

03

## Равновесные конфигурации струи идеально проводящей жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: nick@ier.uran.ru

(Поступило в Редакцию 14 мая 2015 г.)

Рассмотрена задача о возможных равновесных конфигурациях свободной поверхности струи идеально проводящей жидкости в неоднородном магнитном поле двух параллельных струе тонких линейных проводников с разнонаправленными электрическими токами. Равновесие достигается за счет баланса капиллярных и магнитных сил. Для плоско-симметричного случая, когда деформация струи происходит только в плоскости ее поперечного сечения, с помощью метода конформных отображений получено два однопараметрических семейства точных решений задачи. Согласно этим решениям, струя исходно круглого сечения деформируется вплоть до ее деления на две отдельные. На основе анализа приближенных двухпараметрических решений сформулирован критерий расщепления струи.

### Введение

Свободная поверхность жидкости деформируется под влиянием приложенного внешнего магнитного поля. Значительное число публикаций посвящено анализу равновесных конфигураций поверхности ферромагнитных жидкостей (см., например, работы [1–4]). Интерес вызывает также влияние магнитного поля на форму поверхности проводящих жидкостей. Высокочастотное магнитное поле проникает лишь в тонкий приповерхностный слой проводника толщиной  $\sim (\omega\sigma\mu_0\mu/2)^{-1/2}$ , где  $\omega$  — частота переменного поля,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость жидкости,  $\sigma$  — ее проводимость. Если толщина скин-слоя мала по сравнению с поперечным размером проводника, то можно приближенно считать, что поле не проникает в среду. Взаимодействие внешнего магнитного поля и индуцированного им поверхностного электрического тока приводит к появлению магнитных сил, которые при определенных условиях могут уравниваться капиллярными (на временах, значительно превышающих период осцилляций, силы можно усреднить по времени). Задача нахождения соответствующих равновесных конфигураций поверхности эквивалентна задаче о форме границы идеально проводящей жидкости ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), помещенной в постоянное внешнее магнитное поле, не проникающее внутрь среды (см., например, [5]).

Поиск возможных равновесных конфигураций поверхности является чрезвычайно сложной задачей, что связано существенной нелинейностью условия баланса сил на границе жидкости, форма которой неизвестна. Однако в плоско-симметричном случае, когда все величины зависят лишь от двух координат, ее анализ существенно упрощается при использовании метода конформных отображений. В его рамках исходная задача может быть сведена к качественно более простой задаче с известной границей, в сечении представляющей собой, например,

прямоугольник или окружность. Этот подход использовался для анализа конфигураций жидких цилиндрических проводников в высокочастотном магнитном поле [5]. Были найдены аналитические решения для формы границы в пренебрежении капиллярными силами; при учете капиллярности решения строились численно. В работе [6] были рассчитаны конфигурации столба проводящей жидкости в поле нескольких линейных проводников с током. Наконец, в нашей недавней работе [7] были получены точные частные решения для равновесных конфигураций изначально плоской поверхности идеально проводящей жидкости, возникающих под влиянием неоднородного магнитного поля горизонтального линейного проводника с током. С прикладной точки зрения целью подобных исследований является анализ возможности управления формой границы расплавленного металла (см. [8] и ссылки там).

В настоящей работе построены два семейства точных частных решений для равновесных конфигураций струи проводящей жидкости (она представляет собой цилиндр бесконечной длины) во внешнем поперечном неоднородном магнитном поле. Магнитное поле создается парой линейных проводников с токами, расположенных параллельно оси струи. Как и в работах [5,6], предполагалось, что поле не проникает внутрь жидкости. Для случая постоянного внешнего поля это соответствует идеально проводящей среде; для жидкости конечной электропроводности подобная ситуация реализуется в высокочастотном поле. В соответствии с полученными решениями под действием магнитного поля струя деформируется — в поперечном сечении она растягивается вдоль силовых линий. В слабом поле ее сечение близко к эллиптическому. При увеличении поля в сечении струи развивается перетяжка. Наконец, при превышении индукцией магнитного поля (в месте нахождения струи) некоторого слабо зависящего от расположения проводников критического значения струя расщепляется на две.

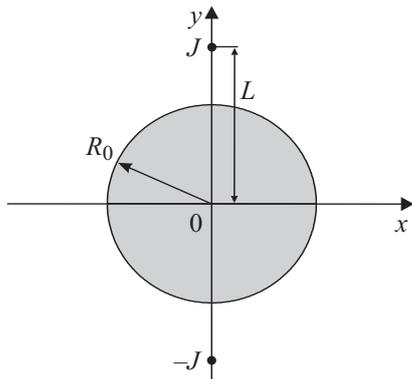


Рис. 1. Схема геометрии задачи.

### Исходные уравнения

Рассмотрим цилиндрическую струю несжимаемой идеально проводящей жидкости, помещенную в среду с пренебрежимо малой плотностью. Ее поверхность деформируется магнитным полем двух бесконечно длинных прямых тонких проводников с разнонаправленными электрическими токами величиной  $\pm J$ , расположенными параллельно струе на расстоянии  $L$  от ее оси (см. рис. 1).

Введем движущуюся вместе со струей прямоугольную систему координат  $\{x, y, z\}$ , ось  $z$  которой совпадает с осью струи (в этих координатах жидкость покоится). Положения проводников с токами задаются условиями  $x = 0$  и  $y = \pm L$ . Будем считать, что задача обладает плоской симметрией: поверхность струи инвариантна по отношению к сдвигу вдоль оси  $z$ , а ее деформация происходит только в поперечной плоскости  $\{x, y\}$ . В таком случае все величины будут зависеть лишь от пары переменных  $x$  и  $y$ .

При протекании электрического тока по проводникам в пространстве возникает неоднородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Для плоско-симметричного случая можно считать, что векторный потенциал магнитного поля ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) имеет только одну  $z$ -компоненту:  $\mathbf{A} = \{0, 0, \psi(x, y)\}$ . Распределение магнитного поля тогда будет определяться единственной скалярной функцией  $\psi$ :

$$\mathbf{B} = \{\psi_y, -\psi_x, 0\}. \tag{1}$$

Отметим, что условие  $\psi = \text{const}$  задает силовые линии магнитного поля.

В магнитостатике вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  связан с плотностью электрического тока  $\mathbf{j}$  уравнением

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Вне струи имеем

$$\mathbf{j} = \{0, 0, J\delta(x, y - L) - J\delta(x, y + L)\},$$

где  $\delta(x, y)$  — дельта-функция. Используя представление (1), получим двумерное уравнение Пуассона для

$z$ -компоненты векторного потенциала

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\mu_0 J \delta(x, y - L) + \mu_0 J \delta(x, y + L). \tag{2}$$

В случае идеального проводника уравнение (2) следует решать совместно с условием  $\psi = 0$  (т.е. магнитное поле направлено по касательной к границе), а также с условием того, что на бесконечном удалении от струи магнитное поле стремится к нулю быстрее, чем  $(x^2 + y^2)^{-1/2}$ :

$$\psi(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Последнее условие означает, что через струю не протекает электрический ток, и она не имеет собственного магнитного поля.

Форма свободной поверхности жидкости определяется условием баланса магнитного и капиллярного давлений

$$\frac{\nabla \psi^2}{2\mu_0} = T\kappa + P, \tag{3}$$

где  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\kappa$  — локальная кривизна поверхности,  $P$  — разность давлений внутри и снаружи жидкости. Для поверхности, задаваемой параметрическими выражениями

$$y = Y(\tau), \quad x = X(\tau) \tag{4}$$

с параметром  $\tau$ , возрастающим в направлении против хода часовой стрелки, ее кривизна определяется формулой

$$\kappa = \frac{Y_\tau X_{\tau\tau} - X_\tau Y_{\tau\tau}}{(X_\tau^2 + Y_\tau^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

При  $J = 0$ , т.е. в отсутствие внешнего магнитного поля, равновесной конфигурацией жидкости является бесконечный круговой цилиндр радиуса  $R_0$ . Профиль поверхности задается формулой  $x^2 + y^2 = R_0^2$ , соответствующей окружности в плоскости  $\{x, y\}$ . При этом разность давлений  $P$  будет определяться простым выражением:  $P = T/R_0$ .

Отметим, что с математической точки зрения рассматриваемая задача близка к электростатической задаче об определении возможных равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. Эта аналогия обсуждалась, например, в работе [6]. Основное отличие заключается в знаке перед выражением в левой части условия (3): электростатическое давление входит в аналогичное уравнение с противоположным знаком (см., например, [9]). Для равновесных конфигураций заряженной поверхности проводящей жидкости найдено значительное число точных решений [9–12]. Наиболее близкая к интересующей нас геометрия задачи рассматривалась в работе [13], в которой аналогом тонкого прямого проводника с током являлся нитевидный электрод.

## Конформные переменные

Основная сложность рассматриваемой задачи связана с нелинейностью граничного условия (3), задаваемого на неизвестной границе. Его анализ существенно упрощается при использовании метода конформных отображений. Для удобства перейдем к безразмерным переменным с помощью замен

$$x \rightarrow xR_0, \quad y \rightarrow yR_0, \quad \psi \rightarrow \psi\sqrt{2\mu_0TR_0}.$$

При этом вместо разности давлений  $P$ , силы тока  $J$  и расстояния  $L$  мы будем использовать следующие безразмерные комплексы:

$$l = L/R_0, \quad I = J(32\pi^2TR_0/\mu_0)^{-1/2}, \quad p = PR_0/T. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение комплексный потенциал магнитного поля  $\Phi = -\psi + i\varphi$ , который является аналитической функцией комплексной переменной  $w = x + iy$  всюду в области вне жидкости, за исключением точек  $w = \pm il$ , в которых расположены проводники с токами. Здесь функция  $\varphi$  является гармонически сопряженной с  $z$ -компонентой векторного потенциала магнитного поля  $\psi$ , т.е. выполняются условия Коши–Римана:  $\varphi_x = \psi_y$  и  $\varphi_y = -\psi_x$ .

Осуществим конформное преобразование  $w = w(\xi)$  области вне жидкости в область вне круга единичного радиуса в комплексной параметрической плоскости  $\xi$ . Потребуем, чтобы при этом преобразовании ось струи оставалась в начале координат  $\xi = 0$ , а на бесконечности выполнялось условие

$$w \rightarrow \lambda\xi, \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где  $\lambda$  — вещественный параметр, смысл которого мы обсудим позже. В результате задача нахождения комплексного потенциала с условием  $\text{Re } \Phi = 0$  на неизвестной поверхности жидкости и условием  $\Phi \rightarrow 0$  на бесконечности ( $|w| \rightarrow \infty$ ) сводится к задаче с аналогичными условиями на единичной окружности  $|\xi| = 1$  и при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Ее решение несложно найти при помощи метода изображений

$$\Phi = 2I \ln \left( \frac{(\xi + ia)(\xi - ia)^{-1}}{(\xi - ia)(\xi + ia)^{-1}} \right), \quad (8)$$

где вещественный параметр  $a$  задает расстояние от проводников с токами до оси струи в конформных переменных. Выражение (8) соответствует четырем проводникам с токами, причем пара проводников, расположенных в точках  $\xi = \pm ia^{-1}$ , являются фиктивными.

Естественно параметризовать окружность  $|\xi| = 1$ , соответствующую свободной поверхности в новых переменных, как  $\xi = \exp(i\tau)$ , где  $\tau \equiv \arg \xi$  — вещественный параметр, изменяющийся в интервале  $0 \leq \tau \leq 2\pi$ . Тогда форма свободной поверхности будет задаваться следующим параметрическим выражением (см. также (4)):

$$w = w(\exp(i\tau)) \equiv W(\tau) \equiv X(\tau) + iY(\tau).$$

Условие баланса давлений (3) с использованием комплексного потенциала  $\Phi$  переписывается в форме

$$\left| \frac{d\Phi}{dw} \right|^2 = \frac{\text{Im}(\overline{W_{\tau\tau}} W_{\tau})}{|W_{\tau}|^3} + p, \quad w = W(\tau),$$

где мы использовали формулу (5) для кривизны  $\kappa$ . Конформное преобразование  $w \rightarrow \xi$  приводит это условие к следующему виду:

$$\frac{32I^2\beta(1-\beta)^2(1-\cos 2\tau)}{(1+\beta^2+2\beta\cos 2\tau)^2} = \frac{\text{Im}(\overline{W_{\tau\tau}} W_{\tau})}{|W_{\tau}|} + p|W_{\tau}|^2, \quad (9)$$

$$|\xi| = 1,$$

где мы учли, что при  $|\xi| = 1$  справедливо

$$\left| \frac{d\Phi}{dw} \right| = \left| \frac{d\Phi}{d\xi} \right| \cdot |W_{\tau}|^{-1},$$

а также использовали решение (8) для распределения поля. В уравнении (9) мы для удобства ввели вспомогательный параметр  $\beta \equiv a^{-2}$ , имеющий смысл квадрата обратного расстояния до проводников с током на параметрической плоскости  $\xi$ .

Таким образом, задача о нахождении равновесного профиля поверхности жидкости свелась к поиску аналитической функции  $w(\xi)$  с условием (7) на бесконечности и условием (9) на известной (представляющей собой окружность  $|\xi| = 1$ ) границе. Входящий в условие (7) нормировочный параметр  $\lambda$  находится из условия, что площадь поперечного сечения струи  $s$  (т.е. сечения плоскостью  $\{x, y\}$ ) не изменяется при деформации ее поверхности, обусловленной изменением тока  $I$  и расстояния  $l$ :

$$s(I, l) = \pi. \quad (10)$$

Для нахождения площади удобно использовать соотношение

$$s = -\frac{1}{2} \text{Im} \int_0^{2\pi} W \overline{W_{\tau}} d\tau, \quad (11)$$

являющееся следствием известной формулы Грина.

Задача заметно упрощается при введении вспомогательной функции  $g(\xi) = (i\xi w_{\xi})^{1/2}$ . Так, условие баланса сил (9) превращается в нелинейное уравнение четвертой степени первого порядка, гораздо более удобное для анализа:

$$\frac{32I^2\beta(1-\beta)^2(1-\cos 2\tau)}{(1+\beta^2+2\beta\cos 2\tau)^2} = i(\overline{G}G_{\tau} - G\overline{G}_{\tau}) + p(G\overline{G})^2, \quad (12)$$

$$|\xi| = 1.$$

Здесь  $G(\tau) \equiv g(\exp(i\tau))$  — комплексная функция, задающая значения  $g$  на окружности  $\xi = \exp(i\tau)$ . Условие (7) принимает вид

$$g \rightarrow \sqrt{i\lambda\xi}, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (13)$$

В итоге задача нахождения равновесной формы струи в неоднородном магнитном поле пары проводников с током сводится к нахождению аналитической функции  $g$ , удовлетворяющей граничным условиям (12) и (13). Выражение для формы свободной поверхности струи  $w = W(\tau)$  может быть найдено по функции  $G(\tau)$  из уравнения

$$W_\tau = G^2. \quad (14)$$

### Построение точных решений

Функция  $g(\xi)$  может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$g(\xi) = \sqrt{i\lambda\xi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(\xi^2 + \beta)^n} \right), \quad (15)$$

где  $\alpha_n$  — некоторые вещественные коэффициенты. Она является аналитической в области вне круга единичного радиуса (имеются особенности только в точках  $\xi = \pm ia^{-1}$  и  $\xi = 0$ , находящихся внутри круга) и удовлетворяет условию на бесконечности (13). Конфигурация поверхности, соответствующая представлению (15), обладает зеркальной симметрией по отношению к осям  $x$  и  $y$ .

Коэффициенты ряда в общем случае не могут быть найдены аналитически. Однако, как мы продемонстрируем, удастся найти коэффициенты для частного случая, когда ряд (15) содержит конечное число слагаемых:

$$g(\xi) = \sqrt{i\lambda\xi} \left( 1 + \frac{\alpha}{\xi^2 + \beta} \right), \quad (16)$$

где  $\alpha$  — вещественный параметр, характеризующий амплитуду деформации поверхности струи. Для представления (16) выражение в скобках имеет только два простых полюса.

Представлению (16) для  $g(\xi)$  соответствует следующее выражение для  $G(\tau)$ :

$$G(\tau) = \sqrt{i\lambda} \exp\left(\frac{i\tau}{2}\right) \left( 1 + \frac{\alpha}{\exp(2i\tau) + \beta} \right). \quad (17)$$

Функция  $W(\tau)$ , определяющая профиль свободной поверхности, находится из уравнения (14) интегрированием по  $\tau$ :

$$W(\tau) = \lambda \exp(i\tau) + \frac{\alpha^2 \lambda \exp(i\tau)}{2\beta(\exp(2i\tau) + \beta)} + \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\beta}} \left( 2 + \frac{\alpha}{2\beta} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\exp(i\tau)}{\sqrt{\beta}} \right), \quad (18)$$

В следующем разделе нам понадобится формула для отображения  $w(\xi)$ , которая получается из (18) в результате замены  $\exp(i\tau) \rightarrow \xi$ :

$$w(\xi) = \lambda\xi + \frac{\alpha^2 \lambda \xi}{2\beta(\xi^2 + \beta)} + \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\beta}} \left( 2 + \frac{\alpha}{2\beta} \right) \operatorname{arctg} \left( \frac{\xi}{\sqrt{\beta}} \right). \quad (19)$$

Отметим, что при  $\alpha = 0$  выражение (18) задает окружность в исходных переменных  $x$  и  $y$ . При увеличении  $\alpha$  (по абсолютному значению) струя будет деформироваться.

Находя при помощи (11) площадь поперечного сечения струи, форма которой задается выражением (18), и используя нормировку (10), получаем зависимость  $\lambda$  параметра от  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\lambda = \left[ 1 + \left( \frac{2\alpha^2}{\beta} + \frac{\alpha^3}{\beta^2} + \frac{\alpha^4}{8\beta^3} \right) \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) + \frac{2\alpha^3}{\beta(1-\beta^2)} + \frac{\alpha^4}{4\beta^2} \frac{(1-3\beta^2)}{(1-\beta^2)^2} \right]^{-1/2}. \quad (20)$$

Продемонстрируем теперь, что использование формулы (17) для  $G$  (т.е. усеченного ряда (16) вместо исходного (15)) позволяет найти точные решения задачи. Подставляя (17) в условие баланса сил (12), приводя получившееся выражение к общему знаменателю и группируя коэффициенты при одинаковых гармониках, приходим к уравнению вида

$$F_0 + F_2 \cos 2\tau + F_4 \cos 4\tau = 0, \quad (21)$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned} F_0 &= 32I^2\beta(1-\beta)^2 - \lambda[4\alpha(\alpha+2\beta) - 1 - (\alpha+2\beta)^2 - \beta^2(\alpha+\beta)^2] - p\lambda^2 \left[ (1+(\alpha+\beta)^2)^2 + 2(\alpha+\beta)^2 \right], \\ F_2 &= -32I^2\beta(1-\beta)^2 - 2\lambda(\alpha-2\beta)[1+\beta(\alpha+\beta)] - 4\lambda^2 p(\alpha+\beta)[1+(\alpha+\beta)^2], \\ F_4 &= -2\lambda\beta(\alpha+\beta) + 2\lambda^2 p(\alpha+\beta)^2. \end{aligned}$$

Выражение (21) превращается в тождество, и соответственно (17) будет решением уравнения (12), если одновременно

$$F_0 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_4 = 0. \quad (22)$$

Итак, три алгебраических уравнения системы (22) связывают четыре параметра задачи:  $\alpha$  характеризует степень деформации поверхности струи,  $\beta$  имеет смысл обратного квадрата расстояния от оси струи до проводников с током в конформных переменных ( $\beta = a^{-2}$ ),  $p$  определяет разность давлений внутри и снаружи жидкости, а  $I$  задает значение электрического тока в проводниках. Нормировочный параметр  $\lambda$ , который также входит в уравнения, был ранее выражен через параметры  $\alpha$  и  $\beta$  (см. выражение (20)). Отсюда следует вывод, что использование представления (18) для формы границы позволяет нам найти одно или несколько однопараметрических семейств решений задачи.

Выберем в качестве независимого параметра неотрицательную величину  $\beta$  и выразим остальные параметры

(т.е. параметры  $\alpha$ ,  $p$ ,  $I$ ) через нее. Последнее уравнение системы (22) может быть факторизовано

$$(\alpha + \beta)[\lambda p(\alpha + \beta) - \beta] = 0.$$

Отсюда становится очевидным, что существуют две ветви решений. Для первой ветви (первая скобка этого выражения обращается в нуль) находим

$$\alpha = -\beta, \quad p = \frac{(1 + \beta)(1 + 5\beta)}{\lambda}, \quad I = \sqrt{\frac{3\lambda}{16(1 - \beta)^2}}. \quad (23)$$

Рассмотрение второй ветви (вторая скобка обращается в нуль) приводит к четырем различным решениям, одно из которых — тривиальное и еще два не имеют физического смысла. Единственное решение, представляющее для нас интерес, имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{25\beta^2 + 34\beta + 9} - 2\beta^2 - 5\beta - 3}{2\beta}, \quad p = \frac{\beta}{\lambda(\alpha + \beta)},$$

$$I = \sqrt{\frac{-\lambda\alpha[3\beta(\alpha + \beta) + 1]}{16\beta(1 - \beta)^2}}. \quad (24)$$

Таким образом, нам удалось найти два однопараметрических семейства точных решений задачи, для которых форма поверхности определяется функцией (18), а связь между параметрами определяется выражениями (23) либо (24). Анализ этих решений посвящен следующий раздел работы.

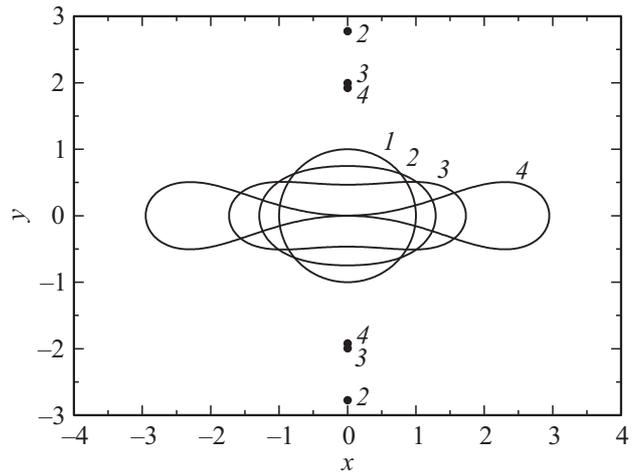
## Анализ точных решений

Для полученных нами точных частных решений равновесные конфигурации поверхности жидкости определяются выражением (18) для функции  $W(\tau)$ . Разделяя его на вещественную и мнимую части, получим следующие параметрические уравнения для формы границы:

$$x = X(\tau) = \lambda \cos \tau \left( 1 + \frac{\alpha^2(1 + \beta)}{2\beta((1 - \beta)^2 + 4 \cos^2 \tau)} \right) - \frac{\alpha\lambda}{2\sqrt{\beta}} \left( 2 + \frac{\alpha}{2\beta} \right) \left[ \arctg \left( \frac{\sqrt{\beta} + \sin \tau}{\cos \tau} \right) - \arctg \left( \frac{\sqrt{\beta} - \sin \tau}{\cos \tau} \right) \right], \quad (25)$$

$$y = Y(\tau) = \lambda \sin \tau \left( 1 - \frac{\alpha^2(1 - \beta)}{2\beta(1 - \beta)^2 + 4 \cos^2 \tau} \right) + \frac{\alpha\lambda}{4\sqrt{\beta}} \left( 2 + \frac{\alpha}{2\beta} \right) \ln \left( \frac{1 + 2\sqrt{\beta} \sin \tau + \beta}{1 - 2\sqrt{\beta} \sin \tau + \beta} \right). \quad (26)$$

Расстояние  $l$  от оси струи до проводников с током (в исходных переменных  $x$  и  $y$ ) можно определить, используя формулу (19) для отображения  $w(\xi)$ . Для



**Рис. 2.** Поперечные сечения струи для первого семейства точных решений (23), (25) и (26), соответствующие  $\beta = 0, 0.13, 0.26, 0.389$ . Положения проводников (они отмечены точками) и значения протекающих через них токов следующие:  $l \approx \infty, 2.78, 1.99, 1.92$  и  $I \approx 0.43, 0.51, 0.64, 0.94$ .

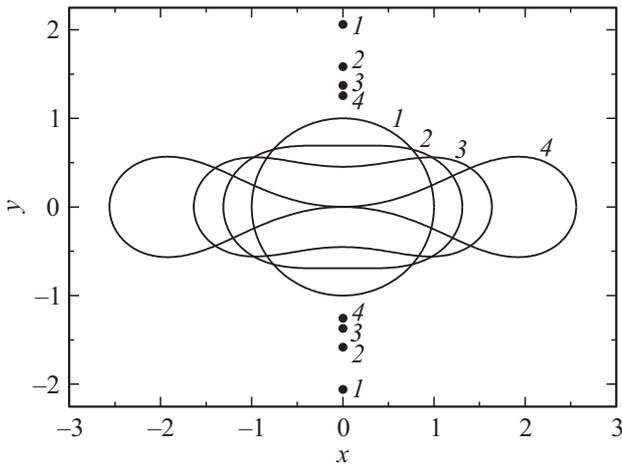
этого надо подставить в (19) значение переменной  $\xi$ , соответствующее положению одного из проводников в конформных переменных, например  $\xi = ia$ . Получим

$$l = \text{Im}[w(ia)] = \frac{\lambda}{\sqrt{\beta}} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2(1 - \beta^2)} \right) + \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{\beta}} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\beta} \right) \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right). \quad (27)$$

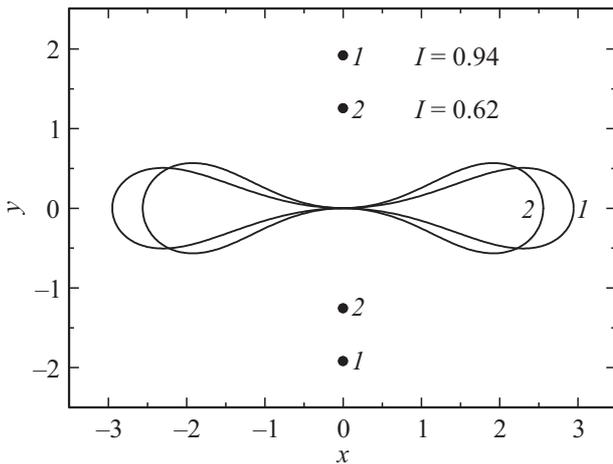
На рис. 2 изображены равновесные конфигурации свободной поверхности струи, относящиеся к первой ветви решений (23). Для этих решений параметр  $\beta$  меняется в диапазоне  $0 \leq \beta \leq \beta_0 \approx 0.389$ . При  $\beta \rightarrow 0$  имеем  $\alpha \rightarrow 0$ , что соответствует струе круглого сечения. В этом пределе проводники с током удалены на бесконечное расстояние,  $l \rightarrow \infty$ . Как следствие, создаваемое ими магнитное поле пренебрежимо мало в окрестности струи и не оказывает влияния на форму поверхности. При приближении проводников к струе магнитное поле вблизи нее увеличивается, и струя деформируется: в поперечном сечении она растягивается вдоль линий поля. Верхняя граница допустимых значений  $\beta$  соответствует ситуации, когда деформация струи настолько велика, что занимаемая жидкостью область теряет односвязность. На кривой, задаваемой уравнениями (25) и (26), возникает точка самопересечения, и струя распадается на две отдельные. Пороговое значение параметра  $\beta$ , равное  $\beta_0$ , находится из условия самопересечения, имеющего вид

$$Y(\pi/2) = 0. \quad (28)$$

Для этого предельного случая расстояние от оси струи до проводника с током есть  $l(\beta_0) \approx 1.92$ , а электрический ток равен  $I(\beta_0) \approx 0.94$ .



**Рис. 3.** Поперечные сечения струи для второго семейства точных решений (24)–(26), соответствующие  $\beta = 0.236, 0.35, 0.43, 0.528$ . Положения проводников (они отмечены точками) и значения протекающих через них токов следующие:  $I \approx 2.06, 1.58, 1.37, 1.26$  и  $I \approx 0, 0.28, 0.39, 0.62$ .



**Рис. 4.** Предельные равновесные конфигурации поверхности жидкости для первого ( $\beta = \beta_0 \approx 0.389$ ) и второго ( $\beta = \beta_2 \approx 0.528$ ) семейств точных решений. Видно, что струя расщепляется на две отдельные.

Для второго семейства решений (24) параметр  $\beta$  находится в диапазоне  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ , где  $\beta_1 = \sqrt{5} - 2 \approx 0.236$  и  $\beta_2 \approx 0.528$ . Характерные формы поверхности представлены на рис. 3. На нижней границе интервала допустимых значений  $\beta$ , т.е. при  $\beta = \beta_1$ , токи в проводниках отсутствуют ( $I = 0$ ), магнитного поля нет, и, следовательно, струя имеет круглую форму в сечении ( $\alpha = 0$ ). При увеличении  $\beta$  ток  $I$  монотонно растет, и струя деформируется. При достижении параметром  $\beta$  порогового значения  $\beta_2$ , определяемого из условия (28), поверхность струи становится самопересекающейся, и она расщепляется на две. Это происходит при токе  $I(\beta_2) \approx 0.62$  и расстоянии  $l(\beta_2) \approx 1.26$ . Отметим, что при  $\beta < \beta_1$  значение тока  $I$  становится мнимым, и ре-

шение задачи теряет физический смысл. Однако в этом случае полученное решение оказывается применимым для описания равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в неоднородном электрическом поле [13].

Несмотря на определенное сходство между изображенными на рис. 2 и 3 равновесными конфигурациями струй, эти решения значительно отличаются. Это хорошо видно из рис. 4, на котором приведены относящиеся к различным ветвям решений формы струй в момент их расщепления.

Таким образом, оба полученных однопараметрических семейства точных решений описывают деформацию струй проводящей жидкости во внешнем неоднородном магнитном поле вплоть до их расщепления.

Отметим, что все найденные решения обладают зеркальной симметрией относительно плоскости  $y = 0$ . Как следствие, если ограничиться рассмотрением области  $y \geq 0$ , выражения (23)–(26) также дают решение задачи о форме двумерной капли проводящей жидкости, находящейся на идеально проводящем плоском электроде ( $y = 0$ ) в магнитном поле горизонтально расположенного линейного проводника с током. Контактный угол между свободной поверхностью жидкости и поверхностью электрода при этом равен  $\pi/2$ .

### Построение и анализ приближенных решений

В предыдущем разделе мы нашли два однопараметрических семейства точных нетривиальных решений, (23) и (24), рассматриваемой задачи. Очевидно, что общее решение является двухпараметрическим: равновесная конфигурация поверхности струи определяется расстоянием  $l$  до линейных проводников и значением протекающего по ним тока  $I$ . Аналитически найти точное двухпараметрическое решение не удастся. Тем не менее возможные равновесные конфигурации струи могут быть эффективно исследованы с использованием приближенных решений задачи, которые будут построены в настоящем разделе. Наибольшее внимание мы уделим условиям, при которых будет происходить расщепление струй.

При построении приближенных решений будем полагать, что форма поверхности, как и раньше, определяется выражением (18) или, что то же самое, выражениями (25) и (26). Пренебрежем четвертой гармоникой в условии баланса сил (21). Получаемые при этом решения дают качественную аппроксимацию в случае, если абсолютное значение амплитуды четвертой гармоники  $F_4$  относительно мало. Потребуем выполнения условия  $|F_4| \ll 32I^2\beta(1-\beta)^2$ , что соответствует сравнению величины  $F_4$  со слагаемым, ответственным за воздействие магнитного поля (см. условие (12)). Иными словами, относительная погрешность аппроксимации  $\epsilon$ ,

вводимая как частное этих величин, должна быть мала

$$|\varepsilon| \ll 1, \quad \varepsilon = \frac{F_4}{32I^2(1-\beta)^2\beta} = \frac{\lambda(\alpha+\beta)[\lambda p(\alpha+\beta) - \beta]}{16I^2(1-\beta)^2\beta}. \quad (29)$$

Приближенное двухпараметрическое решение находится в результате совместного решения уравнений  $F_0 = 0$  и  $F_2 = 0$ . Выберем в качестве независимых параметров решения величины  $\alpha$  и  $\beta$ . Выражая величины  $p$  и  $I$  через  $\alpha$  и  $\beta$ , получим

$$p = \frac{1 - 4\alpha(\alpha + 2\beta) + (\alpha + 2\beta)^2 + \beta^2(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha - 2\beta)(1 + \beta(\alpha + \beta))}{\lambda \left[ (1 + (\alpha + \beta)^2)^2 + 2(\alpha + \beta)^2 + 4(\alpha + \beta)(1 + (\alpha + \beta)^2) \right]}, \quad (30)$$

$$I^2 = \frac{2\lambda(\alpha + \beta)(1 + (\alpha + \beta)^2) \times \left[ 3(\alpha + \beta)^2 - 5\beta^2 - (1 + \beta(\alpha + \beta))^2 \right]}{16\beta(1 - \beta)^2 \left[ (1 + \alpha + \beta)^4 - 2(\alpha + \beta)^2 \right]} - \frac{\lambda(\alpha - 2\beta)(1 + \beta(\alpha + \beta)) \times \left[ (1 + (\alpha + \beta)^2)^2 + 2(\alpha + \beta)^2 \right]}{16\beta(1 - \beta)^2 \left[ (1 + \alpha + \beta)^4 - 2(\alpha + \beta)^2 \right]}. \quad (31)$$

Ниже мы продемонстрируем, что, несмотря на относительную простоту, выражения (30) и (31) в сочетании с (18) дают достаточно качественную аппроксимацию для формы струи в широком диапазоне параметров задачи.

Рассмотрим, при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющих форму струи, она будет распадаться на две отдельные. Используя условие самопересечения поверхности жидкости (28), приходим к следующему квадратному уравнению относительно параметра  $\alpha$ :

$$1 - \frac{\alpha^2}{2\beta(1-\beta)} + \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\alpha^2}{8\beta\sqrt{\beta}} \right) \ln \left( \frac{1 + 2\sqrt{\beta} + \beta}{1 - 2\sqrt{\beta} + \beta} \right) = 0.$$

Решая его, получим искомое условие расщепления струи

$$\alpha = \alpha_c(\beta) = \frac{-2\beta(1-\beta)c + 2\sqrt{\beta^2(1-\beta)^2c^2 - \beta\sqrt{\beta}(1-\beta)^2c + 2\beta^2(1-\beta)}}{(1-\beta)c - 2\sqrt{\beta}}, \quad (32)$$

где  $c = \ln(1 + \sqrt{\beta}) - \ln(1 - \sqrt{\beta})$ .

Условие (32) и выражения (30), (31) задают однопараметрическое семейство приближенных решений, соответствующих максимально возможным деформациям поверхности струи при заданных положениях проводников с током. Из общих соображений понятно, что погрешность аппроксимации  $\varepsilon$  увеличивается с ростом степени деформации поверхности. Тогда погрешность для этого семейства решений — максимальна. Оценим ее по формуле (29). Из рис. 5, на котором приведена соответствующая зависимость  $\varepsilon$  от  $\beta$ , видно, что на интервале между парой точных решений ( $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_2$ )

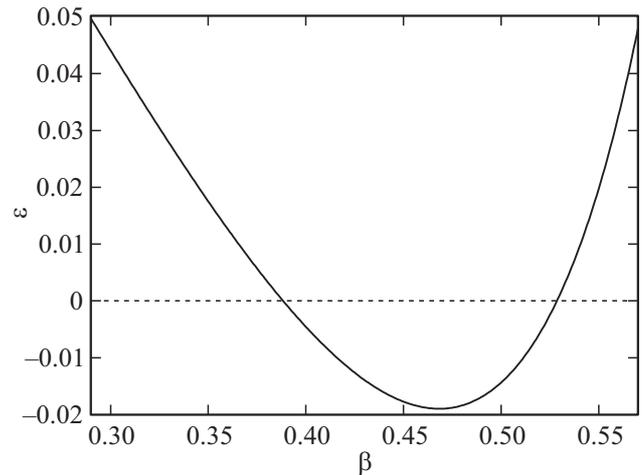


Рис. 5. Относительная погрешность аппроксимации  $\varepsilon$  для приближенных решений для формы струи с максимально возможной деформацией поверхности. Две точки, в которых  $\varepsilon = 0$ , соответствуют точным решениям.

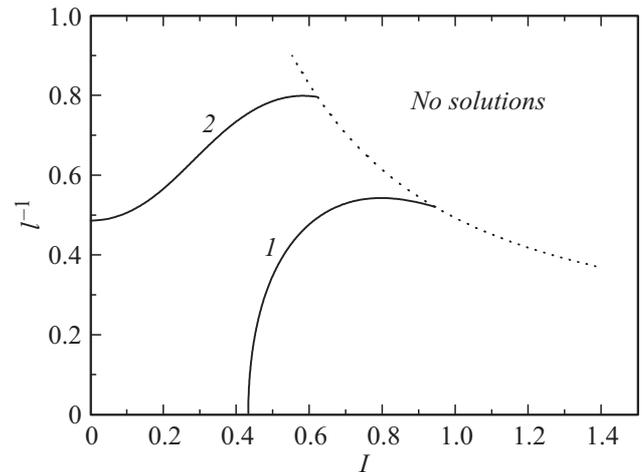


Рис. 6. Область существования равновесных конфигураций поверхности струи на параметрической плоскости. На границе области (пунктирная линия) поверхность становится самопересекающейся. Сплошные кривые соответствуют первому и второму семействам точных решений.

погрешность аппроксимации не превышает двух процентов. Эта оценка свидетельствует о довольно высокой точности аппроксимации, основанной на использовании усеченного ряда (16) вместо бесконечного (15), для самых разных значений параметров  $I$  и  $l$ .

На рис. 6 на параметрической плоскости  $I$  и  $l^{-1}$  показана область существования равновесных конфигураций поверхности струи (т.е. область параметров, в которой капиллярное давление может скомпенсировать магнитное). Граница области изображена пунктирной линией. Она соответствует решениям с максимально возможной деформацией поверхности, когда струя под действием внешних сил расщепляется на две отдельные. Граница задается уравнениями (30)–(32); она приведена

для  $\beta$  в диапазоне  $0.29 < \beta < 0.57$ , что, согласно рис. 5, соответствует пятипроцентной точности аппроксимации ( $|\varepsilon| < 0.05$ ). В области параметров выше этой кривой решений не существует.

Сплошные линии на рис. 6 соответствуют двум найденным семействам точных решений. Видно, что перед расщеплением струи для обоих точных решений расстояние  $l$  от проводников с током до оси струи меняется слабо. Изменение магнитного поля в окрестности струи и, как следствие, деформация ее поверхности в основном происходят за счет увеличения протекающего через проводники тока  $I$ . Иная ситуация реализуется для первого семейства решений при больших значениях расстояния  $l$ . Изменение магнитного поля и вызванное им изменение формы струи происходят за счет приближения проводников к струе при практически неизменной величине тока  $I \approx 0.43$ .

Во всей области параметров, представленной на рис. 6, решения (25), (26), (30), (33) описывают равновесные конфигурации поверхности струи с приемлемой точностью. Кривые 1 и 2 на рисунке соответствуют семействам точных решений, для которых погрешность аппроксимации  $\varepsilon$  равна нулю. В области между кривыми 1 и 2 построенные нами приближенные решения являются фактически интерполяцией двух точных решений. Отметим, что, как видно из рисунка, при некоторых значениях расстояния  $l$  нам известно сразу три точных решения задачи. Одно решение соответствует второму семейству, а еще два решения (они сосуществуют за счет немонотонности кривой 1) — первому семейству. Так, например, для  $l \approx 1.92$  точные решения задачи получены для трех значений токов:  $I \approx 0.13, 0.68, 0.94$ .

Обсудим теперь характер зависимости степени деформации струи от параметров  $I$  и  $l$ , определяющих распределение магнитного поля. В качестве параметра, характеризующего деформацию струи, удобно взять  $X_0 = X(0)$ . В качестве управляющего параметра выберем значение магнитного поля ( $B_0$ ) в начале координат (вектор магнитной индукции здесь имеет только  $x$ -компоненту) при отсутствии струи. В этой ситуации

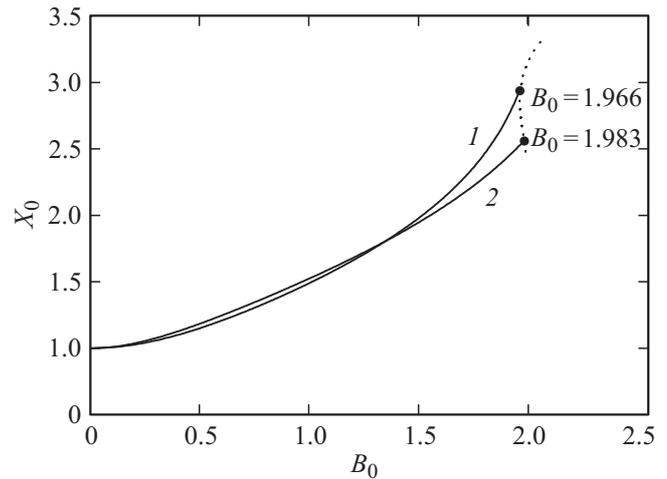
$$\psi = I \ln(x^2 + (y - l)^2) - I \ln(x^2 + (y + l)^2)$$

и, следовательно, абсолютное значение магнитного поля есть

$$B_0 \equiv |\partial\psi/\partial y|_{x=y=0} = 4I/l.$$

Понятно, что, ограничиваясь одним управляющим параметром  $B_0$  вместо пары параметров  $I$  и  $l$ , мы упускаем различные эффекты, связанные с неоднородностью внешнего магнитного поля. Однако, как мы продемонстрируем, для анализа наиболее важных явлений, таких как расщепление струй, оказывается достаточным использовать единственный параметр  $B_0$ , являющийся комбинацией величин  $I$  и  $l$ .

На рис. 7 приведены зависимости величины деформации струи вдоль оси абсцисс ( $X_0$ ) от величины индукции магнитного поля  $B_0$  для первого и второго



**Рис. 7.** Зависимость параметра  $X_0$ , характеризующего степень деформации струи, от приложенного магнитного поля  $B_0$  для двух найденных семейств точных решений. Пунктиром показана аналогичная зависимость для предельных равновесных конфигураций поверхности жидкости (на поверхности появляется точка самопересечения), описываемых приближенными решениями (25), (26), (30)–(32).

семейств точных решений задачи (сплошные линии 1 и соответственно 2). Как видно, эти зависимости ведут себя сходным образом (кривые на графике практически совпадают), что свидетельствует в пользу выбора  $B_0$  в качестве управляющего параметра. При увеличении поля  $B_0$  амплитуда деформации  $X_0$  монотонно растет. При достижении полем значения  $\sim 1.966$  для первого семейства решений и значения  $\sim 1.983$  для второго семейства струя расщепляется. Близость этих чисел позволяет предположить, что существует пороговое значение магнитного поля  $B_0$  (слабо зависящее от положения проводников), при котором происходит распад струи. Это предположение подтверждается анализом полученных нами приближенных решений для равновесных конфигураций поверхности струи. Так, на рис. 7 пунктирной линией показана зависимость  $X_0$  от  $B_0$  для струй с максимально возможной деформацией границы (поверхность струи становится самопересекающейся). Эта зависимость описывается приближенными соотношениями между параметрами задачи (30)–(32); она приведена для  $\beta$  из интервала  $0.29 < \beta < 0.57$ , в котором погрешность полученных решений не превышает достаточно малого значения в 5%. Из рисунка видно, что для достаточно широкого диапазона параметров задачи значение магнитного поля  $B_0$ , при котором струя делится на две отдельные, остается практически неизменным. Это дает нам основание сформулировать следующий простой критерий распада струи:

$$B_0 > B_c \approx 1.97. \tag{33}$$

Равновесные конфигурации поверхности струи существуют только при значениях параметра  $B_0$  ниже порогового:  $B_0 \leq B_c$ .

## Заключение

В настоящей работе получено два однопараметрических семейства точных решений для равновесных конфигураций свободной поверхности жидкой струи, деформируемой магнитным полем системы двух параллельных струе тонких линейных проводников с разнонаправленными электрическими токами. Жидкость считалась идеальным проводником. Это соответствует тому, что магнитное поле не проникает в жидкость, а его силовые линии направлены по касательной к границе. Для жидкости с конечной проводимостью аналогичная ситуация реализуется в высокочастотном поле, для которого глубина скин-слоя значительно меньше радиуса струи.

Согласно найденным точным решениям, под влиянием магнитного поля поперечное сечение струи меняет форму: занимаемая жидкостью в плоскости сечения область растягивается вдоль линий поля. Оба семейства решений описывают деформацию струи исходно круглого сечения вплоть до ее деления на две отдельные струи (рис. 2 и 3).

Проведенный нами анализ условий существования равновесных конфигураций струй, основанный на рассмотрении как точных однопараметрических, так и приближенных двухпараметрических решений, показал, что в широком диапазоне параметров задачи взаимная компенсация капиллярных и магнитных сил невозможна, если внешнее магнитное поле в месте расположения струи превышает некоторое пороговое значение. Перепиывая (33) в размерных обозначениях, получим следующую оценку для порогового поля:

$$B_c^* = B_c(2\mu_0 T/R_0)^{1/2}, \quad B_c \approx 1.97.$$

При этом значении поля будет происходить расщепление струи с радиусом  $R_0$ .

Отметим, что полученные решения могут быть легко обобщены на случай произвольного числа проводников с током, окружающих струю. Для четырех и шести проводников соответствующие конфигурации исследовались численными методами в работе [6].

Работа выполнена в рамках темы государственного задания № 0389-2014-0006 при поддержке РФФИ (проекты 14-08-00235 и 16-08-00228), а также Президиума УрО РАН (проект 15-8-2-8).

## Список литературы

- [1] *Rosensweig R.E.* // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1987. Vol. 19. P. 437–463.
- [2] *Шлюomis М.И.* // *УФН.* 1974. Т. 112. Вып. 3. С. 427–458.
- [3] *Bacri J.C., Salin D.* // *J. Phys. Lett.* 1982. Vol. 43. P. 649–654.
- [4] *Bushueva С.А., Kostarev K.G., Lebedev A.V.* // *Magnetohydrodynamics.* 2011. Vol. 47. P. 207–212.
- [5] *Shercliff J.A.* // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1981. Vol. 375. P. 455–473.
- [6] *Blyth M.G., Vanden-Broeck J.-M.* // *SIAM J. Appl. Math.* 2005. Vol. 66. P. 174–186.
- [7] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // *ПМТФ.* 2013. Т. 54. Вып. 1. С. 3–12.
- [8] *Felici T.P.* // *J. Fluid Mech.* 1995. Vol. 302. P. 1–28.
- [9] *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71. P. 016307.
- [10] *Зубарев Н.М.* // *Письма в ЖТФ.* 1999. Т. 25. Вып. 22. С. 79–83.
- [11] *Zubarev N.M.* // *Physica. D.* 2001. Vol. 152–153. P. 787–793.
- [12] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // *ЖТФ.* 2012. Т. 82. Вып. 12. С. 132–134.
- [13] *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // *Physica. D.* 2012. Vol. 241. P. 921–928.