

## Релаксация тяжелых ионов в бесстолкновительных ударных волнах в космической плазме

© Ю.А. Кропотина, А.М. Быков, А.М. Красильщиков, К.П. Левенфиш

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: kra@astro.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 21 июля 2015 г.)

Представлены результаты гибридного *particle-in-cell* моделирования ударных волн (УВ) в космической плазме с примесью тяжелых слабо заряженных ионов. Исследована зависимость релаксации ионов и структуры УВ от угла наклона магнитного поля к нормали к фронту. Указаны условия сохранения анизотропного распределения ионов по скоростям за фронтом квазиперечных УВ на масштабах, намного превышающих ширину фронта бесстолкновительной УВ, вплоть до длины кулоновской релаксации. Полученные результаты необходимы для определения эффективности нагрева тяжелых ионов и наблюдательной диагностики бесстолкновительных УВ в космической плазме.

### Введение

Исследование бесстолкновительных ударных волн (УВ) необходимо для понимания природы многих астрофизических объектов и процессов. Характерная ширина фронта бесстолкновительных УВ много меньше длины кулоновских соударений, поскольку их структура определяется коллективными взаимодействиями флуктуаций электромагнитного поля и заряженных частиц [1,2]. Бесстолкновительными являются УВ в таких космических объектах, как скопления галактик и активные ядра галактик [3], остатки сверхновых и пульсарные туманности [4–7] солнечный ветер и звездные ветры [8–10]. Согласно наблюдательным данным, химический состав указанных объектов может быть достаточно сложным, причем некоторые сорта ионов за фронтом УВ могут иметь неравновесные анизотропные распределения [11]. Вследствие этого представляет интерес изучение бесстолкновительных ударных волн в среде с несколькими сортами ионов. Для исследования таких УВ требуется самосогласованный учет динамики ионов и электромагнитного поля, что является сложной нелинейной задачей. Гибридное моделирование, в котором ионы представлены как частицы, а электроны — как безмассовая нейтрализующая жидкость, является эффективным методом исследования бесстолкновительных процессов в плазме, позволяющим моделировать области размером порядка десятков тысяч инерционных длин иона, что существенно больше электронных масштабов [12–20].

В настоящей работе представлены результаты гибридного моделирования бесстолкновительных УВ в среде, состоящей из ионов кислорода с зарядом +3, с небольшой примесью ионов кремния с зарядом +1. Подобные среды наблюдаются в оболочках остатков сверхновых звезд [21,22]. Моделирование выполнено для УВ с различными углами наклона магнитного поля к нормали к фронту. Для моделирования использован трехмерный

гибридный код второго порядка точности по времени с точным сохранением нулевой дивергенции магнитного поля, подробно описанный в работе [23]. В разд. 1 дано краткое описание используемого кода и параметров исследуемых волн. В разд. 2 представлены результаты моделирования, показана неполная релаксация небольшой примеси тяжелых слабо заряженных ионов за фронтом квазиперечных УВ с различными углами наклона магнитного поля. В разд. 3 дан анализ влияния количества модельных частиц в ячейке (*number of particles per cell*, *ppc*) на результаты гибридного моделирования.

### 1. Гибридное моделирование бесстолкновительных ударных волн

Для моделирования бесстолкновительных УВ в настоящей работе использован трехмерный гибридный код [23]. В этой модели значения электрического и магнитного полей задаются на трехмерной декартовой сетке, в ячейках которой движутся ионы. На каждом шаге по времени решается система уравнений движения и уравнений Максвелла, записанная в гибридном приближении (см., например, [13,16]). Используется приближение нулевого давления электронов, что справедливо для холодной замагниченной плазмы с отношением теплового давления к магнитному  $\beta \lesssim 1$ . Второй порядок точности по времени обеспечивается использованием метода перешагивания („leapfrog“, см., например, [15]), в котором положения и скорости частиц известны на шаге  $n$ , а значения электромагнитного поля — на шаге  $n + 1/2$ . Для автоматического сохранения нулевой дивергенции магнитного поля используется метод, основанный на методе Годунова, обобщенном для решения уравнений магнитной гидродинамики [24–26]. Он включает в себя задание значений нормальной компоненты магнитного поля на гранях ячеек и продольной компоненты электрического поля на ребрах,

параболическую реконструкцию магнитного поля внутри ячейки и решение линеаризованной задачи о распаде разрыва (Riemann solver) [24,27]. Для повышения точности при вычислении приращения электрического и магнитного полей используется дополнительное разбиение по времени [23]. Перемещение частиц в ячейках и изменение их скоростей производится посредством разложения всех членов уравнений движения в ряд Тейлора по времени, при этом для сохранения второго порядка точности производится линейная экстраполяция электрического поля на протяжении шага по времени. Экстраполяция электрического поля не позволяет использовать известный метод частиц конечного размера („макрочастиц“) [28–31] для подавления численных шумов, возникающих вследствие малости моделируемого числа частиц по сравнению с числом частиц в реальных системах. В связи с этим в настоящей работе частицы имеют точечный размер, и при вычислении токов каждая частица вносит вклад только в ту ячейку, в которой она находится. Обсуждение возможного влияния численных шумов на результаты моделирования приведено в разд. 3. Для подавления численной неустойчивости использован метод искусственного ограничения минимально возможной плотности в ячейке [16].

В связи с большой ресурсоемкостью трехмерного алгоритма используемый код адаптирован для многопроцессорного моделирования с использованием технологии message passing interface (MPI) с обменом сообщениями между процессорами (см., например, [32]). С учетом геометрии задачи (моделирование узкой протяженной области) распараллеливание осуществляется путем разделения физического пространства между несколькими процессорами. Использование параллельных вычислений позволяет на два порядка увеличить физический размер области моделирования либо повысить точность и скорость расчета.

При помощи трехмерного гибридного кода произведено моделирование бесстолкновительных УВ с альфеновским числом Маха налетающего на проводящую стенку потока  $M_A = 9$  и отношением теплового давления плазмы к магнитному  $\beta = 1$ . Предполагалось, что ударная волна распространяется в среде, состоящей из кислорода с зарядом +3 (O IV) и небольшой примеси кремния с зарядом +1 (Si II). Схожий химический состав и параметры УВ наблюдаются в оболочках некоторых остатков сверхновых звезд [21,22].

Инициализация УВ осуществлялась методом отражения сверхзвукового потока частиц, движущихся в отрицательном направлении оси  $x$ , от неподвижной проводящей стенки, расположенной в плоскости  $x = 0$ , в результате чего формировался фронт УВ, движущийся в положительном направлении оси  $x$ . Размеры области моделирования  $(x, y, z)$  составляли  $(2400 \times 1 \times 100) \times l_i$ , где  $l_i = V_A/\Omega_i$  — инерционная длина преобладающего иона,  $V_A$  — альфеновская скорость, а  $\Omega_i$  — гирочастота. На противоположном конце моделируемого пространства находилась открытая граница, где происходила

постоянная инжекция сверхзвукового потока частиц с максвелловским распределением. При этом тепловые скорости частиц разного сорта совпадали, т.е. отношение температур ионов равнялось отношению их масс. По осям  $y, z$  были заданы периодические граничные условия.

Изначально во всем моделируемом объеме было задано однородное магнитное поле, направленное в плоскости  $(xz)$  под углом  $\alpha$  к нормали к фронту. Были исследованы УВ с углами наклона магнитного поля от 0 до 90° с шагом 10°.

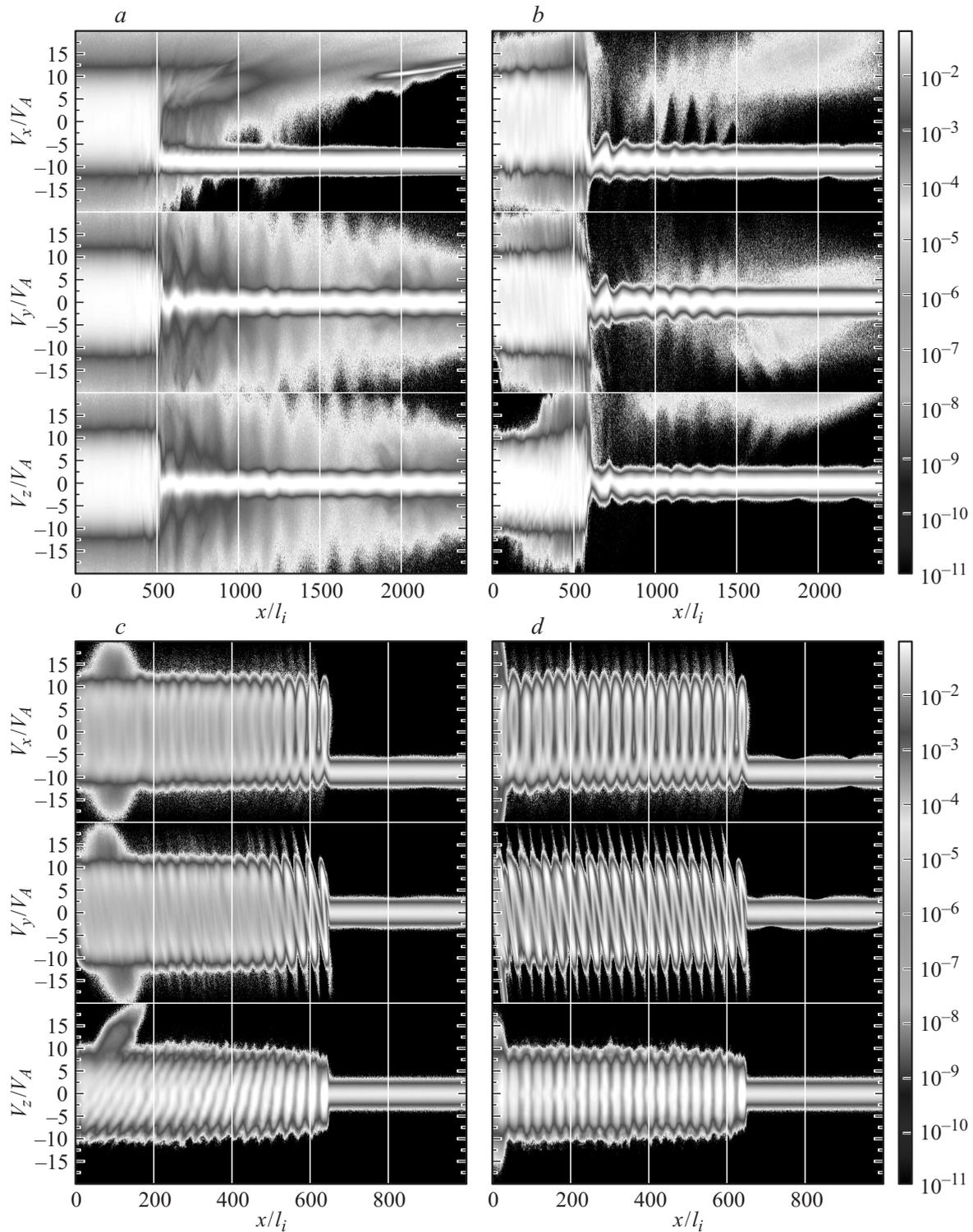
## 2. Результаты моделирования

### 2.1. Структура фазового пространства тяжелых слабо заряженных ионов в бесстолкновительных УВ

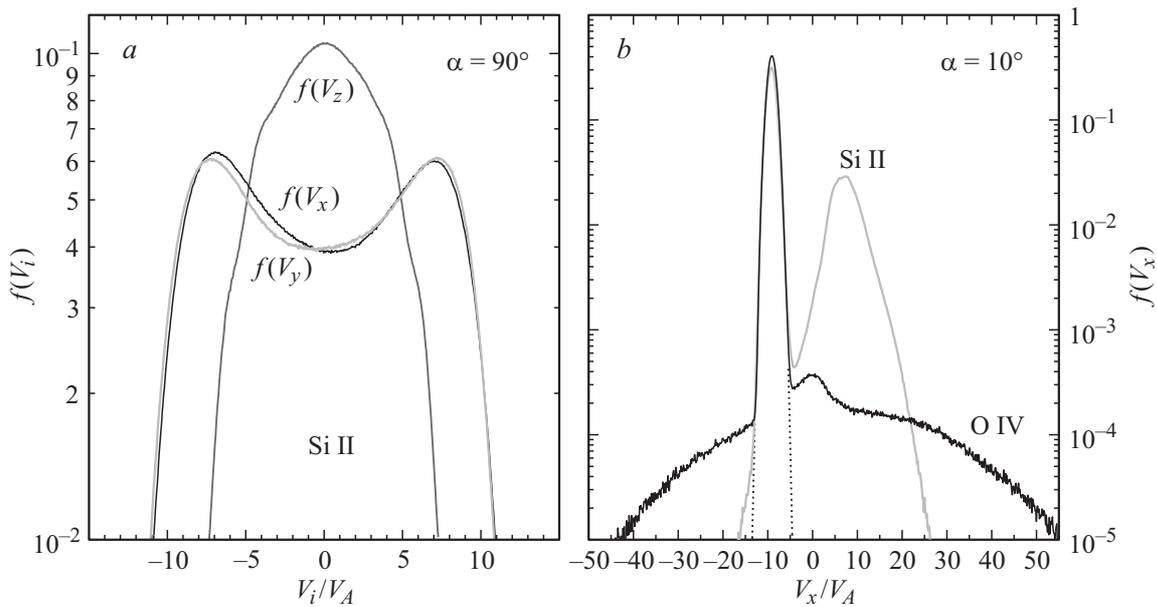
В работе [23] была показана неполная релаксация распределения тяжелых слабо заряженных ионов за фронтом квазипоперечной ( $\alpha > 50^\circ$ ) УВ при условии достаточно малого их содержания (менее 5% от общей плотности частиц) и отсутствие данного эффекта в квазипродольных волнах. На рис. 1 показан вид фазовых пространств  $V_x - x$ ,  $V_y - x$  и  $V_z - x$ , небольшой (1% по массе) примеси тяжелого слабо заряженного иона Si II на фоне преобладающего элемента O IV в ударных волнах с различными углами наклона магнитного поля к нормали к фронту. Фазовые пространства приведены для одного и того же момента времени — 200 обратных гирочастот O IV от начала инициализации УВ:  $t = 200 \cdot \Omega_i^{-1}$ . Здесь и далее длины нормированы на инерционную длину преобладающего элемента  $l_i$ , а скорости — на  $V_A$  — его альфеновскую скорость в невозмущенной плазме (далеко перед фронтом УВ). На рис. 1 можно увидеть принципиальные различия фазовых пространств иона Si II в продольной и поперечной волнах. В то же время различия среди квазипродольных волн (с углами  $0^\circ < \alpha < 50^\circ$ ) не столь значимы, равно как и различия среди квазипоперечных волн ( $50^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).

За время  $t$  продольная УВ прошла расстояние около  $500 \times l_i$ , а поперечная — около  $650 \times l_i$ . Таким образом, их средние скорости в системе покоя натекающего потока составляют  $11.5 V_A$  и  $12.3 V_A$  соответственно.

Модельные квазипродольные УВ характеризуются наличием предвестника (precursor, область перед фронтом УВ, возмущенная отраженными и ускоренными частицами), что качественно согласуется с модельными результатами других авторов [17–20,33] и с наблюдательными данными [34]. Из рис. 1, а видно, что в случае волн с малым  $\alpha$  перед фронтом волны имеется примесь отраженных и нагретых тяжелых частиц. Этот результат интересен тем, что такие частицы могут впоследствии быть инжектированы в механизм ускорения Ферми и наблюдаться вдали от источника как космические лучи [14,35,36]. Для преобладающего иона эффект предвестника также присутствует, однако



**Рис. 1.** Вид фазовых пространств небольшой примеси ионов Si II на фоне плазмы, состоящей из ионов O IV в бесстолкновительных ударных волнах с различным углом наклона магнитного поля к нормали к фронту:  $a - \alpha = 0^\circ$ ,  $b - \alpha = 50^\circ$ ,  $c - \alpha = 80^\circ$ ,  $d - \alpha = 90^\circ$  (шкала по оси  $x$  отличается для квазипродольных и квазиперечных УВ). Рисунок приведен в системе покоя отражающей стенки, расположенной в плоскости  $x = 0$ , в момент времени  $t = 200\Omega_i^{-1}$ . За это время квазипродольная УВ отходит на  $\sim 500$  инерционных длин от отражающей стенки, а квазиперечная — на расстояние  $\sim 650$  инерционных длин. Яркость пропорциональна плотности числа частиц.



**Рис. 2.** Вид усредненной по пространственным координатам функции распределения по скоростям. Панель *a*: функция распределения малой примеси ионов Si II за фронтом поперечной УВ (угол наклона к магнитному полю  $\alpha = 90^\circ$ ), усредненная по области  $x = (300-600) \times l_i$ . Панель *b*: функция распределения малой примеси ионов Si II и основной компоненты (ионов O IV) в предвестнике квазипролонгальной ударной волны ( $\alpha = 10^\circ$ ), усредненная по области  $x = (600-1000) \times l_i$ . Точками показана аппроксимация максвелловского пика.

он выражен существенно слабее. Поперечные скорости отраженных частиц обоих сортов в предвестнике испытывают квазипериодические возмущения, близкие к гармоническим. Пространственный масштаб (период) возмущений одинаков для обоих сортов; он несколько варьируется в пределах моделируемой области и составляет около 120–180 инерционных длин иона O IV. При этом возмущения скорости основного сорта и примеси находятся в противофазе, т.е. в заданный момент времени разные сорта отраженных частиц движутся в противоположных направлениях по обеим осям —  $y$  и  $z$ . Амплитуда возмущений скорости основного сорта частиц в предвестнике одинакова на протяжении всей области моделирования, в то время как возмущения скорости примеси затухают с удалением от фронта.

Для оценки влияния тяжелых частиц на процесс генерации основной плазмой флуктуаций поля в предвестнике квазипролонгальных волн мы сравнили профили поля в предвестнике при наличии и отсутствии тяжелой компоненты. Сравнение показало, что присутствие ионов кремния не влияет на период флуктуаций поля, хотя несколько уменьшает их амплитуду.

На верхних панелях рис. 1 также видны отраженные в предвестник частицы примеси. Они имеют малый тепловой разброс и положительную скорость  $V_x$ . За время, прошедшее с момента инициализации УВ, в область, наиболее удаленную от фронта, успевают проникнуть только самые быстрые частицы примеси, поэтому частиц с малыми скоростями вдали от фронта почти не наблюдается. Поскольку фазовое пространство

изображено в системе покоя отражающей стенки, в конце области моделирования скорость быстрых частиц превышает скорость налетающего потока на величину порядка скорости движущейся УВ.

На рис. 2, *b* приведена функция распределения малой примеси ионов Si II и основной компоненты (ионов O IV) в предвестнике квазипролонгальной УВ ( $\alpha = 10^\circ$ ). Для обоих сортов ионов в распределении доминирует тепловой (максвелловский) пик, соответствующий  $V_x = -9V_A$ .

За фронтом квазипролонгальных УВ происходит сравнительно быстрая изотропизация распределения как фоновой плазмы, так и примеси. Сопоставив три панели рис. 1, *a*, можно заметить, что разброс тяжелых ионов по скоростям одинаков по всем трем пространственным измерениям. Более того, распределения становятся близкими к максвелловскому, т.е. симметричными, с одним максимумом.

В то же время за фронтом квазипоперечных УВ распределение Si II остается анизотропным с выделенным направлением вдоль магнитного поля (по оси  $z$ ), см. рис. 1, *c, d*. Фазовое пространство имеет сложную квазипериодическую структуру с пространственным периодом около 30 инерционных длин кислорода. Для строго поперечной УВ эта структура не меняется на протяжении всей области моделирования, в то время как для углов  $\alpha < 90^\circ$  с удалением от фронта квазипериодическая структура замывается и фазовое пространство становится более однородным в первую очередь поперек поля. При этом сохраняется анизотропия

распределения по скоростям: разброс скоростей вдоль поля в полтора-два раза меньше разброса поперечных скоростей. Распределение поперечных скоростей приобретает характерную двухпотоковую форму, практически одинаковую в каждой точке. Непосредственно за фронтом форма распределения пространственно переменна, но при усреднении по пространственным координатам имеет ту же форму, что и в области замытия. Пример такого распределения приведен на рис. 2, *a* для строго поперечной волны. Распределение усреднено по области  $400l_i < x < 700l_i$  и по всему поперечному сечению в тот же момент времени — 200 обратных гирочастот от инициализации УВ, в который были построены фазовые пространства, представленные на рис. 1. Это распределение имеет схожий вид для всех углов  $\alpha > 50^\circ$ .

Угол  $\alpha = 50^\circ$  является переходным, УВ, распространяющаяся под таким углом к полю, сочетает в себе особенности обоих типов волн: наличие предвестника как у квазипродольной волны и неполную релаксацию тяжелого слабо заряженного иона как у квазипоперечной волны, хотя симметричные максимумы усредненной формы распределения в этом случае менее выражены.

Еще одна особенность поведения тяжелых ионов за фронтом квазипоперечных УВ состоит в том, что за фронтом таких волн имеются области, где практически отсутствуют частицы, летящие в направлении фронта, в то время как частицы, летящие от фронта, имеются в каждой точке.

## 2.2. Профили магнитного поля в бесстолкновительных УВ

В бесстолкновительной плазме релаксация распределения частиц происходит за счет коллективных взаимодействий с флуктуациями магнитного поля, поэтому для понимания механизма релаксации необходимо исследовать поведение магнитного поля в бесстолкновительных УВ. На рис. 3 приведены профили магнитных полей  $B_y$  и  $B_z$ , усредненных по поперечному к направлению распространения волны сечению моделируемой области (среднее по поперечному сечению значение  $B_x$  постоянно вследствие сохранения дивергенции магнитного поля). Сравнение этих рисунков снова показывает принципиальное отличие квазипродольных УВ от квазипоперечных, выраженное, во-первых, в наличии предвестника, во-вторых — в гораздо более протяженной области сильных флуктуаций за фронтом. Пространственный период квазигармонических флуктуаций поля в предвестнике квазипродольных УВ совпадает с периодом колебаний скорости частиц в этой области (ср. рис. 1, *a, b* и рис. 3).

Здесь следует также отметить наличие области вблизи отражающей стенки, где возникают нефизические граничные эффекты. В работе [23] подробно обсуждалось влияние граничных условий на результаты моделирования бесстолкновительных УВ. Было показано, что в

случае квазипоперечных УВ моделирование демонстрирует устойчивые результаты при различных способах задания граничных условий. С другой стороны, расчет структуры квазипродольной УВ, инициированной отражением от проводящей стенки существенно зависит от условий на этой стенке [23]. Это связано с существенно большей протяженностью структуры фронта квазипродольной УВ. Поэтому результаты, касающиеся квазипродольных УВ, должны рассматриваться с оговоркой, что инициализация УВ методом отражения от проводящей стенки при ограниченной области моделирования может не в полной мере описывать реальную структуру УВ.

В то же время задачей настоящей работы является изучение эффектов релаксации ионов за фронтом бесстолкновительной УВ для создания методов спектроскопической диагностики УВ в космической плазме. Ионы в процессе релаксации в УВ испытывают множественные взаимодействия с флуктуирующими полями, и поэтому функции распределения ионов чувствительны к усредненным характеристикам этих полей. В случае квазипродольной УВ релаксация изначально анизотропного распределения ионов оказывается существенно более сильной, чем в квазипоперечной УВ, и слабо зависящей от детального характера инициализации. Это обусловлено особенностями спектра флуктуаций и протяженной структурой квазипродольной УВ.

## 3. Влияние числа частиц в ячейке на результаты моделирования

Одним из важных параметров моделирования является число частиц в ячейке ( $ppc$  — „number of particles per cell“). С одной стороны, тот факт, что модельное число частиц на много порядков меньше числа частиц в реальных физических системах, является причиной численных шумов. Увеличение числа частиц в ячейке сглаживает этот эффект. С другой стороны, большое число частиц в ячейке делает расчет чересчур ресурсоемким и налагает ограничения на размер моделируемой области. Таким образом, в расчетах необходимо использовать оптимальное число частиц, при котором численные шумы не слишком сильно влияют на результат моделирования. Для определения этого оптимального числа было произведено моделирование с различным числом частиц в ячейке и одинаковыми начальными параметрами системы. Для значений  $ppc = 6, 12, 25, 50, 100, 200$  проведено сравнение результирующих профилей магнитного поля, фазовых пространств обоих ионов и формы распределения тяжелого иона по скоростям. Было выявлено, что для квазипоперечных УВ при малых значениях  $ppc$  отличалась скорость фронта и среднее значение магнитного поля за фронтом, т.е., численные шумы влияли на макроскопические параметры системы, делая некорректным использование числа частиц в ячейке меньше 50. В то же время разница профилей поля для  $ppc = 100$  и

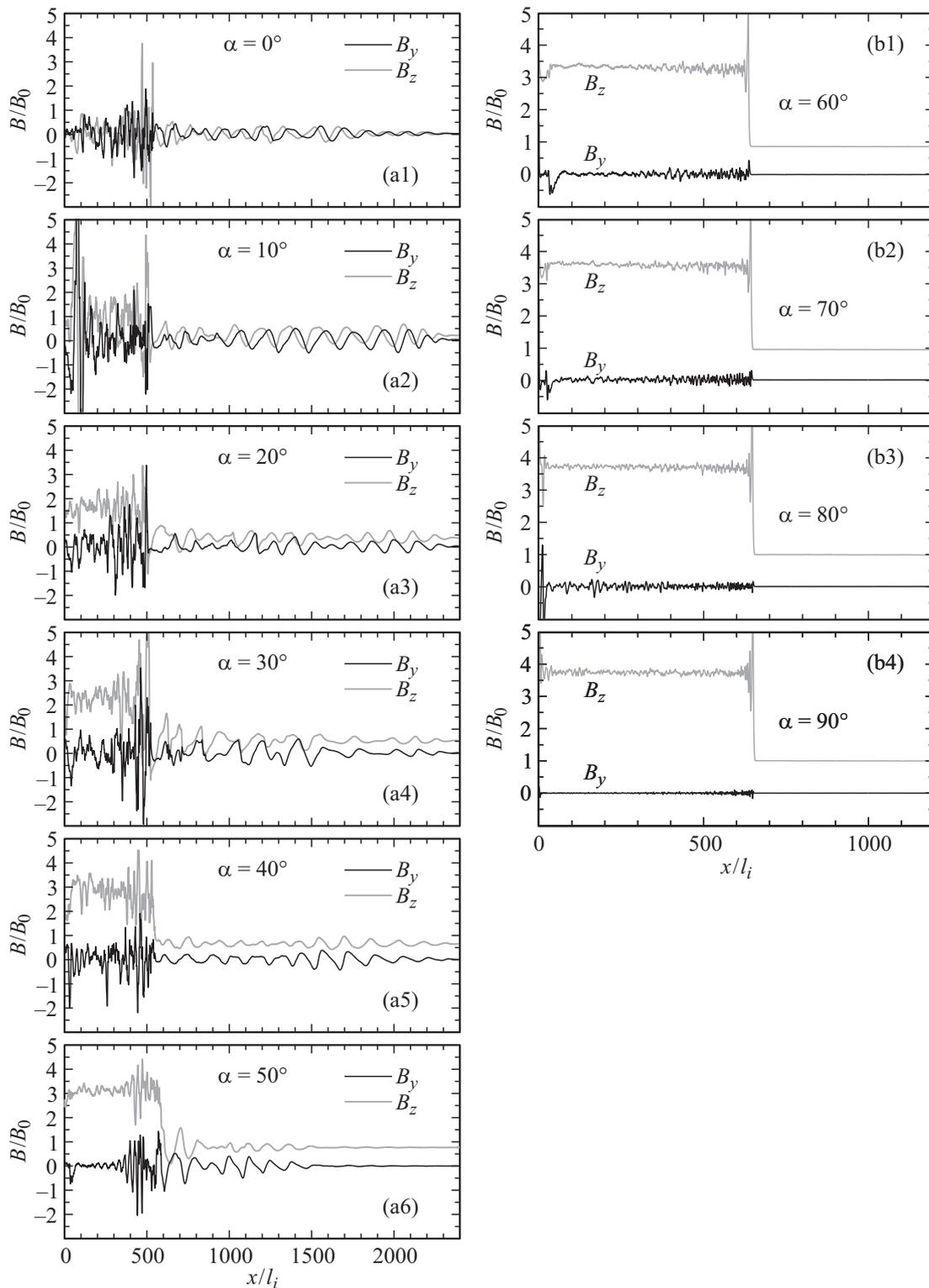


Рис. 3. Профили магнитного поля  $B_y$  и  $B_z$  за фронтом и в предвестнике квазипродольных и квазиперечных ударных волн.

$prc = 200$  была пренебрежимо мала (что демонстрирует сходимость алгоритма). Следует отметить, что полная релаксация тяжелых слабо заряженных ионов за фронтом квазиперечных УВ не происходила даже в случае  $prc = 6$ , но их распределение по скоростям

в этом случае было более изотропным и близким к максвелловскому за счет дополнительной релаксации на численных флуктуациях.

Результаты расчетов, представленные в разд. 2 настоящей работы, получены при значении  $prc = 200$ .

Здесь следует подчеркнуть, что в связи с использованием линейной аппроксимации электрического поля модельные частицы имеют точечный размер, что требует наличия относительно большого числа частиц в ячейке. В работах [28,30] приведены расчеты, согласно которым метод частиц конечного размера („*cloud-in-cell*“) позволяет существенно уменьшить численные шумы и соответственно использовать в программе меньшее число частиц (впрочем, метод *cloud-in-cell* сам по себе является достаточно ресурсоемким, особенно в трехмерном случае). Однако расчеты эффективности метода частиц конечного размера проводились для кулоновских сил в плазме, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. Кулоновское поле, квадратично возрастающее вблизи частицы, очень чувствительно к численным шумам, поскольку когда одна из точечных модельных частиц покидает ячейку, на границе происходит резкое изменение электрического поля. В этом случае метод частиц конечного размера эффективно сглаживает возникающие численные шумы за счет представления частицы в виде облака с распределенным зарядом. Возможно, для случая коллективных взаимодействий в бесстолкновительных УВ такая методика не столь эффективна. Этот факт требует проверки и находится за пределами темы данной работы. Кроме того, любое сглаживание может приводить к нежелательным нефизическим эффектам в области разрыва на фронте УВ.

## Заключение

При помощи оригинального трехмерного гибридного кода произведено моделирование бесстолкновительных УВ в двухкомпонентной плазме с различным углом наклона магнитного поля к нормали к фронту. Результаты моделирования показывают неполную релаксацию малой примеси тяжелых слабо заряженных частиц в квазиперпендикулярном случае. Исследование профилей магнитного поля позволяет предположить отсутствие релаксации распределения тяжелых ионов вплоть до кулоновских масштабов в случае больших углов наклона магнитного поля к нормали. Толща, проходящая частицей до спитцеровской релаксации, составляет  $N_H \approx 5 \cdot 10^{17} v_7^4 [\ln \Lambda]^{-1} \text{ cm}^{-2}$ , где  $v_7$  — скорость УВ в единицах 100 km/s, а  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм [37]. Эффект неполной релаксации может быть весьма важен для интерпретации оптического и ультрафиолетового излучения тяжелых ионов в окрестности астофизических УВ.

В работе также исследованы различия структуры квазипродольных и квазиперпендикулярных УВ, в том числе наличие в квазипродольных УВ предвестника с популяцией отраженных частиц.

Для оценки достоверности результатов проведено исследование влияния числа модельных частиц в ячейке на результаты моделирования и выбрано оптимальное значение этого числа.

## Список литературы

- [1] *Sagdeev R.Z.* // Rev. Plasma Phys. 1966. Vol. 4. P. 23–48.
- [2] *Treumann R.A.* // Astron. Astroph. Rev. 2009. Vol. 19. P. 409–535.
- [3] *Bykov A.M., Dolag K., Durret F.* // Space Sci. Rev. 2008. Vol. 134. P. 119–140.
- [4] *Korreck K.E., Raymond J.C., Zurbuchen T.H., Ghavamian P.* // ApJ. 2004. Vol. 615. P. 280–285.
- [5] *Broersen S., Vink J., Miceli M. et al.* // Astron. and Astrophys. Volume 552. id.A9. P. 6.
- [6] *Raymond J.C., Ghavamian P., Sankrit R.* // ApJ. 2003. Vol. 594. P. 770–781.
- [7] *Vink J.* // Astron. Astrophys. Rev. 2012. Vol. 20. P. 49.
- [8] *Tylka A.J., Malandraki O.E., Dorrian G. et al.* // Solar Physics. 2013. Vol. 285. N 1–2. P. 251–267.
- [9] *Cummings A.C., Stone E.C.* // Space Sci. Rev. 2007. Vol. 130. P. 389–399.
- [10] *Korreck K.E., Zurbuchen T.H., Lepri S.T., Raines J.M.* // ApJ. 2007. Vol. 659. N 1. P. 773–779.
- [11] *Lee L.C., Wu B.H.* // ApJ. 2000. Vol. 535. P. 1014–1026.
- [12] *Winske D.* // Space Sci. Rev. 1985. Vol. 42. P. 53–66.
- [13] *Matthews Alan P.* // J. Comput. Phys. Vol. 112. P. 102–116.
- [14] *Bennett L., Ellison D.C.* // Journal of Geophysical Research. 1995. Vol. 100. P. 3439–3448.
- [15] *Lipatov A.S.* The hybrid multiscale simulation technology. Berlin: Springer, 2002. 403 p.
- [16] *Gargaté L., Bingham R., Fonseca R.A., Silva L.O.* // Computer Phys. Commun. 2007. Vol. 176. P. 419–425.
- [17] *Caprioli D., Spitkovsky A.* // ApJ. 2014. Vol. 783. N 2. P. 91.
- [18] *Caprioli D., Spitkovsky A.* // ApJ. 2014. Vol. 794. N 1. P. 46.
- [19] *Caprioli D., Spitkovsky A.* // ApJ. 2014. Vol. 794. N 1. P. 47.
- [20] *Caprioli D.* // Nuclear Phys. 2014. Vol. 256. P. 48–55.
- [21] *Hamilton A.J.S., Fesen R.A.* // ApJ. 1988. Vol. 327. P. 178–196.
- [22] *Hamilton A.J.S., Fesen R.A., Blair W.P.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2007. Vol. 381, P. 771–778.
- [23] *Кропотина Ю.А., Быков А.М., Густов М.Ю., Красильщиков А.М., Левенфиш К.П.* // ЖТФ. 2014. Т. 85. Вып. 2. С. 73–81.
- [24] *LeVeque R.J., Mihalas D., Dorfi E.A., Muller E.* Computational methods for Astrophysical Fluid Flow. Berlin: Springer, 1997. 481 p.
- [25] *Годунов С.К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [26] *Balsara D.S.* // ApJS. 2004. Vol. 151. P. 149–184.
- [27] *Balsara D.S.* // ApJS. 1998. Vol. 116. P. 119–131.
- [28] *Hockney R.W.* // J. Comput. Phys. 1971. Vol. 8. P. 19–44.
- [29] *Dawson J.M.* // Rev. Mod. Phys. 1983. Vol. 55. P. 403–447.
- [30] *Abe H., Natsuhiko S., Ryohei I.* // J. Comput. Phys. 1986. Vol. 63. P. 247–267.
- [31] *Prüchett P. L.* / Ed. by Büchner J., Dum C.T., Scholer M. // Space Plasma Simulation. 2001. P. 1.
- [32] *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб: БХВ-Санкт-Петербург, 2002. 608 с.
- [33] *Burgess D., Scholer M.* // Space Sci. Rev. 2013. Vol. 178. P. 513–533.
- [34] *Lee J.-J., Raymond J.C., Park S. et al.* // ApJL. 2010. Vol. 715. P. L146–L149.
- [35] *Jones F.C., Ellison D.C.* // Space Sci. Rev. 1991. Vol. 58. P. 259–346.
- [36] *Caprioli D., Pop A.-R., Spitkovsky A.* // ApJL. 2015. Vol. 798. N 2. L. 28.
- [37] *Bykov A.M., Paerels F.B.S., Petrosian V.* // Space Sci. Rev. 2008. Vol. 134. P. 141–153.