Журнал технической физики, 2016, том 86, вып. 6

03

Вычисление потоков массы газа и тепла в канале прямоугольного сечения в свободномолекулярном режиме

© О.В. Гермидер, В.Н. Попов, А.А. Юшканов

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
163002 Архангельск, Россия
e-mail: v.popov@narfu.ru

(Поступило в Редакцию 16 июня 2015 г. В окончательной редакции 12 октября 2015 г.)

В рамках свободномолекулярного режима решена задача о тепло-массопереносе в длинном канале постоянного прямоугольного сечения. Найдены распределения массовой скорости газа и вектора потока тепла по поперечному сечению канала. Вычислены удельные потоки массы газа и тепла. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными для режимов течения, близких к свободномолекулярным.

Введение

Одной из важнейших в прикладном значении задач динамики разреженного газа является задача о течении газа в канале [1]. Строгое решение этой задачи должно получаться в результате интегрирования кинетического уравнения Больцмана (или системы уравнений Больцмана, если газ состоит из молекул разной природы) при соответствующих граничных и начальных условиях. После того как найдена функция распределения, с помощью квадратур определяются любые макроскопические величины. Уравнение Больцмана представляет собой сложное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, точное решение которого в общем случае получить не удается [2]. Однако если газ настолько разрежен, что столкновениями молекул между собой можно пренебречь, задача сводится к определению траекторий частиц, которые взаимодействуют только со стенками, ограничивающими объем газа, и не соударяются между собой [2]. Режим, при котором отсутствует влияние столкновений молекул газа между собой на функцию распределения (и следовательно, и на процессы течения, теплообмена), называют свободномолекулярным [1]. Для описания течений газа в свободномолекулярном режиме в уравнении Больцмана можно не учитывать интеграл столкновений. В этом случае уравнение Больцмана переходит в линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными, решение которого может быть получено аналитически с использованием метода характеристик. К настоящему времени опубликовано значительное число работ, посвященных исследованию течений газа в каналах, стенки которых образованы двумя бесконечными параллельными плоскостями, список которых можно найти в [1], [3–6]. Однако в последнее время в связи с развитием микро- и нанотехнологий все больше внимания уделяется рассмотрению течений газа в каналах произвольного поперечного сечения. Так, например, в [7] и [8] рассматривалось течение разреженного газа соответственно в канале прямоугольного и треугольного сечений, в [9–11] — в канале цилиндрического сечения, в [12] — в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами, в [13] — в канале эллиптического сечения. Цель настоящей работы состоит в применении аналитических методов, разработанных в [14], для решения задачи о вычислении в рамках свободномолекулярного режима потока тепла в канале постоянного прямоугольного сечения при наличии продольного градиента температуры.

Вывод основных уравнений. Построение функции распределения

Рассмотрим канал прямоугольного сечения, стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$ прямоугольной декартовой системы координат, а ось симметрии канала совпадает с осью Oz'. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль оси Oz'. Предположим, что средняя длина свободного пробега молекул газа l_g много больше поперечных размеров канала. Тогда, пренебрегая столкновениями молекул между собой, кинетическое уравнение Больцмана в выбранной системе координат запишем в виде

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость молекул газа. Решение уравнения (1) ищем в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z)\left(\frac{m}{2\pi k_B T(z)}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T(z)}\right) \times [1 + Z_0(x, y, \mathbf{C})]. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ — безразмерная скорость молекул газа, $\beta = m/2k_B T_0$, m — масса молекулы газа, k_B — постоянная Больцмана, T_0 — температура газа в некоторой точке, принятой за начало координат, $x = x'/a'$, $y = y'/a'$, $z = z'/a'$ — координаты безразмерного радиуса-вектора, $Z_0(x, y, \mathbf{C})$ — линейная поправка к локально-равновесной функции распределения, учитывающая влияние стенок. Будем считать относительный перепад температуры на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае в линейном приближении можем записать $T(z) = T_0(1 + G_T z)$, где G_T — безразмерный градиент температуры. Тогда в предположении постоянства давления из равенства $p(z) = n(z)k_B T(z) = \text{const}$, находим $n(z) = n_0(1 - G_T z)$. Здесь n_0 — концентрация молекул газа в начале координат. С учетом сказанного соотношение (2) в линейном приближении перепишем в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)\left[1 + G_T\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)z + Z_0(x, y, \mathbf{C})\right]. \quad (3)$$

Здесь $f(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2}\exp(-C^2)$ — абсолютный максвеллиан. Функцию $Z_0(x, y, \mathbf{C})$ ищем в виде

$$Z_0(x, y, \mathbf{C}) = C_z G_T\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)Z(x, y, C_x, C_y).$$

С учетом сказанного выражение (3) примет вид

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f(C)\left[1 + G_T\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(z + C_z Z(x, y, C_x, C_y)\right)\right]. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), приходим к уравнению

$$C_x\frac{\partial Z}{\partial x} + C_y\frac{\partial Z}{\partial y} + 1 = 0. \quad (5)$$

В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. Тогда, учитывая, что

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v})\big|_s = f(C)\left[1 + G_T z\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\right],$$

находим

$$Z(x, y, C_x, C_y)\big|_s = 0$$

или в развернутом виде

$$Z(x; y; C_x; C_y) = 0, \quad x = \pm\frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}, \quad xC_x < 0, \quad (6)$$

$$Z(x; y; C_x; C_y) = 0, \quad y = \pm\frac{b}{2}, \quad -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, \quad yC_y < 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (5) с граничными условиями (6), (7) ищем методом характеристик [15]. Система уравнений характеристик уравнения (5) имеет вид

$$\frac{dx}{C_x} = \frac{dy}{C_y} = -\frac{dZ}{1} = dt. \quad (8)$$

Интегрируя систему уравнений (8), находим

$$x = x_0 + C_x t, \quad y = y_0 + C_y t,$$

$$Z(x; y; C_x; C_y) = -t. \quad (9)$$

Для удобства дальнейших вычислений перейдем в пространстве скоростей к цилиндрической системе координат, полагая

$$C_x = \rho\cos\varphi, \quad C_y = \rho\sin\varphi, \quad C_z = C_z, \quad \rho^2 + C_z^2 = C^2.$$

Тогда с учетом (6) и (7) значения параметра t при отражении от стенок канала имеют вид

$$t_1 = \frac{2x - a}{2\rho\cos\varphi}, \quad \cos\varphi < 0 \; - \; \text{на правой стенке } x_0 = \frac{a}{2}, \quad (10)$$

$$t_2 = \frac{2y - b}{2\rho\sin\varphi}, \quad \sin\varphi < 0 \; - \; \text{на верхней стенке } y_0 = \frac{b}{2}, \quad (11)$$

$$t_3 = \frac{2x + a}{2\rho\cos\varphi}, \quad \cos\varphi > 0 \; - \; \text{на левой стенке } x_0 = -\frac{a}{2}, \quad (12)$$

$$t_4 = \frac{2y + b}{2\rho\sin\varphi}, \quad \sin\varphi > 0 \; - \; \text{на нижней стенке } y_0 = -\frac{b}{2}. \quad (13)$$

Соотношения (9)–(13) полностью определяют решение уравнения (5) с граничными условиями (6), (7).

Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом полученных результатов находим z-компоненты векторов потока тепла $q'_z(x, y)$ и массовой скорости газа $u_z(x, y)$. Исходя из статистического смысла функции распределения, находим [4]

$$q'_z(x, y) = \frac{m}{2}\int\left(v_z - u_z(x, y)\right)|\mathbf{v} - \mathbf{u}(x, y)|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v})d^3\mathbf{v}$$
$$= \frac{n_0 k_B T_0 G_T}{\beta_0^{1/2}}\, q_z(x, y),$$

$$u_z(x, y) = \frac{1}{n(z)}\int v_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v})d^3\mathbf{v} = \beta_0^{1/2} G_T U_z(x, y).$$

Здесь

$$q_z(x, y) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int\exp(-C^2)C_z^2\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)^2 Z(x, y, C_x, C_y)$$
$$\times d^3\mathbf{C} = \frac{1}{\pi^{3/2}}\sum_{k=0}^{3}\int_0^{+\infty}\exp(-\rho^2)\rho\, d\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)$$
$$\times C_z^2\left(\rho^2 + C_z^2 - \frac{5}{2}\right)^2 dC_z\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}(-t_{k+1})d\varphi = -\frac{9}{32\sqrt{\pi}}$$
$$\times\left[\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{2x - a}{\cos\varphi}d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{2y - b}{\sin\varphi}d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\frac{2x + a}{\cos\varphi}d\varphi\right.$$
$$\left. + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}\frac{2y + b}{\sin\varphi}d\varphi\right], \quad (14)$$

$$U_z(x,y)=\frac{1}{\pi^{3/2}}\int\exp(-C^2)C_z^2\left(C^2-\frac{5}{2}\right)Z(x,y,C_x,C_y)$$

$$\times d^3\mathbf{C}=\frac{1}{\pi^{3/2}}\sum_{k=0}^{3}\int\limits_0^{+\infty}\exp(-\rho^2)\rho d\rho\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-C_z^2)$$

$$\times C_z^2\left(\rho^2+C_z^2-\frac{5}{2}\right)^2 dC_z\int\limits_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}}(-t_{k+1})d\varphi=-\frac{1}{16\sqrt{\pi}}$$

$$\times\left[\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{2x-a}{\cos\varphi}\,d\varphi+\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{2y-b}{\sin\varphi}\,d\varphi+\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3}\frac{2x+a}{\cos\varphi}\,d\varphi\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varphi_3}^{\varphi_4}\frac{2y+b}{\sin\varphi}\,d\varphi\right] \tag{15}$$

соответственно z-компоненты безразмерных векторов потоков. Границы интегрирования φ_k в интегралах, входящих в (14) и (15), определяются из условий (10)–(13). Учитывая, что для правого нижнего угла канала должны одновременно выполняться условия (10) и (13), приходим к равенству $\frac{2x-a}{\cos\varphi_0}=\frac{2y+b}{\sin\varphi_0}$, из которого следует, что

$$\cos\varphi_0=\frac{2x-a}{\sqrt{(2x-a)^2+(2y+b)^2}},$$

$$\sin\varphi_0=\frac{2y+b}{\sqrt{(2x-a)^2+(2y+b)^2}}.$$

Аналогичным образом находим косинусы и синусы углов, соответствующих правому верхнему углу канала

$$\cos\varphi_1=\frac{2x-a}{\sqrt{(2x-a)^2+(2y-b)^2}},$$

$$\sin\varphi_1=\frac{2y-b}{\sqrt{(2x-a)^2+(2y-b)^2}},$$

левому верхнему

$$\cos\varphi_2=\frac{2x+a}{\sqrt{(2x+a)^2+(2y-b)^2}},$$

$$\sin\varphi_2=\frac{2y-b}{\sqrt{(2x+a)^2+(2y-b)^2}},$$

левому нижнему

$$\cos\varphi_3=\frac{2x+a}{\sqrt{(2x+a)^2+(2y+b)^2}},$$

$$\sin\varphi_3=\frac{2y+b}{\sqrt{(2x+a)^2+(2y+b)^2}}.$$

Двигаясь далее в направлении возрастания угла φ, находим $\cos\varphi_4=\cos\varphi_0$, $\sin\varphi_4=\sin\varphi_0$. Вычислим с учетом полученных выражений первый интеграл в (14) и (15)

$$W_1=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{(2x-a)^2+(2y-b)^2}+2y-b}{\sqrt{(2x-a)^2+(2y+b)^2}+2y+b}.$$

Аналогичным образом вычисляются и остальные интегралы в (14) и (15)

$$W_2=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\ln\frac{\sqrt{(2x-a)^2+(2y-b)^2}+2x-a}{\sqrt{(2x+a)^2+(2y-b)^2}+2x+a},$$

$$W_3=\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\ln\frac{\sqrt{(2x+a)^2+(2y+b)^2}+2y+b}{\sqrt{(2x+a)^2+(2y-b)^2}+2y-b},$$

$$W_4=\int\limits_{\varphi_3}^{\varphi_4}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=\ln\frac{\sqrt{(2x+a)^2+(2y+b)^2}+2x+a}{\sqrt{(2x-a)^2+(2y+b)^2}+2x-a}.$$

Таким образом, с учетом полученных результатов

$$q_z(x,y)=-\frac{9}{32\sqrt{\pi}}\big[(2x-a)W_1+(2y-b)W_2$$

$$+(2x+a)W_3+(2y+b)W_4\big], \tag{16}$$

$$U_z(x,y)=-\frac{2}{9}q_z(x,y). \tag{17}$$

Потоки массы газа M и тепла Q через поперечное сечение канала определяются двойными интегралами

$$M=m\int\limits_{-a'/2}^{a'/2}\int\limits_{-b'/2}^{b'/2}u_z(x,y)dx'dy'=\frac{4ma'^2G_T}{\beta_0^{1/2}}$$

$$\times\int\limits_0^{a/2}\int\limits_0^{b/2}U_z(x,y)dxdy,$$

$$Q=\int\limits_{-a'/2}^{a'/2}\int\limits_{-b'/2}^{b'/2}q'_z(x,y)dx'dy'=\frac{8n_0k_BT_0G_Ta'^2}{\beta_0^{1/2}}$$

$$\times\int\limits_0^{a/2}\int\limits_0^{b/2}q_z(x,y)dxdy.$$

Удельные потоки массы газа и тепла рассчитаем согласно формулам, приведенным в [12],

$$J'_M=\frac{2M}{a'b'^2}=\frac{mG_T}{a'\beta_0^{1/2}}J_M,\quad J'_Q=-\frac{2Q}{a'b'^2}=\frac{2n_0k_BT_0G_T}{a'\beta_0^{1/2}}J_Q.$$

Здесь

$$J_M = \frac{8}{a^2 b} \int\limits_0^{a/2} \int\limits_0^{b/2} U_z(x, y) dx dy,$$

$$J_Q = -\frac{8}{a^2 b} \int\limits_0^{a/2} \int\limits_0^{b/2} q_z(x, y) dx dy. \tag{18}$$

Подставляя (16) и (17) в (18), находим

$$J_Q = \frac{9}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{a}{3b} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right) + \frac{b^2}{3a^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \right) \right.$$

$$\left. + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \ln\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} + \frac{a}{b} \right) \right], \tag{19}$$

$$J_M = -\frac{2}{9} J_Q. \tag{20}$$

Анализ полученных результатов

Графики распределения вектора потока тепла по сечению канала, рассчитанные по формуле (16) при различных значениях его размеров, приведены на рис. 1–5. Из представленных рисунков видно, что при $a = b$ форма профиля вектора потока тепла близка к параболоиду вращения. В случае, когда $a/b \ll 1$ или $a/b \gg 1$ профиль вектора потока тепла принимает форму, близкую к параболическому цилиндру, что имеет место для каналов, стенки которых образованы двумя бесконечными параллельными плоскостями. Как видно из (19) и (20), значения J_Q и J_M не зависят непосредственно от значений a и b, а определяются их отношением. Значения J_Q и J_M, рассчитанные согласно (19) и (20) при различных отношениях a/b, приведены в таблице.

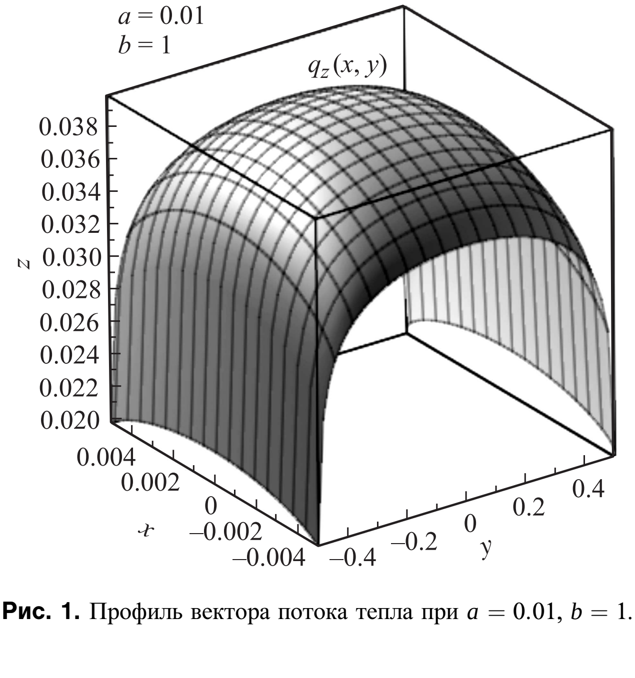

Рис. 1. Профиль вектора потока тепла при $a = 0.01$, $b = 1$.

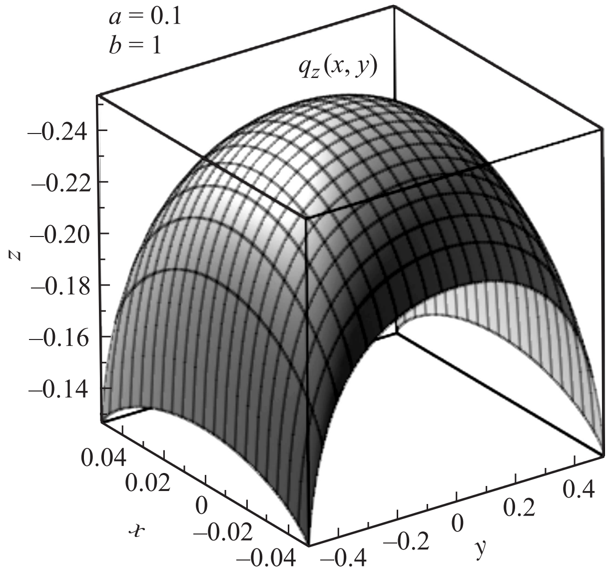

Рис. 2. Профиль вектора потока тепла при $a = 0.1$, $b = 1$.

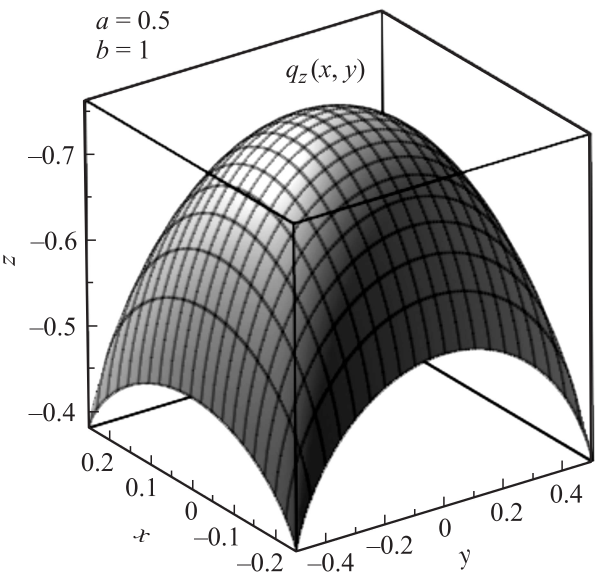

Рис. 3. Профиль вектора потока тепла при $a = 0.5$, $b = 1$.

Значения J_Q и J_M при различных значениях a/b

a/b	0.001	0.01	0.1	1.0	10.0
J_Q (14)	10.2839	7.3648	4.4794	1.8871	0.4479
J_M (16)	−2.2853	−1.6366	−0.9954	−0.4194	−0.0995

Для сравнения приведем значения, полученные в [5] с использованием модели Шахова и линеаризованного уравнения Больцмана для каналов с бесконечными параллельными стенками, расположенными на расстоянии 0.1 друг от друга. Для J_Q они равны 4.0546 и

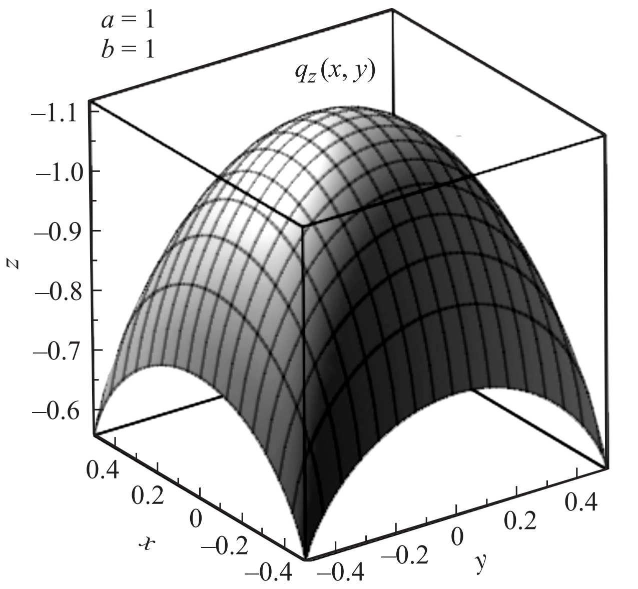

Рис. 4. Профиль вектора потока тепла при $a = 1$, $b = 1$.

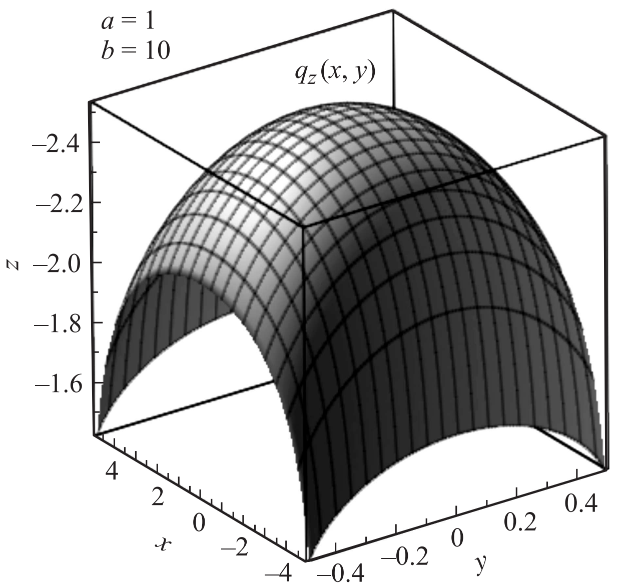

Рис. 5. Профиль вектора потока тепла при $a = 1$, $b = 10$.

3.8509, а для J_M соответственно -0.73268 и -0.79087. Как видим, полученные в работе результаты хорошо согласуются с результатами, приведенными в [5]. Отличие обусловлено тем, что при $a = 0.1$ режим течения далек от свободномолекулярного. При $a/b \ll 1$ выражения (19) и (20) имеют логарифмические особенности $J_Q = -(9/4\sqrt{\pi})\ln a$ и $J_M = (1/2\sqrt{\pi})\ln a$, что также совпадает с аналогичными результатами, приведенными в [3], для каналов с бесконечными параллельными стенками.

Заключение

В настоящей работе решена задача о вычислении в свободномолекулярном режиме потоков массы газа и тепла в канале постоянного прямоугольного сечения. Построены профили массовой скорости газа и вектора потока тепла в канале. Вычислены удельные потоки массы газа и тепла через поперечное сечение канала. Показано, что в случае, когда один из размеров канала много меньше другого, полученные в работе результаты переходят в аналогичные результаты для каналов с бесконечными параллельными стенками.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Государственного задания „Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач“ (Проект № 3628).

Список литературы

[1] *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977. 184 с.
[2] *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 556 с.
[3] *Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д.* Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.
[4] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
[5] *Siewert C.E.* // Eur. J. Mech. B. Fluid. 2002. Vol. 21. P. 579–597.
[6] *Попов В., Юшканов А, Лукашев В.* Математическое моделирование течений газа в каналах: монография. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic publishing, 2014. 116 с.
[7] *Титарев В.А., Шахов Е.М.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 7. С. 1285–1302.
[8] *Naris S., Valougeorgis D.* // Eur. J. Mech. B. Fluid. 2008. Vol. 27. P. 810–822.
[9] *Siewert C.E., Valougeorgis D.* // J. Quant. Spectrosc. Ra. 2002. Vol. 72. P. 531–550.
[10] *Taheri P., Bahrami M.* // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86. P. 036 311.
[11] *Kamphorst C.H., Rodrigues P., Barichello L.B.* // Appl. Math. 2014. Vol. 5. P. 1516–1527.
[12] *Титарев В.А., Шахов Е.М.* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 3. С. 527–535.
[13] *Graur I., Sharipov F.* // Eur. J. Mech. B. Fluid. 2008. Vol. 27. P. 335–345.
[14] *Завитаев Э.В., Юшканов А.А.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 3–9.
[15] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.