

## Коаксиальный (трубчатый) тлеющий разряд в электроотрицательных газах

© А.П. Головицкий

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: alexandergolovitski@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 8 июня 2015 г. В окончательной редакции 13 октября 2015 г.)

Рассмотрена плазма положительного столба электроотрицательного тлеющего разряда низкого и среднего давлений, горящего в зазоре между двумя коаксиально расположенными цилиндрическими трубками; ток направлен вдоль оси трубок. Полагается, что в состав смеси газов входят галогены, а ионная диффузия не пренебрежимо мала. Установлено, что характерной чертой коаксиального разряда является расслоение плазмы в поперечном к току направлении на три коаксиальные области с разным составом. Показано значительное увеличение частот ионизации и возбуждения атомов по сравнению с чисто цилиндрическим случаем даже при небольшой (0.05–0.15) величине отношения радиусов внутренней и внешней стенок. Из асимптотического анализа уравнений непрерывности получены аналитические соотношения, позволяющие быстро и легко оценить геометрические параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц, а также энергетические параметры плазмы при отношении радиусов, большем 0.3. Путем сравнения результатов аналитических и численных расчетов установлены условия применимости аналитических соотношений и их точность.

### Введение

К настоящему времени общие свойства плазмы положительного столба (ПС) неизотермичного электроотрицательного (ЭО) разряда изучены в достаточной мере [1–9]. Установлено расслоение плазмы в поперечном к протеканию тока направлении на периферийную область электрон-ионной ( $e-i$ ) плазмы (далее — оболочка), практически не содержащей отрицательных ионов (ОИ) с близким к амбиполярному режимом диффузии плазмы, и центральную область ион-ионной ( $i-i$ ) плазмы (далее — сердцевина), где концентрации ионов — и отрицательных  $n_n$ , и положительных  $n_p$  — намного превышают концентрацию электронов  $n_e$  и где при сильной электроотрицательности поперечное поле  $E_x$  мало и имеет место близкая к свободной диффузия электронов при почти плоском пространственном распределении  $n_e$ . В узкой области перехода от  $i-i$ -к  $e-i$ -плазме имеют место сильные изменения  $n_p$  и  $n_n$ . Для плоской и цилиндрической геометрий разряда получены простые аналитические соотношения, позволяющие с приемлемой точностью оценивать параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц и энергетические параметры плазмы ПС ЭО тлеющего разряда низкого и среднего давлений, не прибегая к численному моделированию [7–9].

Тем не менее отдельные варианты ПС тлеющего ЭО разряда остаются малоизученными. Целью настоящей работы является изучение плазмы ПС ЭО тлеющего разряда низкого и среднего давлений (1–40 Torr) в коаксиальной геометрии, т.е. когда разряд горит в зазоре между двумя коаксиально расположенными цилиндрическими трубками, плазма также имеет трубчатую форму, а продольное поле  $E_z$  и ток разряда направлены вдоль

оси трубок. Насколько известно автору, ни экспериментов по оценке параметров плазмы, ни теоретических исследований, ни численного моделирования ЭО разрядов в коаксиальной геометрии до сих пор проведено не было.

Актуальность и практическая ценность изучения коаксиальных разрядов продемонстрированы в [10–12], где подобный разряд в смесях Хе или Кг с  $Cl_2$  предложен для использования в качестве эффективного и мощного источника УФ-излучения, не содержащего ртути. Излучающими частицами служили эксимерные молекулы  $HeCl^*$  или  $KrCl^*$ . Использование коаксиальной (как альтернативы цилиндрической) геометрии разряда позволило обеспечить небольшое межстеночное расстояние и тем самым сохранить диффузный характер разряда при повышенных давлениях газа и одновременно реализовать значительный объем плазмы при компактных размерах излучателя, а также легко осуществить охлаждение прибора прокачкой воды через внутреннюю трубку. Как результат, удалось достичь мощностей УФ-излучения до 200 W при длине прибора всего 40 см и внешнем диаметре 6 см [12].

Рассмотрим случай, когда ЭО компонентами газовой смеси являются галогены. В плазме галогенсодержащих разрядов, как показано в [5,13], среди положительных ионов преобладают молекулярные ионы галогена, а доминирующим механизмом гибели ОИ является диссоциативная ионнонная рекомбинация, проходящая по реакции (пример для хлора)  $Cl_2^+ + Cl^- \rightarrow 3Cl$ .

Введем следующие обозначения:  $\nu_i, \nu_a$  — частоты ионизации и прилипания;  $\rho_i$  — коэффициент ион-ионной рекомбинации;  $R_1, R_2$  — радиусы внутренней и внешней стенок соответственно;  $T_j, \mu_j, n_j$  и  $z_j$  — температуры, подвижности, абсолютные концентрации и знак заряда частиц  $j$ -го сорта; индексы  $e, p, n$  соответствуют элек-

тронам, положительным и отрицательным ионам;  $D_{ap}^* = \mu_p T_e / (eR_2^2)$ ;  $D_{an}^* = D_{ap}^* / \mu_{pn}$  — приведенные коэффициенты ионной диффузии;  $\mu_{pn} = \mu_p / \mu_n$ ;  $\mu_{np} = \mu_n / \mu_p$ ;  $n_{e0}$  — максимальная абсолютная электронная концентрация;  $v = v_i / D_{ap}^*$ ;  $\alpha = v_a / D_{an}^*$ ;  $\eta = n_{e0} \rho_i / D_{ap}^*$ ;  $X = r / R_2$  — поперечная приведенная (безразмерная) радиальная координата:  $X_1 \leq X \leq 1$ ;  $X_1 = R_1 / R_2$  — приведенная координата внутренней стенки;  $n(X) = n_e(X) / n_{e0}$ ;  $N(X) = n_n(X) / n_{e0}$ ;  $X_m$  — приведенная координата, при которой  $n(X)$  достигает максимума, т.е.  $n(X_m) = 1$ , а  $\left. \frac{dn}{dX} \right|_{X_m} = 0$ ;  $\tau_i = T_j / T_e$ ;  $\tau_S = \tau_p + \tau_n$ ;  $N_{0r}$  — отношение максимальных концентраций ОИ и электронов при  $\tau_S > 0$  (степень электроотрицательности).

В излагаемой ниже модели принято, что  $v_i$ ,  $v_a$ ,  $\rho_i$ ,  $D_j$ ,  $\mu_j$  постоянны по сечению плазмы. Параметр  $T_e$ , нужный для расчета величин  $D_{ap}^*$  и  $D_{an}^*$ , определим как  $T_e = eD_e / \mu_e$ ; для максвелловского распределения электронов по энергиям он совпадает с электронной температурой. Считается, что ионные температуры конечны, т.е. что хотя  $T_e \gg T_p, T_n$ , но  $\tau_p, \tau_n$  не полагаются пренебрежимо малыми.

### Аналитические оценки

При условии квазинейтральности плазмы  $n_e + n_n = n_p$  исходная стационарная система уравнений для поперечных потоков заряженных частиц  $\Gamma_j$  и их дивергенций примет вид

$$\begin{cases} \nabla \Gamma_e = (v_i - v_a) n_e, \\ \nabla \Gamma_p = v_i n_e - \rho_i n_n n_p, \\ \nabla \Gamma_n = v_a n_e - \rho_i n_n n_p, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Gamma_j = -D_j \nabla n_j + z_j n_j \mu_j E_r, \quad (2)$$

$$\Gamma_p - \Gamma_n - \Gamma_e = 0. \quad (3)$$

Граничные условия (ГУ) задачи:  $n_e(R_1) = n_p(R_1) = n_n(R_1) = 0$ ;  $n_e(R_2) = n_p(R_2) = n_n(R_2) = 0$ ;  $\Gamma_n(R_1) = \Gamma_n(R_2) = 0$ . Если  $T_e \gg T_p, T_n$ , а концентрация электронов не слишком мала, то при  $\mu_e n_e \gg \mu_p n_p, \mu_n n_n$  поперечное поле  $E_r$ , согласно (2) и (3), соответствует  $E_r \cong -\frac{T_e}{eR_2} \frac{\nabla n(X)}{n(X)}$ , где градиент берется по приведенной координате  $X$ . Исключая поле, из (1)–(3) можно получить

$$-\Delta N \cdot \tau_n + \nabla \left( \frac{N}{n} \nabla n \right) \approx \alpha n - \mu_{pn} \eta NP, \quad (4)$$

$$-\Delta P \cdot \tau_p - \nabla \left( \frac{P}{n} \nabla n \right) \approx v n - \eta NP, \quad (5)$$

Производные здесь берутся по безразмерной координате  $X$ .

Далее ограничимся случаем большой электроотрицательности, когда в сердцевине

$$N \approx R \gg n, \quad \text{а} \quad n \sim 1. \quad (6)$$

Сложив (4) и (5), получим для сердцевины

$$\Delta N \cdot \tau_S \approx (\mu_{pn} + 1) \eta N(N + n) - (v + \alpha)n - \Delta n, \quad (7)$$

где  $\tau_S = \tau_p + \tau_n$ . Условия (6) позволяют упростить (7) до  $\Delta N \cdot \tau_S \approx (\mu_{pn} + 1) \eta N^2 - (v + \alpha)n$ , а затем, обозначив  $N_0 = \sqrt{\frac{v + \alpha}{(\mu_{pn} + 1) \eta}}$  и сделав подстановку  $\chi = \sqrt{(v + \alpha) / (N_0 \tau_S)} X$ ,  $Y(\chi) = N(\chi) / N_0$ , можно получить следующее, не зависящее ни от каких параметров уравнение:

$$\Delta Y(\chi) = Y^2(\chi) - 1. \quad (8)$$

ГУ задачи (8):  $Y(\chi_L) = 0$  и  $Y(\chi_R) = 0$ , где

$$\chi_L = \sqrt{\frac{v + \alpha}{N_0 \tau_S}} X_L, \quad \chi_R = \sqrt{\frac{v + \alpha}{N_0 \tau_S}} X_R, \quad (9)$$

а  $X_L$  и  $X_R$  — такие приведенные расстояния от центра, где  $N(X)$  можно положить равной нулю (рис. 1); далее будем полагать  $X_L < X_R$  (разность  $X_R - X_L$  определяет размер сердцевины по основанию) и соответственно  $X_L < X_R$ . Переменную  $\chi$  можно представить как  $\chi = \sqrt{(\mu_{pn} + 1) / (2\mu_{pn}^2)} X / \lambda$  (при  $\mu_{pn} = 1$   $\chi = X / \lambda$ ), где  $\lambda \approx \sqrt{\frac{\tau_n}{\mu_{pn} \eta N_0}}$  — приведенная диффузионная длина ионов,

в абсолютных единицах равная  $\sqrt{\frac{D_n}{\rho_i n_n}}$ . Таким образом, по физическому смыслу  $\chi$  является координатой, выраженной в диффузионных длинах ионов.

В принципе можно получить и точное решение (8): оно выражается через функции, обратные к эллиптическим интегралам, однако это решение сложно и весьма затруднительно для анализа. Поэтому был проведен анализ асимптотического поведения решения (8) в двух предельных случаях:  $Y \rightarrow 1$  и  $Y \ll 1$ .

Для больших, хотя и меньших единицы, величин  $\tau$  (т.е. при сильной ионной диффузии) и незначительных величинах  $\chi_L, \chi_R$  реализуется случай  $Y \ll 1$ , а решение (8) выглядит как

$$Y(\chi) \approx \frac{\chi_R^2 - \chi^2}{4} - \frac{\chi_R^2 - \chi_L^2}{4 \ln(\chi_L / \chi_R)} \ln(\chi / \chi_R). \quad (10)$$

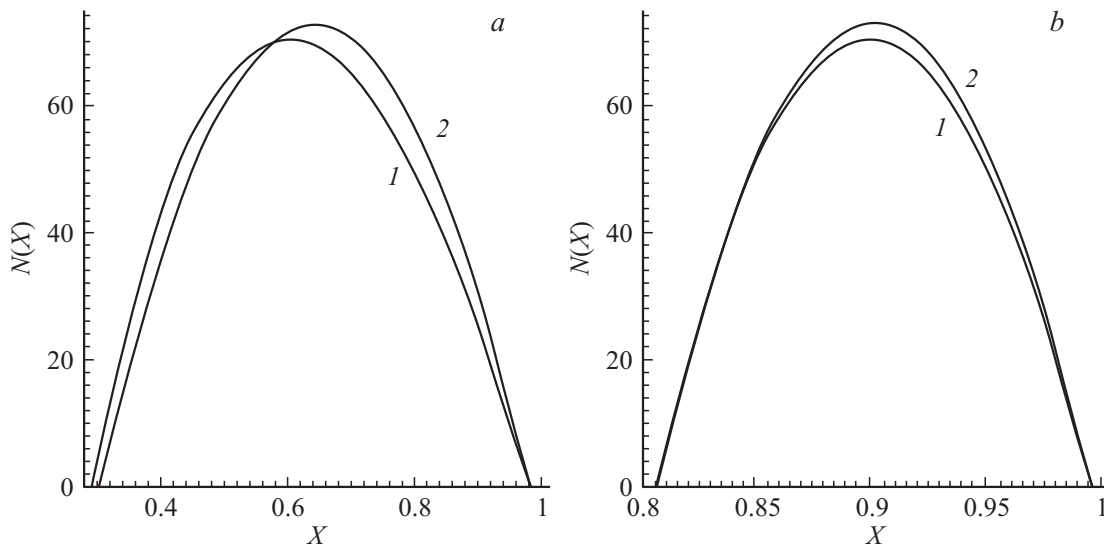
В действительности, если  $\chi_R \leq 1$ , то невязка между (10) и точным решением (8) составляет не более 0.5%. При сужении межстеночного зазора, т.е. при  $\chi_L \rightarrow \chi_R$ , асимптотическое разложение решения (8)

$$Y(\chi) \rightarrow \left( \frac{1}{2} - \frac{\chi_R - \chi_L}{12 \chi_R} \right) (\chi_R - \chi)(\chi - \chi_L) + \frac{(\chi_R - \chi)^2 (\chi - \chi_L)}{6 \chi_R}.$$

Главный член разложения —  $Y(\chi) \approx (\chi_R - \chi)(\chi - \chi_L) / 2$  — можно записать в виде

$$Y(\chi) \approx \frac{(\chi_R - \chi_L)^2}{8} \left\{ 1 - \left[ \frac{\chi - (\chi_R + \chi_L) / 2}{(\chi_R - \chi_L) / 2} \right]^2 \right\}. \quad (11)$$

При  $0 < \tau \ll 1$  (т.е. при умеренной ионной диффузии) и больших величинах  $\chi_0$  реализуется случай  $Y \sim 1$ .



**Рис. 1.** Профили концентрации отрицательных ионов при различных отношениях радиусов внутренней и внешней стенок  $R_1/R_2$  (пример для  $\alpha = 1$ ,  $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\tau_p = \tau_n = 0.05$  и  $\mu_{np} = 1.3$ ): 1 — численная модель, 2 — расчет по (15)–(18); а —  $R_1/R_2 = 0.28$ , невязка 10%; б —  $R_1/R_2 = 0.8$ , невязка 4.3%.

При этом (8) перейдет в уравнение  $\Delta Y(\chi) \approx 2[Y(\chi) - 1]$ . Решение его при  $Y(\chi_L) = 0$  и  $Y(\chi_R) = 0$  выражается довольно громоздкой комбинацией функций Бесселя мнимого аргумента, однако асимптотика решения при  $\chi_L \rightarrow \chi_R$  выглядит несложно:

$$Y(\chi) \approx 1 - \frac{\text{ch} \left[ \sqrt{2} \left( \chi - \frac{\chi_R + \chi_L}{2} \right) \right]}{\text{ch}[(\chi_R - \chi_L)/\sqrt{2}]}. \quad (12)$$

Сопоставление с результатами численной модели (см. ниже) показывает, что использование асимптотических выражений (11) при  $\chi_R \leq 1$  или (12) при  $\chi_R > 1$  для расчета профиля  $N(X)$  дает погрешности, не превышающие 6% при  $0.5 \leq R_1/R_2 < 1$  и 12% при  $0.3 \leq R_1/R_2 < 1$  (рис. 1).

Здесь следует отметить, что формы профилей распределения  $Y(\chi) = N(\chi)/N_0$  (11) и (12) оказываются симметричными относительно координаты  $(X_R + X_L)/2$ ; более того, они совпадают с формами  $Y(\chi)$ , полученными в [9] для плоской геометрии ЭО разряда. В общем очевидно, что при предельно узких межстеночных зазорах, т.е. при  $R_1/R_2 \rightarrow 1$ , коаксиальная геометрия разряда должна переходить в плоскую, однако вопрос о погрешностях, вносимых при таком переходе, до сих пор не изучался.

Ввиду незначительности погрешности далее ограничимся случаями, когда профиль  $N(X)$  описывается выражениями (11) или (12), тем более что величины  $R_1/R_2$  для коаксиальных ЭО разрядов, интересных для практических применений, входят в указанный выше диапазон.

Симметрия (11) и (12), т.е.  $N(X)$ , относительно координаты  $(X_R + X_L)/2$  позволяет предположить, что и профили  $n(X)$  и  $P(X)$  также будут приемлемо симметричными при  $0.3 \leq R_1/R_2 < 1$  (что далее подтвердится

при численном моделировании). Это дает возможность сдвинуть в точку  $(X_R + X_L)/2$  нуль координаты  $X$  и проводить дальнейшие расчеты для коаксиальной геометрии, как для плоской. В этом случае приведенная координата внешней стенки (бывшая до сдвига координат равной единице) станет равной  $\sigma = \frac{R_2 - R_1}{2R_2}$ , а  $X \in [0, \sigma]$ . Сообразно с тем, меньше или больше единицы окажется величина  $\chi_0 = \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{N_0 \tau_n}} X_0$  ( $X_0$  — отсчитываемая от нуля координата, при которой  $N(X)$  полагается равной нулю), реализуется режим сильной или умеренной ионной диффузии. В отличие от чисто плоской геометрии [9], теперь величина  $X_0$ , численно равная  $(X_R - X_L)/2$ , будет  $X_0 < \sigma < 1/2$ ; поэтому можно предположить, что режим сильной ионной диффузии будет для коаксиальной геометрии более вероятным при прочих равных условиях. Последующие расчеты показали, что при  $R_1/R_2 \geq 0.3$  и  $\tau_{p,n} \geq 0.01$  этот режим реализуется во всем нижеуказанном диапазоне условий разряда.

Если  $\tau_n < 1$ , то ОИ не попадают на стенки и гибнут исключительно в плазме. Средние по поперечному сечению плазмы скорости рождения и гибели ОИ должны быть равны. При сильной электроотрицательности, т.е. при выполнении (6), это означает:

$$\alpha \int_0^\sigma n(X) dX \approx \mu_{pn} \eta \int_0^{X_0} N^2(X) dX. \quad (13)$$

В [14] показано, что на периферии ПС (в оболочке) зависимость  $n(x)$  при наличии ионной диффузии близка к линейной:

$$n(X) \approx (\sigma - X)/(\sigma - X_0), \quad (14)$$

тогда  $a = \int_0^\sigma n(X)dX = (\sigma + X_0)/2$ . Из (11) следует, что

$$N(X) \approx \frac{\nu + \alpha}{2\tau_S} X_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{X}{X_0} \right)^2 \right]. \quad (15)$$

Подставив (15) в (13), можно получить

$$X_0 \approx \left[ \frac{15\alpha\sigma}{2\mu_{pn}\eta} a \left( \frac{\tau_S}{\nu + \alpha} \right)^2 \right]^{1/5}.$$

При  $a \geq 0.7\sigma$ , что соответствует  $0.4\sigma \leq X < \sigma$ , величину  $X_0$  с погрешностью не более 5–10% можно оценивать и по более простой формуле

$$X_0 \approx \left[ \frac{15\alpha\sigma}{2\mu_{pn}\eta} \left( \frac{\tau_S}{\nu + \alpha} \right)^2 \right]^{1/5}. \quad (16)$$

Указанная в таблице приведенная толщина обедненной отрицательными ионами пристеночной области  $e-i$ -плазмы  $\delta_0$  вычисляется как  $\delta_0 = \sigma - X_0$ . Из (15) следует  $N_{0r} \approx \frac{\nu + \alpha}{2\tau_S} X_0^2$  или

$$N_{0r} = \frac{1}{2} \left( \frac{15\alpha\sigma}{2\mu_{pn}\eta} \sqrt{\nu + \alpha\tau_S} \right)^{2/5}. \quad (17)$$

В оболочке (ввиду  $n_p \approx n_e \gg n_n$ ) поток положительных ионов течет на стенку фактически в амбиполярном режиме [1,4]:  $\Gamma_p = -D_{ap} \frac{dn_p}{dx}$ ; нарабатывается же этот поток в сердцевине плазмы:  $\Gamma_p = \nu_i \int_0^{x_0} n_e(x)dx - \rho_i \int_0^{x_0} n_p(x)n_n(x)dx$  (здесь  $x_0$  — абсолютная координата границы между  $i-i$ - и  $e-i$ -плазмой). Учтем, что в сердцевине при сильной электроотрицательности  $n_p \approx n_n \gg n_e$  и  $n_e \approx n_{e0}$  (6), а так как в оболочке  $n_p \approx n_e$ , то в соответствии с (14)  $\frac{dn_p}{dx} \approx -\frac{n_{e0}}{(\sigma R_2 - x_0)}$ . В итоге, приравняв выражения для потока и учтя (13), получим следующее уравнение для расчета  $\nu$ :

$$\nu - \frac{\alpha}{2\mu_{pn}} \frac{X_0 + \sigma}{X_0} \approx \frac{1}{X_0(\sigma - X_0)}, \quad (18)$$

куда следует подставить  $X_0$  из (16).

В случаях, когда  $\tau \geq 0.05$ , ионный профиль фактически доходит до стенки;  $X_0 \rightarrow \sigma$  (рис. 1, 2). Тогда из (15) следует

$$N_{0r} = \sigma^2 \frac{\nu + \alpha}{2\tau_S}. \quad (19)$$

Приравняв (19) к (17), получим в итоге простые формулы

$$\nu \approx \frac{\tau_S}{\sigma^2} \sqrt{\frac{15\alpha}{2\eta\mu_{pn}}} - \alpha, \quad (20)$$

$$N_{0r} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15\alpha}{2\eta\mu_{pn}}}. \quad (21)$$

На рис. 1 представлены избранные результаты расчетов профилей ОИ  $N(X)$  по вышеприведенным формулам в сопоставлении с результатами численного моделирования. При  $R_1/R_2 \geq 0.3$  интегральная невязка модельных и аналитических результатов не превышает 10%.

Для количественных расчетов параметров плазмы по полученным выше формулам требуется знать значения таких исходных параметров как  $\alpha, \eta, \tau_p, \tau_n, \mu_p, \mu_n$ , а также  $D_e$  и  $\mu_e$ . Рекомендации по априорному вычислению этих параметров изложены в [9,15].

### Численная модель

Обозначая  $F_j = \Gamma_j / (D_{aj}^* R_2 n_{e0})$ , можно преобразовать (1)–(3) к виду

$$\frac{dF_p}{dX} + \frac{F_p}{X} = \nu n - \eta N(N + n), \quad (22)$$

$$\frac{dF_n}{dX} + \frac{F_n}{X} = \alpha n - \eta N(N + n)\mu_{pn}, \quad (23)$$

$$\frac{dn}{dX} = -\frac{n}{n(1 + \tau_p) + N(1 + \mu_{np})} \left\{ F_p - F_n \mu_{np} + \frac{\mu_{np}\tau_n - \tau_p}{n\tau_n(1 + \tau_p) + N(\tau_n + \tau_p)} [F_n(n + n\tau_p + N) + F_p N] \right\}, \quad (24)$$

$$\frac{dN}{dX} = -\frac{1}{n\tau_n(1 + \tau_p) + N(\tau_n + \tau_p)} \times [F_n(n + n\tau_p + N) + F_p N]. \quad (25)$$

Граничные условия (ГУ) задачи

$$n(1) = n(X_1) = 0, \quad N(1) = N(X_1) = 0, \quad (26)$$

$$F_n(X_1) = F_n(1) = 0. \quad (27)$$

К ним можно было бы добавить  $\left. \frac{dF_n}{dX} \right|_{X=X_1} = \left. \frac{dF_p}{dX} \right|_{X=1} = 0$  (что означает физическую невозможность потока ОИ непосредственно от стенок), но эти условия автоматически выполняются при выполнении (26)–(27).

В [9] аналогичная система решалась для цилиндрической геометрии, когда геометрический центр симметрии стенки ( $X = 0$ ) совпадает с центром плазмы, ввиду чего профили концентраций заряженных частиц при  $X = 0$  максимальны, а их потоки равны нулю. Нулевые ГУ для  $n(X)$  и  $N(X)$  ставились лишь при  $X = 1$ ; поэтому для решения было достаточно двух собственных чисел. В коаксиальной геометрии геометрический центр симметрии находится вне плазмы, а относительно стенок профили заряженных частиц несимметричны. Для обеспечения нулевого ГУ по потоку ОИ (27) на обеих стенках потребовалось введение третьего собственного числа, а в связи с этим — и изменение методики численного решения системы (22)–(25) по сравнению с [9].

Результаты расчетов

| $\alpha$ | $\tau$ | $R_1/R_2$ | $\nu^{(num)}$ | $\nu$       | $\nu$ | Асимметрия<br>$N(X)$ | Асимметрия<br>$n(X)$ | $\delta_{0L}^{(num)}/\delta_{0R}^{(num)}$ | $\delta_0$ | $N_{0r}^{(num)}$ | $N_{0r}$ | $N_{0r}$ |
|----------|--------|-----------|---------------|-------------|-------|----------------------|----------------------|---|------------|------------------|----------|----------|
|          |        |           |               | (16) + (18) | (20)  |                      |                      |   | (16)       |                  | (17)     | (21)     |
| 8        | 0.05   | 0.147     | 231           | 224         | 209   | 0.123                | 0.023                | 0.008/0.017                               | 0.011      | 198.3            | 200.2    | 197.5    |
| 8        | 0.05   | 0.281     | 330           | 319         | 298   | 0.084                | 0.018                | 0.009/0.014                               | 0.0093     | 197.0            | 200.1    | 197.5    |
| 8        | 0.05   | 0.643     | 1142          | 1123        | 1063  | 0.033                | 0.007                | 0.006/0.007                               | 0.005      | 195.6            | 200.0    | 197.5    |
| 8        | 0.05   | 0.804     | 4343          | 4354        | 4090  | 0.015                | 0.004                | 0.0027/0.0032                             | 0.0024     | 195.6            | 199.9    | 197.5    |
| 8        | 0.01   | 0.16      | 70.5          | 57.7        | 36.7  | 0.12                 | 0.041                | 0.029/0.052                               | 0.06       | 200.0            | 213.3    | 197.5    |
| 8        | 0.01   | 0.288     | 93.9          | 80.6        | 54.4  | 0.088                | 0.031                | 0.030/0.043                               | 0.047      | 200.0            | 211.8    | 197.5    |
| 8        | 0.01   | 0.617     | 292           | 283         | 207   | 0.039                | 0.015                | 0.020/0.023                               | 0.022      | 201.5            | 209.7    | 197.5    |
| 8        | 0.01   | 0.804     | 1071          | 1085        | 812   | 0.018                | 0.0064               | 0.011/0.012                               | 0.011      | 202.5            | 209.2    | 197.5    |
| 1        | 0.05   | 0.090     | 73.4          | 79.0        | 66.4  | 0.173                | 0.049                | 0.015/0.040                               | 0.030      | 71.6             | 72.3     | 69.8     |
| 1        | 0.05   | 0.144     | 84.9          | 89.4        | 75.2  | 0.141                | 0.038                | 0.018/0.036                               | 0.029      | 71.0             | 72.3     | 69.8     |
| 1        | 0.05   | 0.279     | 123           | 126.5       | 107   | 0.096                | 0.026                | 0.019/0.029                               | 0.024      | 70.0             | 72.2     | 69.8     |
| 1        | 0.05   | 0.440     | 206           | 209.6       | 177   | 0.062                | 0.017                | 0.016/0.022                               | 0.018      | 69.8             | 72.2     | 69.8     |
| 1        | 0.05   | 0.616     | 440           | 447         | 378   | 0.037                | 0.011                | 0.012/0.014                               | 0.0125     | 69.5             | 72.2     | 69.8     |
| 1        | 0.05   | 0.804     | 1687          | 1713        | 1449  | 0.017                | 0.0055               | 0.0065/0.0071                             | 0.0064     | 69.5             | 72.2     | 69.8     |
| 0.1      | 0.05   | 0.144     | 34.3          | 38.5        | 24.0  | 0.186                | 0.068                | 0.041/0.085                               | 0.073      | 22.7             | 24.3     | 22.1     |
| 0.1      | 0.05   | 0.280     | 50.4          | 54.4        | 34.0  | 0.126                | 0.046                | 0.043/0.068                               | 0.062      | 22.5             | 24.3     | 22.1     |
| 0.1      | 0.05   | 0.616     | 182           | 192         | 120   | 0.049                | 0.018                | 0.028/0.033                               | 0.033      | 22.3             | 24.4     | 22.1     |
| 0.1      | 0.05   | 0.804     | 699           | 733         | 459   | 0.023                | 0.009                | 0.016/0.018                               | 0.017      | 22.3             | 24.4     | 22.1     |

В настоящей работе система (22)–(25) решалась как краевая задача с тремя собственными значениями. В качестве первого была избрана приведенная частота ионизации  $\nu$ , второго — величина  $N_m = N(X_m)$  и третьего —  $F_{p0}$  — величина приведенного потока положительных ионов при координате  $X_m$ . Величина  $N_m$ , вообще говоря, не совпадает с  $N_{0r}$ . Перед началом решения системы (22)–(25) задавались значения собственных чисел и величина  $X_m$ , а также начальные условия при  $X = X_m$ :  $n(X_m) = 1$ ;  $N(X_m) = N_m$ ;  $F_p(X_m) = F_{p0}$  и, как следует из (24),

$$F_n(X_m) = F_{p0} \frac{1 + N_m \frac{\mu_{np}\tau_n - \tau_p}{\tau_n(1+\tau_p) + N_m(\tau_n + \tau_p)}}{\mu_{np} + \frac{(\mu_{np}\tau_n - \tau_p)(1 + \tau_p + N_m)}{\tau_n(1+\tau_p) + N_m(\tau_n + \tau_p)}}$$

Особо отметим, что следует задавать  $F_{p0} < 0$ , иначе не удастся получить физически разумного решения ни при каких  $\nu$  и  $N_m$ .

Далее по порядку:

1. Интегрирование системы (22)–(25) начиналось от  $X = X_m$  вправо до  $X = 1$  по методу Рунге–Кутты IV порядка с апостериорным уточнением решения по Рунге [16]. Подбором значений  $\nu$  и  $N_m$  достигалось выполнение ГУ (26) и (27) при  $X = 1$ .

2. При найденных  $\nu$  и  $N_m$  система интегрировалась влево от  $X = X_m$  до такого значения  $X$  (априори неизвестного), при котором достигалось  $n(X) \approx 0$ ; это значение  $X$  принималось за  $X_1$ . Отметим, что всегда выполнялось  $X_m - X_1 < 1 - X_m$ .

3. Если выполняется  $F_n(X_1) \approx 0$ , то решение найдено; если нет, то изменялось значение  $F_{p0}$  и все повторялось с шага 1.

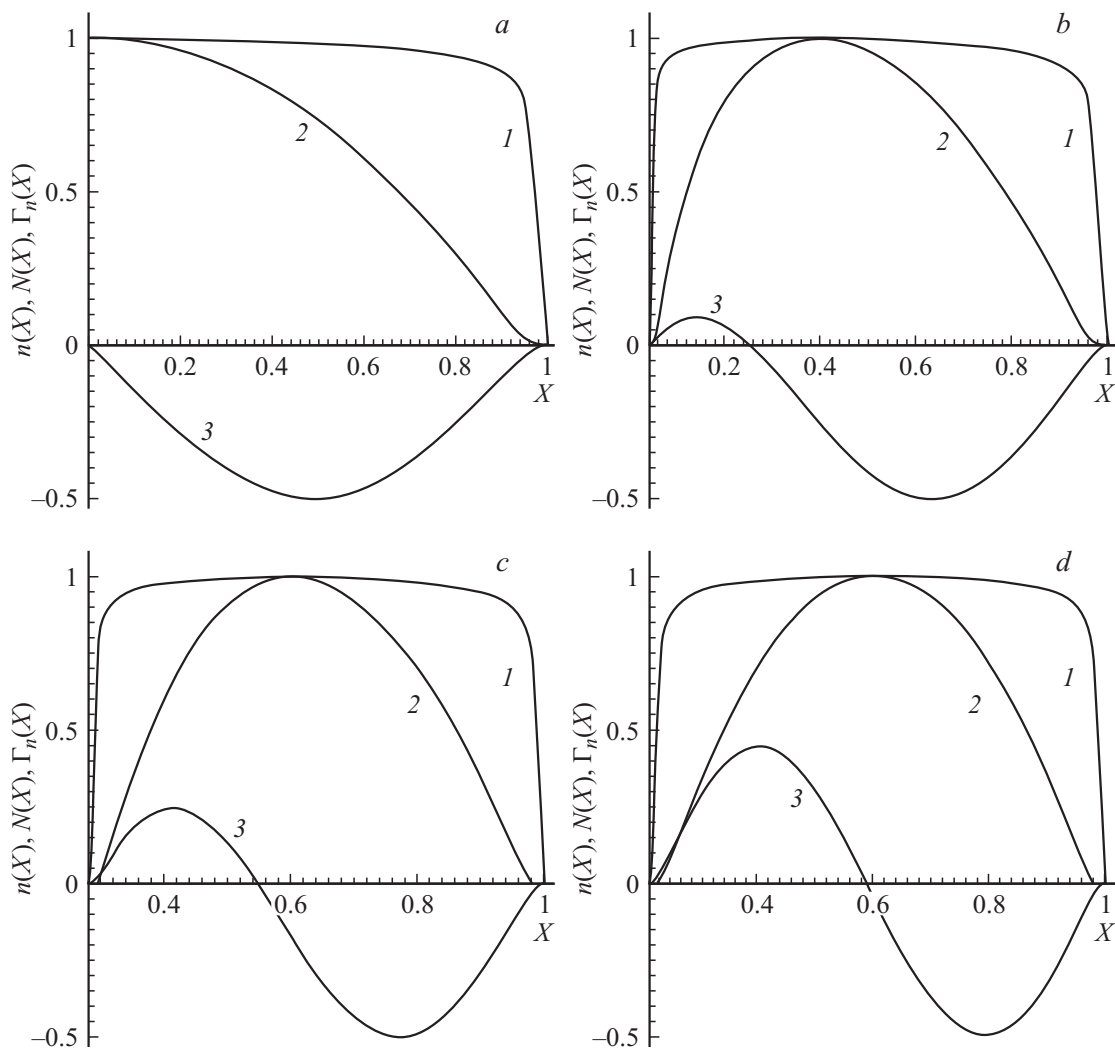
Расчеты проводились при  $0.1 \leq \alpha \leq 8$ ;  $0.001 \leq \tau_n$ ;  $\tau_p \leq 0.2$ ;  $\mu_{np} \approx 1.3$ ;  $\eta \approx 5 \cdot 10^{-4}$  и  $0 < X_1 < 1$ . (Фактически входным параметром модели была величина  $X_m$ , а не  $X_1$ ; последняя рассчитывалась на шаге 2, исходя из заданной  $X_m$ , причем для любых  $0 < X_m < 1$  было  $0 < X_1 < X_m$ .) Указанные величины параметров характерны для тлеющего разряда в смесях инертных газов с хлором при составах и давлениях, типичных для вышеупомянутых газоразрядных эксимерных источников УФ-излучения. Некоторые результаты вычислений представлены в таблице и на рис. 2.

Численное моделирование позволило установить следующие характерные черты ЭО разряда в коаксиальной геометрии.

— Типичное для ЭО разрядов расслоение плазмы на практически не содержащую ОИ периферийные слои  $e-i$ -плазмы (где  $n_n \ll n_p, n_e$ ) и центральную область  $i-i$ -плазмы (где  $n_p, n_n \gg n_e$ ), имеет место и в коаксиальной геометрии. В данном случае плазма расслаивается на три коаксиально расположенных области, поскольку образуются два слоя  $e-i$ -плазмы — и у внешней, и у внутренней стенок (рис. 2), а область  $i-i$ -плазмы локализована между слоями  $e-i$ -плазмы. Приведенные толщины этих слоев обозначены в таблице как  $\delta_{0R}$  и  $\delta_{0L}$  соответственно;  $\delta_{0L}$  всегда меньше, чем  $\delta_{0R}$ .

— При  $X_1 \rightarrow 1$ , т.е. при  $R_2 - R_1 \ll R$ , профили  $n(X)$ ,  $N(X)$  и приведенных ионных потоков практически симметричны относительно вертикальной линии с координатой  $X_S = (X_1 + 1)/2$  (рис. 2), т.е. близки к профилям, характерным для плоской геометрии разряда, а  $\delta_{0L} \rightarrow \delta_{0R}$ .

— При  $X_1 \rightarrow 0$  профили  $N(X)$  и  $n(X)$  (рис. 2), а также величина  $\nu$  (рис. 3, а) приближаются к таковым



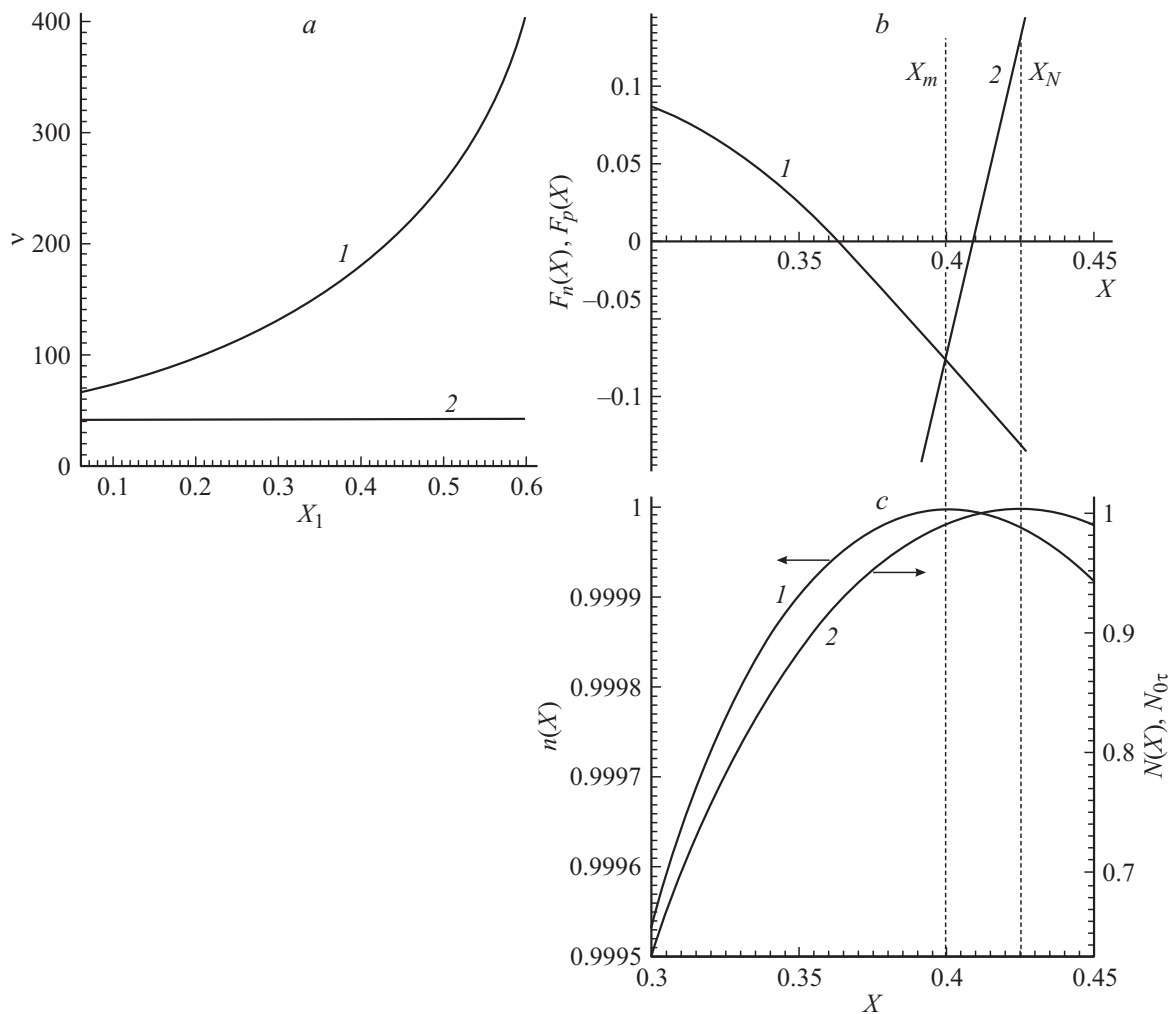
**Рис. 2.** Эволюция профилей концентраций электронов  $n(X)$  (1), отрицательных ионов  $N(X)/N_{0r}$  (2) и потока отрицательных ионов  $\Gamma_n(X)$  (3) при увеличении отношения  $R_1/R_2$  (пример для  $\alpha = 1, \eta = 5 \cdot 10^{-4}, \tau_p = \tau_n = 0.5$  и  $\mu_{np} = 1.3$ ):  $a - R_1/R_2 = 0$  (цилиндрическая геометрия),  $b - R_1/R_2 = 0.047, c - R_1/R_2 = 0.29, d - R_1/R_2 = 0.8$ .

для цилиндрической геометрии разряда. Следует все же заметить, что даже при  $X_1 \approx 0.05-0.15$  наличие внутренней стенки приводит к тому, что величина  $\nu$  оказывается существенно большей, чем для случая чисто цилиндрической геометрии [9] при прочих равных условиях. Сказанное характерно для всех вышеуказанных условий разряда. Так, при  $X_1 = R_1/R_2 \approx 0.15$  сопоставление данных [9] с данными настоящей работы (см. таблицу) показывает, что отношение приведенных частот ионизации  $\nu_{\text{соax}}/\nu_{\text{cy1}}$  составляет 1.9–2.15. Так как для инертных газов при средних давлениях  $T_e \ll W_{\text{exc}}, W_i$  ( $W_{\text{exc}}$  и  $W_i$  — энергии возбуждения и ионизации), частоты ионизации и возбуждения зависят от  $T_e$  приблизительно экспоненциально, а отношение частот возбуждения атомов  $\nu_{\text{соax}}^*/\nu_{\text{cy1}}^*$  можно оценить через уравнение Аррениуса —  $\frac{\nu_{\text{соax}}^*}{\nu_{\text{cy1}}^*} \approx \exp\left[\frac{W_{\text{exc}}}{W_i} \ln\left(\frac{\nu_{\text{соax}}}{\nu_{\text{cy1}}}\right)\right]$ . Для Хе оно составит 1.4–1.7. Примерно так же возрастет и удельная мощность излучения плазмы. Соответственно должна

возрасти и полная мощность, ибо объем плазмы в целом снизится лишь на 2.3%. Данное обстоятельство может представлять практический интерес с точки зрения увеличения выходной мощности газоразрядных источников УФ и видимого излучения путем простого технического решения, заключающегося во введении диэлектрического стержня в центр цилиндрической разрядной трубки.

Степень асимметрии профилей заряженных частиц при  $X_1 \rightarrow 0$  растет<sup>1</sup> (см. таблицу и рис. 2). Но при очень малых  $X_1$  она все же не очень значительна: для  $N(X)$  при  $X_1 \geq 0.3$  — не более 12%, а при  $X_1 \geq 0.4$  — не более 8%. Для  $n(X)$  степень асимметрии при любых условиях оказывается в 3–4 раза меньшей. В пристеночных областях  $n(X)$  нарастает линейно от 0 у самой стенки до  $\sim 1$  на расстояниях от стенки порядка  $\delta_{0R}$  и  $\delta_{0L}$

<sup>1</sup> Под степенью асимметрии переменной здесь понимается относительная интегральная невязка правого и левого фрагментов этой переменной относительно оси  $X_5$ .



**Рис. 3.** Результаты численного моделирования для коаксиальной геометрии (примеры для  $\tau_p = \tau_n = 0.05$ ,  $\alpha = 1$ ): *a* — зависимость приведенной частоты ионизации  $\nu$  от  $X_1 = R_1/R_2$  (1) и величина  $\nu$  для цилиндрической геометрии [9] (2), *b* — приведенные потоки отрицательных (1) и положительных ионов (2), *c* — концентрации заряженных частиц вблизи максимумов (1)  $n(X)$ ; 2 — нормированный профиль  $N(X)$ .

(см. (14)). Асимметрия ионных потоков (относительно корней  $F_p$  и  $F_n$ ) выражена сильнее и становится меньше 10% лишь при  $X_1 \geq 0.8$  (рис. 2).

— Точка, в которой потоки электронов, положительных и отрицательных ионов были бы одновременно равны нулю, отсутствует, а максимум  $N(X)$ , т.е.  $N_{0\tau}$ , достигается при  $X_N > X_m$  — несколько правее максимума  $n(X)$  (рис. 3, *b, c*). Данный факт ранее не отмечался в литературе. Различие, впрочем, невелико и заметно лишь при малых  $X_1$ , а при  $X_1 \geq 0.3$  оно не превосходит 1% и убывает при возрастании  $X_1$ .

— Величина  $N_m$ , как и ожидалось, оказалась меньше максимальной величины  $N(X_N) = N_{0\tau}$ , но весьма незначительно: даже при  $X_1 = 0.05$  различие не превышает 1% и убывает с ростом  $X_1$ .

— Ширина плазмы  $L = 1 - X_1$  оказывается меньшей, чем  $2(1 - X_m)$ ; различие, однако, мало: даже при  $X_1 \approx 0.3$  оно не превышает 10%, и убывает с возрастанием  $X_1$ .

## Заключение

В таблице приведены результаты как модельных вычислений (отмечены индексом „num“), так и расчета величин  $\nu$ ,  $\delta_0 = \sigma - X_0$ ,  $\delta_{0R}$ ,  $\delta_{0L}$  и  $N_{0\tau}$  по приведенным в настоящей работе аналитическим формулам для различных  $\alpha$ ,  $\tau$  (принято  $\tau_p = \tau_n = \tau$ ) и  $R_1/R_2$ . Номера формул, по которым производился расчет, указаны в таблице под обозначением соответствующей расчетной величины. Жирным шрифтом выделены те значения, которые согласуются с величинами, полученными численным моделированием, с погрешностью не хуже 20%.

Формула (20) оказывается весьма чувствительной к выполнению условия  $X_0 \rightarrow \sigma$  и не обеспечивает удовлетворительной оценки  $\nu$ , если  $1 - X_0/\sigma > 0.025$ , т.е. при малых  $\tau$  и/или малых  $\alpha$ .

Напротив, простая формула (21), хотя и полученная при тех же допущениях, что и (20), но непосредственно не зависящая от  $\nu$ ,  $\sigma$  и  $\tau$ , в действительности обеспечи-

вают вполне удовлетворительные оценки  $N_{0r}$  в широком диапазоне величин  $0.003 \leq \tau \leq 0.2$  и  $0.1 \leq \alpha \leq 8$ , когда значение  $1 - X_0/\sigma$  может достигать до 0.1. Устойчивость и надежность оценок  $N_{0r}$ , даваемых (21), уже констатировались в [9] для цилиндрической и плоской геометрий. Физически это объясняется тем, что (21) можно получить (с точностью до множителя порядка единицы) не только из (15)–(17), но и непосредственно из общего для неизотермических ЭО плазм положения: при  $\tau_n < 1$  ОИ не могут достичь стенок, а значит, интегральные по сечению плазмы скорости рождения и гибели ОИ должны быть равны. При сильной электроотрицательности, т.е. при выполнении (6), применяя к (13) теорему о среднем значении интеграла, получим  $N_{0r} \propto \sqrt{\frac{\alpha}{\eta\mu_{pm}}}$ . Последняя зависимость также носит общий характер, причем для любой геометрии (что отмечено и в [2], где при  $\tau_{p,n} = 0$  получена близкая зависимость  $N_{0r} \propto \sqrt{\alpha/\eta}$ ), поэтому она сохраняется даже при существенных, однако не нарушающих (6) вариациях условий разряда, которые отразятся лишь в незначительном изменении численного множителя перед корнем (равного 1.37 в (21)).

Значения  $\nu$ , рассчитанные по (16) + (18), способны обеспечить хорошее согласие с численной моделью во всем вышеуказанном диапазоне условий, а при их подстановке в (16) и (17) получается хорошее соответствие величин  $\delta_0$  и  $N_{0r}$  вплоть до  $1 - X_0/\sigma \approx 0.1$ .

Сопоставление с численной моделью показывает, что приведенные в настоящей работе формулы позволяют обеспечить точность оценок параметров плазмы ПС ЭО разряда в КГ при  $R_1/R_2 \geq 0.3$  не хуже 15–20%. С ростом  $R_1/R_2$  точность оценок возрастает. Отметим, что в упомянутых во введении коаксиальных источниках эксимерного УФ-излучения с тлеющим разрядом используются небольшие межстеночные зазоры, а отношение  $R_1/R_2$  составляет 0.67–0.92 [11,12]. В частности, в [11] опытным путем было установлено, что оптимальная ширина зазора, при которой реализовывались максимальные мощности УФ-излучения, составила 8 мм при диаметре внешней стенки 60 мм ( $R_1/R_2 \approx 0.73$ ). В ином варианте коаксиального ЭО разряда среднего давления, предложенном для безртутных люминесцентных ламп [17], отношение  $R_1/R_2$  составляло 0.58. Можно заключить, что приведенные в настоящей работе аналитические выражения вполне пригодны для оценок энергетических параметров ЭО плазмы и геометрических параметров профилей концентраций заряженных частиц при масштабных соотношениях, характерных для реальных ЭО разрядов коаксиальной геометрии.

## Список литературы

- [1] Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 21–28.
- [2] Rozhansky V.A., Tsendin L.D. Transport phenomena in partially ionized plasma. London & NY: Taylor & Francis, 2001. 488 p.

- [3] Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д. Физика тлеющего разряда. СПб.: Лань, 2010. 512 с.
- [4] Volynets V.N., Lukyanova A.V., Rakhimov A.T. et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 647–656.
- [5] Franklin R.N., Daniels P.G., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 1638–1649.
- [6] Franklin R. N., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. Vol. 27. P. 2102–2106.
- [7] Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д. и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 70–77.
- [8] Головицкий А.П., Цендин Л.Д. // ЖТФ. 2014. Т. 84, Вып. 3. С. 44–49.
- [9] Головицкий А.П. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 11. С. 21–30.
- [10] Панченко А.Н., Скакун В.С., Соснин Э.А. и др. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 20. С. 77–80.
- [11] Lomaev M.I., Panchenko A.N., Skakun V.S. et al. // Laser and Particle Beams. 1997. Vol. 15. N 2. P. 339–345.
- [12] Panchenko A.N., Sosnin E.A., Tarasenko V.F. // Opt. Commun. 1999. N 161. P. 249–252.
- [13] Rogoff G.L., Kramer J.M., Piejak R.B. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1986. Vol. PS-14. N 2. P. 103–111.
- [14] Головицкий А.П. // Сб. матер. всеросс. конф. „Физика низкотемпературной плазмы. ФНТП–2014“, Казань, 2014. Т. 1. С. 65–69.
- [15] Головицкий А.П. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки. 2015. № 1 (213). С. 69–75.
- [16] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1976. 512 с.
- [17] Головицкий А.П. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. № 6. С. 63–67.