

12

## Учет гистерезиса при расчете поля в элементах магнитных систем ускорителей

© Н.А. Винокуров, О.А. Шевченко, С.С. Середняков, М.А. Щеглов,  
М.Э. Рояк, И.М. Ступаков, Н.С. Кондратьева

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск  
Новосибирский государственный технический университет  
E-mail: vinokurov@inp.nsk.su

Поступило в Редакцию 10 декабря 2015 г.

Вклад остаточной намагниченности железа магнитопровода в магнитное поле электромагнитов ускорителей заряженных частиц может составлять несколько гаусс. Этот вклад зависит от „истории“ намагничивания и не учитывается большинством существующих программ для расчета магнитного поля, которые используют главную кривую намагничивания. Таким образом, ошибка расчета поля обычно превышает один процент, что неудовлетворительно для ускорительной техники. В работе предложена простая феноменологическая модель магнитного гистерезиса, которая может быть использована для численного расчета. Проводится сравнение аппроксимации по рассматриваемой модели с измерениями для частичных циклов гистерезиса в стальном кольце.

Одной из важнейших нерешенных проблем высокоточных расчетов магнитных полей при трехмерном моделировании фрагментов ускорителей заряженных частиц является проблема учета остаточной намагниченности при изменении возбуждающих магнитное поле токов. Применяемый в большинстве существующих программных комплексов подход, основанный на использовании зависимости магнитной проницаемости среды от поля (рассчитанной по главной кривой намагничивания), никак не учитывает гистерезис, что часто приводит к расхождению рассчитанных характеристик магнита с экспериментальными. Основная цель предлагаемой работы — разработка эффективных методов численного моделирования магнитных полей в магнитах с ферромагнитным магнитопроводом, позволяющих учитывать остаточную намагниченность ферромагнетиков при изменении возбуждающих

поле токов. Эта задача особенно важна для магнитов циклических ускорителей заряженных частиц (например, синхротронов, где частицы низкой энергии инжектируются в магнитную систему с малым полем, а затем при ускорении поле растет в несколько раз) с жесткими допусками на пространственную зависимость поля. Следует отметить, что, так как в интересующих нас случаях вклад гистерезиса в величину поля в рабочей области электромагнитов относительно мал, точность аппроксимации реальных зависимостей индукции поля от его напряженности может быть невелика.

Как известно (см., например, [1,2]), изменение намагниченности  $M$  магнитомягкого ферромагнетика (например, железа) связано с движением доменных границ, а гистерезис — с эффективным трением покоя в уравнениях движения границ. В простейшем случае 180-градусных доменных границ и напряженности  $H$ , наклоненной под углом  $\pi/2 - \theta$  к нормали границы, эти уравнения можно записать в виде

$$dM = \chi(M) \vartheta [|H \cos \theta - H_{eff}(M)| - H_c] \cos \theta dH, \quad (1)$$

где  $\chi = (dH_{eff}/dM)^{-1}$  — дифференциальная магнитная восприимчивость домена, функция  $H_{eff}(M)$  характеризует упругость,  $H_c$  — трение, а  $\vartheta$  — ступенчатая функция Хевисайда.

В простейшем случае, когда  $\chi = \chi_0 \vartheta(M_{max} - |M|)$ , решения дифференциального уравнения (1) изображаются отрезками прямых с наклонами  $\chi_0$  и 0 на плоскости  $(H \cos \theta, M)$ . Например, на рис. 1 показаны предельный цикл гистерезиса и главная кривая намагничивания.

В более общем случае, когда зависимость  $\chi(M)$  имеет колоколообразный вид, выбор в качестве переменной величины  $H_{eff}(M)$  также „линеаризует“ дифференциальное уравнение (1)

$$dH_{eff} = \vartheta [|H \cos \theta - H_{eff}| - H_c] \cos \theta dH. \quad (2)$$

Решения дифференциального уравнения (2) изображаются отрезками прямых с наклонами 1 и 0 на плоскости  $(H \cos \theta, H_{eff})$ . Легко проверить, что решения уравнений (1) и (2) удовлетворяют правилам Маделунга [3].

Для однородного и анизотропного (в среднем) материала следует усреднить намагниченность по различным параметрам доменов, учитывая, что каждому набору параметров соответствует свое значение

намагниченности. В частности, усреднение по углам  $\theta$  дает

$$\langle M \rangle = \int_0^{\pi/2} M(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (3)$$

Для численных расчетов можно аппроксимировать интеграл (3) методом трапеций. Например, при разбиении интервала интегрирования на три получим

$$\langle M \rangle \approx \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \left[ M\left(\frac{\pi}{6}\right) + M\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]. \quad (4)$$

Для проверки точности аппроксимаций петель гистерезиса были проведены стандартные магнитные измерения при помощи трансформатора с кольцевым сердечником из исследуемой стали [4]. Чтобы усилить гистерезисные явления, сердечник был изготовлен из конструкционной стали 3 с относительно высоким содержанием углерода. На первичную обмотку подавался ток с пилообразной временной зависимостью и периодом 40 с. Напряжение на вторичной обмотке измерялось цифровым вольтметром. Из измеренных зависимостей тока и напряжения находилась зависимость индукции  $B$  от напряженности  $H$ . На рис. 2 показана зависимость  $B(H)$  при симметричном изменении напряженности. В исходном состоянии кольцо было размагничено.

Для аппроксимации измеренных зависимостей использовалась модель с двумя намагниченностями (4)

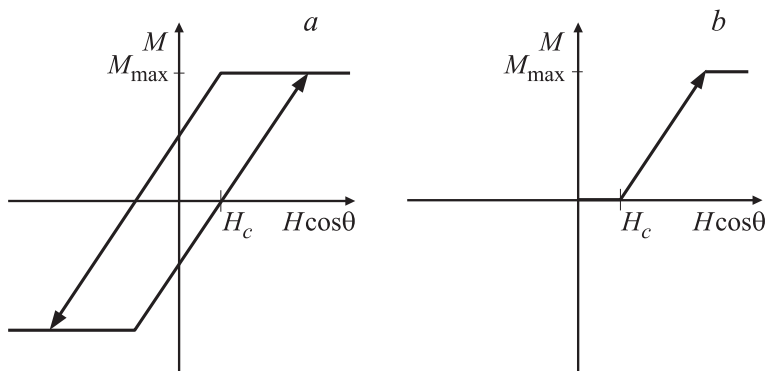
$$B = H + 4\pi M, \quad (5)$$

$$M = \frac{1}{2} M_1(H_{eff1}) + \frac{1}{2} M_2(H_{eff2}),$$

где  $H_{eff1}$  и  $H_{eff2}$  находились из уравнения (2) с  $\theta_1 = \pi/6$ ,  $\theta_2 = \pi/3$ ,  $H_{c1} = 2.4$  Ое,  $H_{c2} = 0.4$  Ое. Для простоты функции  $M_1$  и  $M_2$  были взяты одинаковыми

$$M(H_{eff}) = M_{\max} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\chi_0 |H_{eff}| / M_{\max}}} \right) \text{sgn}(H_{eff}),$$

где  $M_{\max} = 1120$  Г и  $\chi_0 = 1280$ . При этом параметры модели ( $H_{c1}$ ,  $H_{c2}$ ,  $M_{\max}$  и  $\chi_0$ ) были подобраны по кривой с симметричным изменением напряженности, показанной на рис. 2.



**Рис. 1.** Предельный цикл (а) и главная кривая намагничивания (b) в простейшей модели гистерезиса.

Сравним аппроксимацию предлагаемой модели с аппроксимацией по другим моделям. В достаточно известной модели Jiles–Atherton [5] намагниченность  $M$  определяется уравнением

$$\frac{dM}{dH_{eff}} = c \frac{dM_{an}}{dH_{eff}} + \frac{M_{an} - M}{k\delta},$$

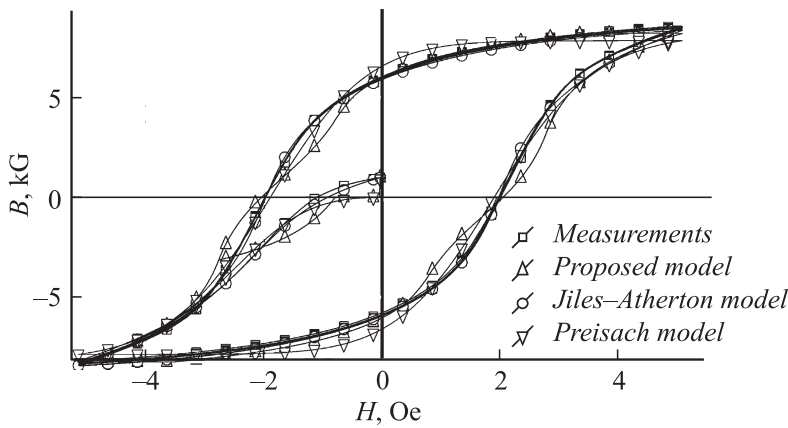
где безгистерезисная намагниченность  $M_{an}$  и эффективное поле  $H_{eff}$  определяются соотношениями

$$M_{an} = M_{\max} \left( \coth \left( \frac{H_{eff}}{a} \right) - \frac{a}{H_{eff}} \right),$$

$$H_{eff} = H + \alpha M,$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & dH > 0, \\ -1, & dH < 0. \end{cases}$$

Параметры модели Jiles–Atherton  $M_{\max} = 1948$ ,  $\alpha = 0.0377$ ,  $a = 25.3$ ,  $k = 7.12$  и  $c = 0.715$  были подобраны также по кривой с симметричным изменением напряженности.



**Рис. 2.** Зависимость индукции  $B$  от напряженности  $H$  при симметричном изменении напряженности от размагниченного состояния.

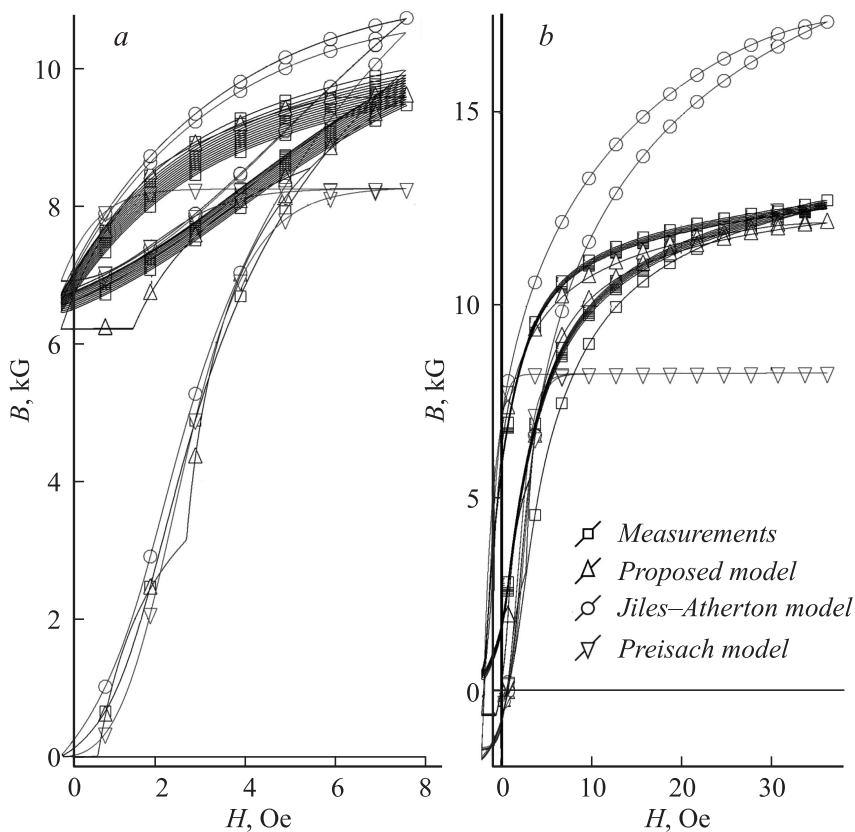
Также широко известно семейство моделей Preisach в различных модификациях. В этих моделях индукция определяется не уравнением (5), а уравнением

$$B(t) = \iint_T \mu(h_1, h_2) \gamma(h_1, h_2, H(t)) dh_1 dh_2,$$

где  $\mu(h_1, h_2)$  — некоторая функция распределения (способом определения которой отличаются модификации модели),

$$\gamma(h_1, h_2, H(t_k)) = \begin{cases} -1, & \text{если } H(t_k) \leq h_1, \\ +1, & \text{если } H(t_k) \geq h_2, \\ \gamma(h_1, h_2, H(t_{k-1})) & \text{если } h_1 \leq H(t_k) \leq h_2, \end{cases}$$

а область интегрирования  $T$  — так называемый треугольник Preisach с вершинами  $(-H_s, -H_s)$ ,  $(H_s, H_s)$  и  $(-H_s, H_s)$ . Заметим, что для моделирования магнитных полей с использованием сеточных методов эта модель менее удобна, чем обе рассмотренные ранее модели, поскольку требует хранения более длинной предыстории намагничивания



**Рис. 3.** Зависимости индукции  $B$  от напряженности  $H$  для несимметричных петель с  $H_{\min} = 0$  (a) и  $B_{\min} \approx 0$  (b).

для вычисления  $\gamma(h_1, h_2, H(t_k))$ . Кроме того, процедура определения параметров функции  $\mu(h_1, h_2)$  для различных модификаций модели может быть достаточно трудоемкой. Для сравнения с предлагаемой моделью была выбрана модификация, предложенная в [6], с небольшим числом подбираемых параметров:  $\mu(h_1, h_2) = \varphi(-h_1)\varphi(h_2)$ , где  $\varphi(x) = ae^{-bx}/(1 + ce^{-bx})^2$ . Параметры модели  $a = 101.4$ ,  $b = 0.0144$ ,

$c = 8.467$  были подобраны также по кривой с симметричным изменением напряженности.

На рис. 2 приводится сравнение экспериментальной кривой  $B(H)$ , полученной при симметричном изменении напряженности от размагниченого состояния, с результатами аппроксимации этой кривой по трем моделям. Параметры моделей подбирались именно под эту экспериментальную кривую, поэтому все аппроксимации достаточно точны.

Рассмотрим теперь поведение аппроксимирующих моделей с уже подобранными по первой петле параметрами на других петлях. Большой практический интерес представляют несимметричные петли (рис. 3), получаемые при однополярном питании электромагнита.

Следует отметить, что в большинстве электромагнитов с железным ярмом отношение длины силовой линии магнитного поля в ярме к рабочему зазору много меньше магнитной проницаемости ярма (т.н. размагничивающий фактор много больше единицы). В этом случае при нулевом токе в обмотке возбуждения в нуль (приближенно) обращается индукция  $B$ , а не напряженность  $H$ , как это происходит в кольце (где размагничивающий фактор равен нулю). Поэтому для электромагнитов с однополярным питанием типичной является гистерезисная петля, показанная на рис. 3, *b*. Эта зависимость получена на том же стальном кольце при изменении тока от небольшого отрицательного значения, при котором индукция приблизительно равна нулю, до некоторой положительной величины.

Полученные результаты показывают, что, несмотря на простоту, предложенная нами модель с параметрами, подобранными по симметричной петле гистерезиса, удовлетворительно аппроксимирует другие петли. Этим она выгодно отличается например, от модели Jiles–Atherton, что позволяет предположить эффективность использования предлагаемой модели для численных расчетов поля в рабочих зазорах электромагнитов. Однако это предположение нуждается в дальнейшей проверке.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-02-07776А). Измерения магнитных свойств стали выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00080).

## Список литературы

- [1] *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971.
- [2] *Мишин Д.Д.* Магнитные материалы. 2-е изд. М.: Высш. школа, 1991.
- [3] *Материалы в приборостроении и автоматике: Справочник /* Под ред. Ю.М. Пятиня. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1982.
- [4] *Чечерников В.И.* Магнитные измерения. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1969.
- [5] *Sadowski N.* et al. // IEEE Trans. Magn. 2002. V. 38. № 2. P. 797–800.
- [6] *Szabó Z.* et al. // Physica B: Condensed Matter. 2004. V. 343. N 1. P. 142–147.