01

# Соотношения взаимности для нелинейной плазмоподобной среды в магнитном поле

© В.К. Игнатьев, А.А. Орлов, С.В. Перченко

Волгоградский государственный университет
E-mail: orlwork@inbox.ru

Поступило в Редакцию 27 августа 2015 г.

Рассмотрен вопрос нелинейной взаимности плазмоподобной среды в однородном магнитном поле, описываемой уравнением Власова в релаксационном приближении. Доказаны соотношения взаимности для тензора нелинейной проводимости. Обоснован метод повышения точности нелинейных устройств функциональной электроники на основе полученных соотношений взаимности.

Явления, при которых наблюдается взаимодействие между перекрестными процессами переноса, изучаются давно. В 1854 г. Кельвин исследовал термоэлектрический эффект, возникающий при одновременном протекании электрического тока и тепла, и получил первые соотношения взаимности, исходя из термодинамических аргументов. Подобные соотношения в 1876 г. получил Гельмгольц при исследовании процессов переноса в электролитах, а позднее Истман (1926 г.) для диффузионного и теплового потоков [1]. Общую теорию построил в 1931 г. Ларс Онзагер, за которую в 1968 г. получил Нобелевскую премию.

Соотношения взаимности Онзагера являются фундаментальными и справедливы не только в термодинамике. Например, в механике они выражены в принципе взаимности перемещений — теореме Максвелла [2]. Принцип взаимности широко используется в акустике [3], при расчете и измерении характеристик приемных антенн [4], а также для повышения точности магнитных измерений [5].

Соотношения Онзагера симметрии кинетических коэффициентов [6] получены в линейном приближении исходя из инвариантности макроскопического движения относительно обращения времени и предположения о том, что средняя релаксация спонтанных флуктуаций в системе происходит в соответствии с макроскопическими законами. В частном случае плазмоподобных сред, к которым относится и коллектив носителей заряда в полупроводниках, в современной нелинейной электродинамике достаточно развито построение теории нелинейной проницаемости на основе решения кинетических уравнений методом разложения по степеням электромагнитного поля [7], однако соотношения взаимности для полученных восприимчивостей при этом не рассматриваются. В ряде работ [8] приводятся без вывода аналогичные соотношения взаимности высшего порядка в нелинейных средах для частных случаев, но влияние магнитного поля на соотношения взаимности не рассматриваются.

Вопрос взаимности нелинейных магнитоактивных устройств функциональной электроники ранее не рассматривался. В общем случае эта задача, видимо, неразрешима, поскольку при нелинейной связи между силами и порождаемыми ими потоками общие статистические методы обоснования соотношений взаимности вообще неприменимы [7]. Даже для линейных систем в термодинамике неравновесных процессов соотношения взаимности постулируются [9] и иногда рассматриваются как четвертое начало термодинамики. Представляют несомненный интерес магнитоактивные плазмоподобные среды, в которых динамика носителей заряда описывается кинетическим уравнением в релаксационном приближении. Задачей данной работы является получение соотношений взаимности для матрицы квазилинейной проводимости нелинейной среды, находящейся в слабом магнитном поле.

Процессы переноса в релаксационном приближении описываются кинетическим уравнением Больцмана, которое для среды, находящейся в электрическом и магнитном полях, принимает вид уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \qquad (1)$$

Здесь $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функция распределения носителей заряда (электронов или дырок) по координатам $\mathbf{r}$ и импульсам $\mathbf{p}$, $f_0$ — равновесная функция распределения, $q$ — заряд носителя, $\tau$ — среднее по ансамблю время релаксации. Для стационарной, однородной и изотропной среды будем искать решение уравнения (1) в виде $f(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}) f_0(\mathbf{p})$, где $f_0(\mathbf{p}) = C \exp[-p^2/(2mkT)]$ — равновесная функция распределения в отсутствие электрического и магнитного полей, в которой $C$ — нормировочный множитель, $m$ — эффективная масса носителей заряда $q$, $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура носителей заряда, тогда

$$(m\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{B}) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\mathbf{pE}}{kT} - \frac{1}{\beta} \right) F + \frac{1}{\beta}, \tag{2}$$

где $\beta = q\tau/m$ — подвижность носителей заряда $q$.

Перейдем к новым переменным. Рассмотрим случай, когда магнитное и электрическое поля постоянные, однородные, не сонаправлены и отличны от нуля. Пусть

$$\xi_1 = \mathbf{pE}, \quad \xi_2 = \mathbf{pB}, \quad \xi_3 = p^2. \tag{3}$$

Выразим импульс как функцию полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а также переменных (3)

$$\mathbf{p} = \frac{B^2\xi_1 - \mathbf{EB}\xi_2}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \mathbf{E} + \frac{E^2\xi_2 - \mathbf{EB}\xi_1}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \mathbf{B}$$

$$+ \frac{\sqrt{\xi_3|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_2\mathbf{E} + \xi_1\mathbf{B})^2}}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \mathbf{B} \times \mathbf{E}. \tag{4}$$

Преобразования (3)−(4) взаимно однозначны в области $V$

$$(\xi_2\mathbf{E} + \xi_1\mathbf{B})^2 \leqslant \xi_3|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{E} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \mathbf{B} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + 2\mathbf{p} \frac{\partial F}{\partial \xi_3}. \tag{6}$$

Тогда уравнение (2) преобразуется к виду

$$\left( mE^2 + \sqrt{\xi_3|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_2\mathbf{E} + \xi_1\mathbf{B})^2} \right) \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + m\mathbf{EB} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + 2m\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_3}$$

$$= \left( \frac{\xi_1}{kT} - \frac{1}{\beta} \right) F + \frac{1}{\beta}. \tag{7}$$

Дополнительное условие к уравнению (7) можно получить из физических соображений. В отсутствие электрического поля $\xi_1 = 0$, а функция распределения электронов по импульсам определяется только магнитным полем. Для изотропной среды эта функция не должна зависеть от направления магнитного поля, т. е. $f(\mathbf{p}, \mathbf{E} = 0, -\mathbf{B}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B})$, как следует из (2) при $\mathbf{E} = 0$. Поскольку функция распределения является скаляром, она может зависеть только от скалярных аргументов. В нулевом электрическом поле такими скалярами являются $p^2$ и $\mathbf{pB}$. Поэтому с учетом соотношений (3)

$$F(0, \xi_2, \xi_3 \geqslant 0) = \Phi(\xi_2, \xi_3), \tag{8}$$

где $\Phi(\xi_2, \xi_3)$ — заданная (известная) функция.

Уравнение в частных производных первого порядка (7) с дополнительным условием (8) имеет единственное решение в области $V$ (5) [10]. Заметим, что в уравнении (3) переменные $\xi_1$, $\xi_2$ линейно зависят от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, но в уравнении (7) они рассматриваются как независимые переменные, через которые выражаются компоненты импульса $\mathbf{p}$ (4). Поэтому при изменении знака полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ переменные $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ в уравнениях (7) и (8) не меняются, и $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = F(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B})$, $\Phi(\xi_2, \xi_3, -\mathbf{B}) = \Phi(\xi_2, \xi_3, \mathbf{B})$. Из уравнения (4) следует, что

$$p^2 = \frac{(B^2\xi_1 - \mathbf{EB}\xi_2)^2}{|\mathbf{B}\times\mathbf{E}|^4} E^2 + \frac{(E^2\xi_2 - \mathbf{EB}\xi_1)^2}{|\mathbf{B}\times\mathbf{E}|^4} B^2$$
$$+ \frac{(B^2\xi_1 - \mathbf{EB}\xi_2)(E^2\xi_2 - \mathbf{EB}\xi_1)}{|\mathbf{B}\times\mathbf{E}|^4} (\mathbf{EB})^2 + \frac{\xi_3|\mathbf{B}\times\mathbf{E}|^2 - |\xi_2\mathbf{E} + \xi_1\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{B}\times\mathbf{E}|^2}.$$

Равновесная функция распределения $f_0$ не зависит от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, следовательно

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{9}$$

Кроме того, хотя при изменении знака полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ изменяются компоненты импульса $\mathbf{p}$, якобиан $J(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ преобразования (4) не меняется. Действительно, с учетом формулы (3) получаем

$$J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \left(\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}\right)^{-1}$$
$$= \left\{\det\begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ 2p_1 & 2p_2 & 2p_3 \end{pmatrix}\right\}^{-1}$$
$$= \frac{1}{2\mathbf{p}[\mathbf{B}\times\mathbf{E}]} = \frac{1}{2\sqrt{\xi_3|\mathbf{B}\times\mathbf{E}|^2 - |\xi_2\mathbf{E} + \xi_1\mathbf{B}|^2}}.$$

Таким образом,

$$J(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = J(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{10}$$

Тогда для полного тока с учетом формулы (4) и обозначения $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ получим выражение

$$j_i = \iiint qn \frac{p_i}{m} f(\mathbf{p}) d^3 p = qn \frac{E_i/m}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2}$$
$$\times \iiint_V \{B^2 \xi_1 - \mathbf{EB}\xi_2\} f(\xi)|J(\xi)| d^3\xi$$
$$+ qn \frac{B_i/m}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \{E^2 \xi_2 - \mathbf{EB}\xi_1\} f(\xi)|J(\xi)| d^3\xi$$
$$+ qn \frac{\varepsilon_{ijk} E_j B_k/m}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - (\xi_1 \mathbf{E} + \xi_2 \mathbf{B})^2} f(\xi)|J(\xi)| d^3\xi$$
$$= K_1 B^2 E_i - K_2 B_j E_i E_j + K_2 B_i E_j E_j - K_1 B_i B_j E_j + K_3 \varepsilon_{ijk} B_k E_j,$$

где $\varepsilon_{ijk}$ — единичный антисимметричный тензор (символ Леви–Чивиты),

$$K_1(E, B, \mathbf{EB}) = \frac{qn/m}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \xi_1 f(\xi)|J(\xi)| d^3\xi,$$

$$K_2(E, B, \mathbf{EB}) = \frac{qn/m}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \xi_2 f(\xi)|J(\xi)| d^3\xi,$$

$$K_3(E, B, \mathbf{EB}) = \frac{qn/m}{|\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2} \iiint_V \sqrt{\xi_3 |\mathbf{B} \times \mathbf{E}|^2 - |\xi_1 \mathbf{E} + \xi_2 \mathbf{B}|^2} f(\xi)|J(\xi)| d^3\xi,$$

и по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Из формул (4), (8), (9) и (10) следует, что

$$K_i(-\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = K_i(\mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

Таким образом, для нелинейной проводимости $\sigma_{ij}$, определяемой уравнением $j_i = \sigma_{ij} E_j$, где по индексу $j$ предполагается суммирование, получаем

$$\sigma_{ij}(\mathbf{E},\mathbf{B}) = \delta_{ij}\{K_2(\mathbf{E},\mathbf{B})B^2 - K_1(\mathbf{E},\mathbf{B})\mathbf{EB}\}$$
$$+ K_1(\mathbf{E},\mathbf{B})B_iE_j - K_2(\mathbf{E},\mathbf{B})B_iB_j + \varepsilon_{ijk}K_3(\mathbf{E},\mathbf{B})B_k. \tag{11}$$

Если ввести вектор

$$\tilde{j}_i(\mathbf{E},\mathbf{B}) = \{j_i(\mathbf{E},\mathbf{B}) + j_i(-\mathbf{E},-\mathbf{B})\}/2 = \{\sigma_{ij}(\mathbf{E},\mathbf{B})$$
$$- \sigma_{ij}(-\mathbf{E},-\mathbf{B})\}E_j/2 = \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{E},\mathbf{B})E_j, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{E},\mathbf{B}) = \{\sigma_{ij}(\mathbf{E},\mathbf{B}) - \sigma_{ij}(-\mathbf{E},-\mathbf{B})\}/2, \tag{13}$$

то

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{E},\mathbf{B}) = \tilde{\sigma}_{ji}(-\mathbf{E},-\mathbf{B}). \tag{14}$$

Таким образом, для квазипроводимости (13) выполняется классическое соотношение взаимности (14). Распределение токов (12), являющееся суперпозицией токов при противоположных направлениях электрического поля, может быть получено объединением результатов работы гальваномагнитного элемента функциональной электроники в различных режимах.

Уравнение (14) получено в релаксационном приближении из кинетического уравнения Власова (1) и справедливо для плазмоподобных сред, описываемых этим уравнением. Заметим, что вытекающее из уравнения Власова (1) уравнение (2) с учетом уравнения (3) в нулевом электрическом поле имеет вид

$$\frac{1-F}{\beta} = [\mathbf{p}\times\mathbf{B}]\left(\frac{\partial E}{\partial \xi_2}\,\mathbf{B} + 2\,\frac{\partial F}{\partial \xi_3}\,\mathbf{p}\right) = 0,$$

т. е. $F(\mathbf{p}, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B}) \equiv 1$.

Следовательно, из уравнения Власова (1) вытекает, что в отсутствие электрического поля магнитное поле не возмущает функцию распределения стационарной и однородной плазмоподобной среды. Это условие выполняется далеко не для всех систем. В сверхсильных магнитных полях и пренебрежимо малом электрическом поле, когда циклотронная частота $\omega_c = qB/m$ больше частоты столкновений $\nu = 1/\tau$, создается преимущественное движение носителей в направлении вектора $\mathbf{B}$.

Поэтому релаксационное приближение (1) неприменимо в магнитном поле, большем, чем $B_C = m/(q\tau) = 1/\beta$. Для полупроводников характерное значение $B_C$ составляет порядка 200 mT. Соотношения взаимности для нелинейной среды в более сильных магнитных полях требуют специального рассмотрения.

Таким образом, формула (14) показывает, что классические соотношения взаимности [6] выполняются для стационарной, однородной и изотропной плазмоподобной среды, находящейся во внешнем однородном магнитном поле даже при наличии нелинейности. Они могут применяться для повышения точности диагностики магнитосферы [11] и оптимизации режимов работы элементов функциональной электроники [12]. Из формулы (14) следует, что способ уменьшения погрешностей холловского магнитометра, основанный на использовании линейных соотношений взаимности в скрещенных полях [5], будет справедлив и для высокочувствительного преобразователя Холла с нелинейной вольт-амперной характеристикой. Это позволит повысить точность магнитных измерений в задачах магнитного микроструктурного анализа и неразрушающего контроля [13].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 15-19-00028 „Разработка методики магнитного структурного анализа и гибридной экспертной системы оперативной технической диагностики металлических изделий в геомагнитном поле“.

## Список литературы

[1] *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 288 с.
[2] *Barber J.R.* Elasticity. Springer Science and Business Media. 2010.
[3] *Fahy F.J., Gardonio P.* Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response. Elsevier, 2007.
[4] *Марков Г.Т., Сазонов Д.М.* Антенны. М.: Энергия, 1975. 528 с.
[5] *Голубев А.А., Игнатьев В.К., Никитин А.В.* // Приборы и техника эксперимента. 2008. № 5. С. 123–128.
[6] *Onsager L.* // Phys. Rev. 1931. V. 37. P. 405–426.
[7] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
[8] *Файн В.М., Ханин Я.И.* Квантовая радиофизика. М.: Сов. радио, 1965. 606 с.

[9] *Де Гроот С.Р.* Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956. 281 с.
[10] *Evans L.* Partial Differential Equations. AMS. Providence, 1998.
[11] *Гульельми А.В., Троицкая В.А.* Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. М.: Наука, 1973. 208 с.
[12] *Игнатьев А.В., Ляшенко А.В.* Магнитоэлектроника СВЧ-, КВЧ-диапазонов в пленках ферритов. М.: Наука, 2005. 380 с.
[13] *Reutov Yu.Ya., Shcherbinin V.E., Volkov A.V.* // Russian J. Nondestructive Testing. 2014. V. 50. N 12. P. 760–768.