

01

Излучение гармонических волн, вызванное плоским поршнем с учетом подвижности границы и нелинейности среды

© В.А. Поздеев, О.Ю. Олефиренко

Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,
Николаев, Украина
E-mail: oksanadurkot@mail.ru

Поступило в Редакцию 24 ноября 2015 г.

Впервые решена задача излучения гармонических волн давления движущимся поршнем. Выполнена математическая постановка начально-краевой задачи для уравнения Римана и задания граничного условия на текущем положении контактной границы. В рамках полученного аналитического решения рассмотрены физические эффекты, вызванные учетом подвижности границы контакта и нелинейности среды.

По-видимому, впервые задача с подвижными границами для уравнения теплопроводности была рассмотрена польским математиком Стефаном и стала известна как проблема Стефана [1]. Можно уверенно сказать, что многие вопросы проблемы Стефана в настоящее время хорошо изучены.

При постановке задачи излучения в акустике обычно граничное условие вследствие малости перемещения границы задается на невозмущенном ее положении [2]. Задача с подвижной границей раздела двух сред для линейного волнового уравнения рассмотрена в [3,4]. Решение начально-краевой задачи для уравнения Римана с учетом подвижности границы в параметрическом виде приведено в [5]. Точное решение для случая равноускоренного движения плоского поршня для уравнения Римана приведено в [6]. Решение для более общего закона движения поршня получено в [7]. Здесь рассмотрим излучение гармонических волн давления подвижным плоским поршнем с учетом нелинейности среды.

Как известно [6], система уравнений гидродинамики при единственном допущении зависимости плотности среды от скорости Риманом

сведена к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где скорость распространения возмущений в среде $u(v)$ определяется выражением

$$u(v) = v \pm c(v). \quad (2)$$

В (1), (2) приняты обозначения: v — скорость жидкости, x — координата, t — время. В нашем случае выбираем $u(v) = v + c(v)$, потому что волна движется вправо, в положительном направлении оси Ox .

При найденной скорости давление определяется по формуле

$$p = A \left[\left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{v}{c_0} \right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1 \right], \quad (3)$$

где p — давление, A , n — константы (для воды $A = 300$ МПа, $n = 7$), c_0 — скорость звука в невозмущенной среде.

Согласно [6], решение уравнения (1) записывается в неявном виде как

$$v = F \left[t \left(1 + \frac{n+1}{2} \frac{v}{c_0} \right) - \frac{x}{c_0} \right], \quad (4)$$

где F — пока неизвестная функция, определяемая из граничного условия.

Граничное условие запишем в виде

$$v|_{x=h_p(t)} = v_p(t), \quad v_p(t) = \frac{dh_p}{dt}, \quad (5)$$

где $h_p(t)$ — закон движения поршня; $v_p(t)$ — скорость поршня. Полагаем, что на закон движения поршня с постоянной скоростью накладываются колебания малой амплитуды

$$h_p(t) = v_0 t + h_0 \cos \omega_0 t, \quad v_p(t) = v_0 - v_1 \sin \omega_0 t,$$

где v_0 — постоянная скорость, h_0 — амплитуда, ω_0 — круговая частота малых колебаний поверхности поршня, $v_1 = h_0 \omega_0$.

Дополнительно принимаем условие $[h_0/(v_0 t) \ll 1]$, тогда граничное условие (5) запишем в виде

$$v|_{h_p=v_0 t} = v_0 - v_1 \sin \omega_0 t, \quad (6)$$

можно показать, что и для малых t это решение сохраняется.

Используя граничное условие (6) из (4), получим

$$v_0 - v_1 \sin \omega_0 t = F \left[t \left(\left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{v_0}{c_0} \right) + \frac{v_1}{c_0} \frac{n+1}{2} \sin \omega_0 t \right) \right]. \quad (7)$$

В соответствии с методом нелинейного преобразования времени [8] сделаем замену переменной

$$t[(1 + kM_0) + M_1(k+1) \sin \omega_0 t] = \xi, \quad (8)$$

где $k = (n-1)/2$, $k+1 = (n+1)/2$, $M_0 = v_0/c_0$, $M_1 = v_1/c_0$. Для определения обратной функции $t = w(\xi)$ полагаем $M_1 \ll 1$; используя метод последовательных приближений, получим

$$t_1(\xi) = \frac{\xi}{1 + kM_0},$$

$$t_2(\xi) = \frac{\xi}{1 + kM_0 + M_1(k+1) \sin \frac{\omega_0 \xi}{1 + kM_0}}.$$

Принимая $t(\xi) = t_2(\xi)$ и $[M_1(k+1)]^2 \ll 1$, запишем

$$t = w(\xi) \approx \frac{\xi}{1 + kM_0} \left[1 - \frac{M_1(k+1)}{1 + kM_0} \sin \omega_1 \xi \right], \quad (9)$$

где $\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 + kM_0}$. При этом из уравнения (7) с учетом (9) получаем искомую функцию $F(\xi)$

$$F(\xi) = M_0 - M_1 \sin \left[\omega_1 \xi \left(1 - \frac{M_1(k+1)}{1 + kM_0} \sin \omega_1 \xi \right) \right]. \quad (10)$$

В соответствии с (4) и (10) получим уравнение, содержащее функцию $\tilde{v}(x, t)$ в неявном виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) = M_0 - M_1 \sin \left[\omega_1 \left(t \left(1 + (k+1)\tilde{v} \right) - \frac{x}{c_0} \right) \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{M_1(k+1)}{1 + kM_0} \sin \omega_1 \left[t \left(1 + (k+1)\tilde{v} \right) - \frac{x}{c_0} \right] \right) \right], \quad (11) \end{aligned}$$

где $\tilde{v} = v(x, t)/c_0$.

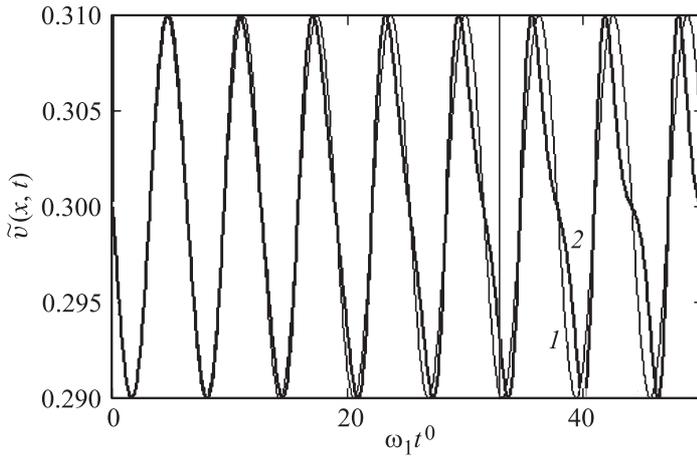


График изменения профиля гармонической волны во времени: 1 — $M_0 - M_1 \sin \omega_1 t^0$; 2 — $M_0 - M_1 \sin \left[\omega_1 t^0 \left(1 - \frac{M_1(k+1)}{1+kM_0} \right) \sin \omega_1 t^0 \right]$.

Тогда для нахождения функции $\tilde{v}(x, t)$ в явном виде, так как $(k+1)\tilde{v} < 1$ при $x/c_0 t \ll 1$, воспользуемся методом последовательных приближений. Принимая в первом приближении в правой части уравнения (11) $\tilde{v} = 0$, получим

$$\tilde{v}_I(x, t) = M_0 - M_1 \sin \left[\omega_1 t^0 \left(1 - \frac{M_1(k+1)}{1+kM_0} \sin \omega_1 t^0 \right) \right], \quad (12)$$

где $t^0 = t - x/c_0$, \tilde{v}_I — первое приближение.

Во втором приближении

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{II}(x, t) = M_0 - M_1 \sin \left[\omega_1 \left(t(1 + (k+1)\tilde{v}_I) - \frac{x}{c_0} \right) \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{M_1(k+1)}{1+kM_0} \sin \omega_1 \left[t(1 + (k+1)\tilde{v}_I) - \frac{x}{c_0} \right] \right) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где \tilde{v}_{II} — второе приближение.

Используя полученные представления для скорости \tilde{v}_I и \tilde{v}_{II} по (3), получаем представления для давления.

В качестве иллюстрации построим график изменения профиля гармонической волны во времени, воспользовавшись (12) (рис. 1). Принимая $M_0 = 0.3$, $M_1 = 0.01$.

Формула (12) учитывает изменение частоты во времени, а как это изменение происходит, видно из рисунка. Более точно это можно получить в формуле (13).

Таким образом, аналитически решена задача излучения гармонических волн давления двужущимся поршнем. Показано, что эффект изменения частоты происходит в волновом поле, которое зависит от нелинейности среды и подвижности контактной границы поршня.

Список литературы

- [1] Мейрманов А.И. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 75 с.
- [2] Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 336 с.
- [3] Поздеев В.А. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 6. С. 30–32.
- [4] Поздеев В.А. // ЖТФ. 1999. Т. 69. В. 4. С. 114–116.
- [5] Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1975. 288 с.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [7] Олефиренко О.Ю., Поздеев В.А. // Матер. I Междунар. заочной научно-практической конференции. М.: Изд. „Международный центр науки и образования“, 2013. С. 70–75.
- [8] Поздеев В.А. // ПММ. 1991. № 6. С. 1055–1058.