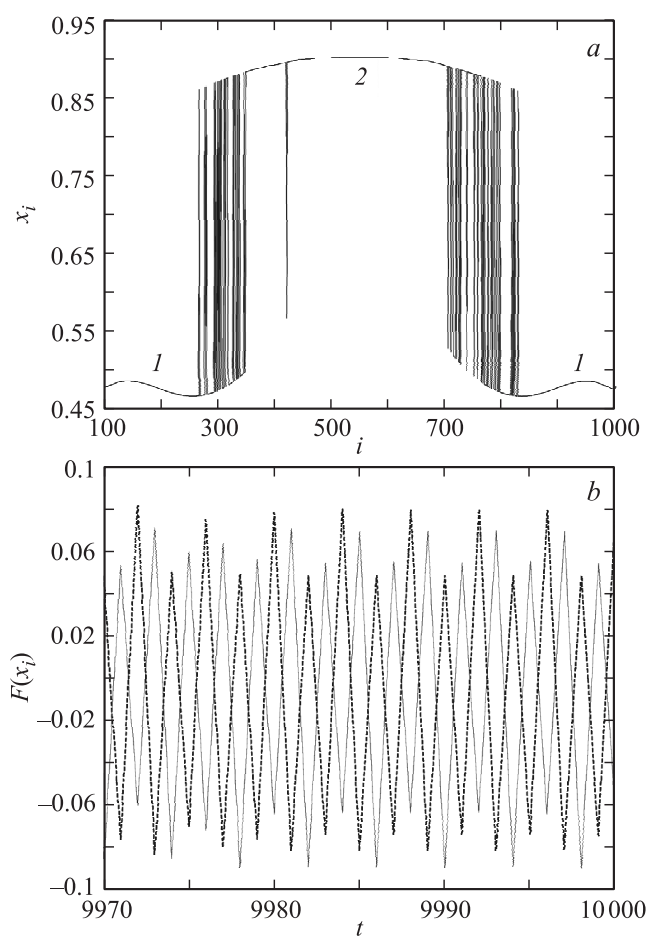


Рис. 2. Мгновенный профиль x_i (a) и временные реализации сигнала функции связи для соседних элементов $i = 318$ (сплошная кривая) и $i = 319$ (пунктир) (b). Параметры системы (1): $\sigma = 0.27$, $r = 0.32$, $a = 3.8$, $N = 1000$.

Обсудим особенности динамики элементов ансамбля в области химеры. Рассмотрим для удобства рис. 2, на котором отмечены области когерентной динамики 1 и 2, в которых соседние осцилляторы

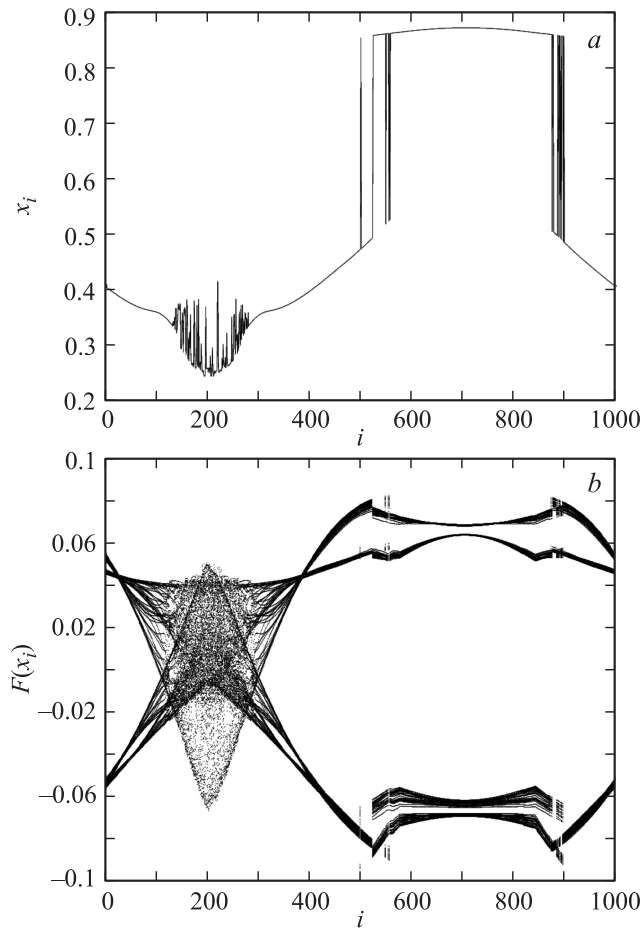


Рис. 3. Рождение амплитудной химеры. Мгновенный профиль (a) и пространственно-временной профиль для сигнала функции связи (b) при $\sigma = 0.28$. Другие параметры те же, что и на рис. 1.

характеризуются идентичными и синхронными колебаниями. Однако динамика в областях 1 и 2 различна: колебания в области 2 сдвинуты по фазе на одну итерацию. Если в областях 1 колебания различных элементов являются синфазными, то по отношению к ним в области 2

они противофазны. Именно сменой фазы колебаний обусловлен эффект возникновения вертикального фронта. Исследования показали, что причиной разрушения фронта и образования химер является хаотизация функции связи. Нерегулярный сигнал воздействия на элементы вблизи вертикального фронта вызывает случайное чередование колебаний с различными фазами и приводит к рождению химер (рис. 2). Таким образом, механизмом появления химерных состояний (рис. 1, *b*) в (1) является потеря устойчивости режимом синфазной синхронизации элементов ансамбля с переходом в режим случайных переключений между синфазными и противофазными колебаниями (рис. 2). Причиной случайных переключений является хаотизация сигналов функции связи (рис. 2, *b*). В связи с этим назовем этот режим фазовой химерой.

Что произойдет, если мы и дальше будем уменьшать связь $\sigma < \sigma_{cr}$? Результаты расчетов представлены на рис. 3. При $\sigma = 0.28$ новая область некогерентности (химеры) появляется в кластере осцилляторов $120 < i < 300$ (рис. 3, *a*). Эта область характеризуется наиболее развитой хаотической динамикой как для функции связи (рис. 3, *b*), так и для парциальных осцилляторов. При этом четко наблюдается усиленная хаотизация амплитуд колебаний элементов ансамбля в области химеры, что принципиально отличается от случая фазовых химер. Новый тип химер естественно назвать амплитудными. Установлено, что парциальные элементы в области амплитудных химер характеризуются полностью асинхронной хаотической динамикой, в то время как соседние с химерным кластером осцилляторы колеблются периодически и синхронно. Дальнейшее уменьшение σ приводит к расширению областей химер. В итоге при $\sigma < 0.23$ области асинхронной хаотической динамики распространяются на весь ансамбль осцилляторов, что отмечалось и в работах [5–7].

Учитывая, что суммирование в (1) ведется по индексу j , уравнение (1) легко преобразовать к виду

$$x_i^{t+1} = a(1 - \sigma)x_i^t(1 - x_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{\substack{j=i-P, \\ j \neq i}}^{i+P} ax_j^t(1 - x_j^t). \quad (3)$$

Из (3) следует, что основным бифуркационным параметром системы (1) является σ , значения которого управляют динамикой первого и второго слагаемых в (3). Первое слагаемое характеризует ансамбль

осцилляторов без учета связи между соседними элементами. Коэффициент связи σ , как видно из (3), уменьшает эффективный параметр логистического отображения $f(x_i^t)$, так как параметр нелинейности принимает значение $a(1 - \sigma)$. Второе слагаемое отражает влияние нелокальной связи P соседних осцилляторов и роль коэффициента связи σ также ведет к изменению эффективного значения параметра a , который принимает значение σa . Можно выделить два предельных значения σ . При $\sigma \rightarrow 1$ динамика системы описывается вторым слагаемым в (3) и будет характеризоваться режимом полной хаотической синхронизации. При $\sigma \rightarrow 0$ имеем систему несвязанных хаотических осцилляторов. При неодинаковых начальных условиях система будет представлять ансамбль полностью асинхронных хаотических осцилляторов. В случае $0 < \sigma < 1$ динамика (1) определяется каждым из двух слагаемых в (3) и, как показали исследования, здесь будут реализовываться режимы фазовых и амплитудных химер. Таким образом, в системе (1) при изменении параметра связи $0 \leq \sigma \leq 1$ имеет место глобальный переход „некогерентность–когерентность“, который для значений $0.2 < \sigma < 0.4$ характеризуется рождением химерных состояний в качестве промежуточных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках международного проекта № 14-52-12002 ННИО-а, РФФ (грант № 16-12-10175) и Физического общества Германии (DFG) (грант SFB910).

Список литературы

- [1] Kuramoto Y., Battogtokh D. // Nonlin. Phen. In Complex Sys. 2002. V. 5. N 4. P. 380–385.
- [2] Panaggio M.J., Abrams D.M. // Nonlinearity. 2015. V. 28. P. R67.
- [3] Abrams D.M., Strogatz S.H. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. N 17. P. 174 102.
- [4] Omel'chenko O.E., Maistrenko Y., Tass P.A. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. N 4. P. 044 105.
- [5] Semenova N., Zakharova A., Schöll E., Anishchenko V.S. // Europhys. Lett. 2015. V. 112. P. 40 002.
- [6] Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E. // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 234 102.
- [7] Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E. // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 026 212.