

03

## Границы области неоднозначности при отражении скачков уплотнения

© П.В. Булат<sup>1</sup>, В.В. Упырев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Университет информационных технологий, механики и оптики,  
Санкт-Петербург  
E-mail: pavelbulat@mail.ru

Поступило в Редакцию 22 июля 2015 г.

Косые скачки уплотнения могут отражаться от твердых стенок, оси или плоскости симметрии, а также других скачков противоположного направления с образованием регулярных и маховских ударно-волновых конфигураций. Конкретный вид ударно-волновых структур определяется параметрами задачи: числом Маха и интенсивностью приходящих скачков. На плоскости параметров существует область неоднозначности, в которой законы сохранения допускают как регулярное, так и маховское отражение скачков. Определены границы этой области.

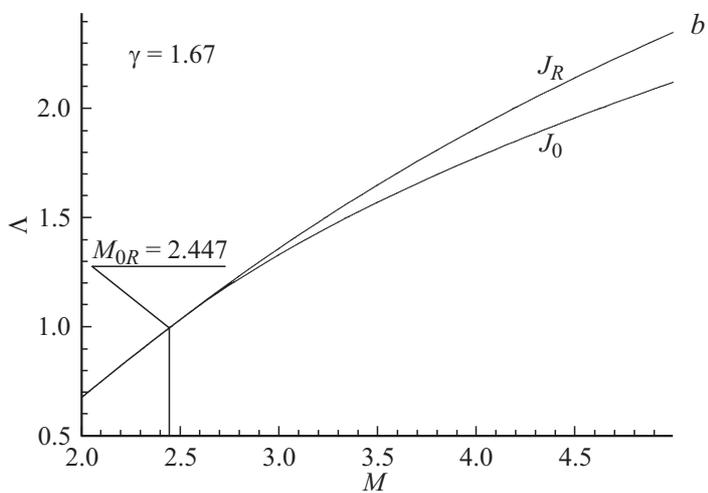
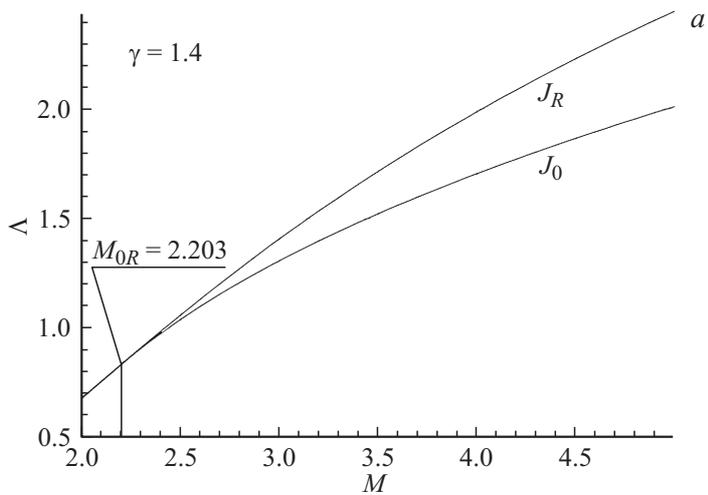
С начала 90-х гг. XX в. активизировались исследования в области создания летательных аппаратов с воздушно-реактивным двигателем, рассчитанные на высокие сверхзвуковые скорости полета. Это потребовало разработки воздухозаборников нового типа, в которых используется внутреннее отражение скачков уплотнения от стенок, а также пересечение скачков уплотнения противоположных направлений (встречных скачков уплотнения). Первые же исследования выявили существенные особенности работы таких воздухозаборников, отличающие их от воздухозаборников внешнего сжатия, в которых применяются скачки уплотнения одного направления. Был обнаружен гистерезис при изменении числа Маха потока, а также при изменении углов клина воздухозаборника, т.е. при одних и тех же параметрах оказалось возможным существование ударно-волновых структур (УВС) двух различных типов. То, какая из УВС реализуется, зависит от предыстории течения, т.е. от направления изменения параметров задачи: числа Маха  $M$ , а также угла клина  $\beta$ , который определяет угол наклона скачка  $\sigma$  и его интенсивность  $J$ , под которой обычно понимают отношение давления за скачком  $P_1$  к давлению перед скачком  $P$ .

Наибольший вклад в изучение этого важного для практики феномена внесли Е.И. Васильев [1], сотрудники ИТМП СО АН: Т. Ельперин, М.С. Иванов, А.Н. Кудрявцев, Д.В. Хотяновский [2,3], а также Ben-Dor G. [4]. Путем сравнения результатов численных расчетов с экспериментом ими было показано, что переход от регулярного отражения (РО) к маховскому отражению (МО) и обратно, в зависимости от направления изменения  $M$  и  $\beta$ , происходит в условиях, близких к двум критериям, сформулированным von Neumann: „критерию отсоединения“ (criterion detaching) [5] и „критерию механического равновесия“ (mechanical equilibrium), последний позднее был назван В.Н. Усковым „критерием стационарной маховской конфигурации (СМК)“ [6–8]. Интенсивность приходящего скачка, соответствующую „критерию отсоединения“, принято обозначать  $J_R$ , критерию СМК —  $J_0$ .

Важным для практического использования является тот факт, что интенсивность отраженных скачков существенным образом зависит от типа интерференции и интенсивности приходящих скачков. Эта зависимость изучалась [9] Л.Г. Гвоздевой и С.А. Гавренковым (ОИВТ АН). Переход между МО и РО происходит плавно, если он соответствует критерию СМК, или сопровождается скачкообразным изменением УВС, если соответствует критерию отсоединения. Интенсивность скачкообразного изменения интенсивности отраженной ударной волны, а также зависимости  $J_R(M)$  и  $J_0(M)$  приведены в работе [10]. Показано, что область неоднозначности заключена между кривыми  $J_R(M)$  и  $J_0(M)$ , а также существует такое особое число Маха  $M_{0R}$ , при котором  $J_R(M_{0R}) = J_0(M_{0R})$ . Зависимости  $J_R(M)$ ,  $J_0(M)$  и методы их вычисления приведены в работах [8,10].

Если интенсивности встречных приходящих скачков различны, то интенсивности отраженных скачков при РО изменяются прямо пропорционально интенсивностям накрест лежащих приходящих скачков [11]. Ниже, с помощью метода ударных поляр, сформулированного в современном виде В.Н. Усковым [12], с помощью соотношений на косом скачке уплотнения [13] определены границы области неоднозначности решения.

В большинстве работ отражение скачков уплотнения исследуется на плоскости  $\sigma$ – $M$ . Однако на практике скачок задается или интенсивностью  $J$  (часто удобно использовать величину  $\Lambda = \ln J$ ), когда он возникает в результате взаимодействия двух сверхзвуковых потоков, или углом разворота потока на скачке  $\beta$ , когда скачок образуется в



Область неоднозначности на плоскости интенсивность скачка  $\Delta$  — число Маха  $M$  ( $a, b$ ) и на плоскости число Маха  $M$  — угол клина  $\beta$  ( $c, d$ ):  $a, c$  —  $\gamma = 1.4$ ,  $b, d$  —  $\gamma = 1.67$ .

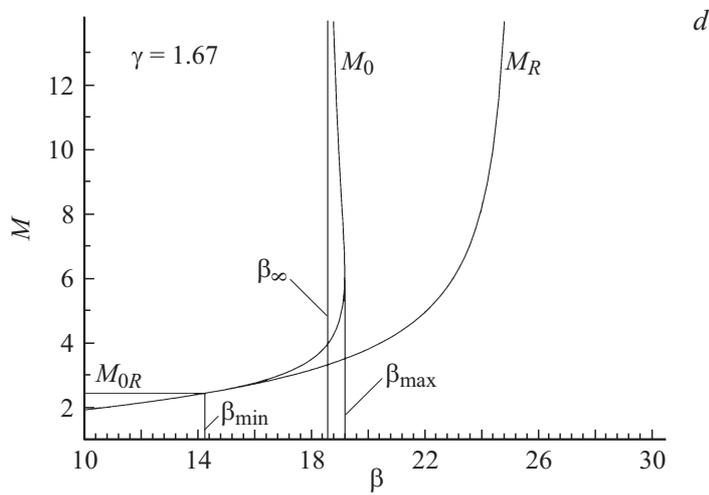
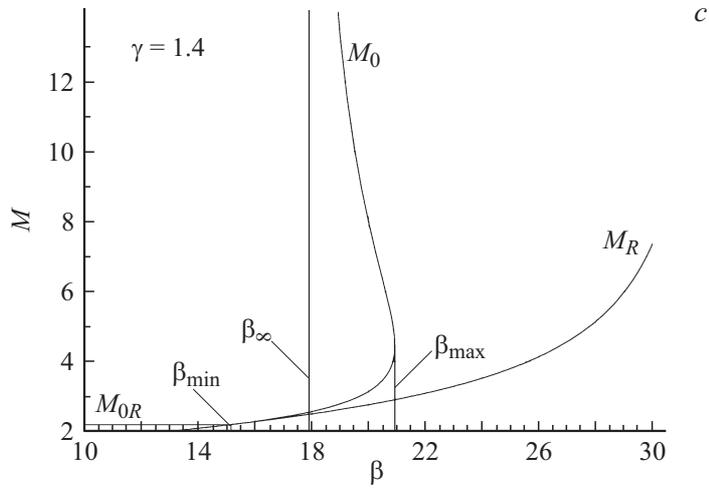


Рисунок (продолжение).

результате натекания сверхзвукового потока на клин. На рисунке, *a* для воздуха (показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ ) приведены зависимости  $J_R(M)$  и  $J_0(M)$ . Выше линии  $J_R(M)$ , соответствующей критерию отсоединения, лежит область, в которой возможно существование только МО, ниже линии  $J_0(M)$  — область РО. Между линиями  $J_R(M)$  и  $J_0(M)$  заключена область неоднозначности, в которой возможно или МО, или РО. С увеличением  $\gamma$  эта область сужается (см. рисунок, *b*), слева она ограничена числом Маха  $M_{0R}$ , при котором  $J_R = J_0$ .

Представляет интерес построить области существования УВС различного типа в координатах  $M$ – $\beta$ , которые являются полностью независимыми переменными.

При заданном числе Маха  $J_R$  определяется из решения следующего уравнения [12]:

$$\sum_{n=0}^3 A_n x_R^n = 0, \quad x_R = (1 + \varepsilon)M^2 / (J_R + \varepsilon), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= -(1 - \varepsilon)^2 L^4, \quad L = (J_R - 1) / (J_R + \varepsilon), \\ A_1 &= 2(1 - \varepsilon)(3 - \varepsilon)L^2 - 4(1 - \varepsilon)(1 - 3\varepsilon)L^3 + (1 - \varepsilon)^4 L^4, \\ A_2 &= 2L^2(1 - 2\varepsilon - \varepsilon^2) - 4L - 1, \quad A_3 = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1)–(2)  $\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ . Соответствующая критерию СМК  $J_0$  задается уравнением [13]

$$\sum_{k=0}^3 A_k J_0^k = 0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A_3 &= 1 - \varepsilon^2, \quad A_2 = -((1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)J_m + 1 + \varepsilon^2), \\ A_1 &= \varepsilon(1 + J_m)[(1 - \varepsilon)J_m - 2], \\ A_0 &= (1 - \varepsilon)J_m(J_m - 1), \quad J_m = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, по формулам (1)–(4) можно на плоскости  $M$ – $\beta$  построить параметрические кривые:  $M_0(\beta)$ , соответствующую критерию

**Таблица 1.** Особые значения, определяющие области неоднозначности

$\gamma$	1.67	1.4	1.25	1.1
$M_{0R}$	2.447	2.203	2.078	1.952
$\beta_{\min}$ , deg	14.5	15.2	15.6	15.7
$\beta_{\max}$ , deg	19.18	20.921	22	23.23
$\beta_{\infty}$ , deg	18.7	17.961	16	13

СМК, и  $M_R(\beta)$ , соответствующую критерию отсоединения (см. рисунок, *c, d*). Видно, что существует предельный минимальный угол клина  $\beta_{\min}$ , при котором линии  $M_0$  и  $M_R$  сливаются. Этой точке соответствует особое число Маха  $M_{0R}$ . Соответственно при  $\beta < \beta_{\min}$  гистерезис существовать не может, ниже линии  $M_{0R}$  лежит область МО, выше — РО. Переход от МО к РО при увеличении числа Маха происходит на линии  $M_{0R}$ .

Также видно, что у линии  $M_0$  имеется и второй предельный угол  $\beta_{\max}$ . Действительно, при углах клина больше  $21^\circ$  (см. рисунок, *c*) существует только две области: МО ниже  $M_R$  и область неоднозначности выше  $M_R$ . Существует также угол  $\beta_{\infty}$ , к которому стремится линия  $M_0$ , при  $M \rightarrow \infty$ . Значения особых чисел Маха  $M_{0R}$  и особых углов  $\beta_{\min}$ ,  $\beta_{\max}$ ,  $\beta_{\infty}$  приведены в табл. 1.

Следует отметить, что диапазон углов  $\beta$ , при которых имеется область неоднозначности УВС при изменении  $M$ , весьма узкий. При фиксированном  $M$  ширина зоны неоднозначности по  $\beta$  расширяется по мере увеличения  $M$ . Это сильнее проявляется при малых  $\gamma$ . Особенно это заметно при  $M > 4$ . Так при  $\gamma = 1.1$  и  $1.25$  линии  $M_0(\beta)$  и  $M_R(\beta)$  расходятся весьма далеко. А вот при  $\gamma = 1.67$  линии почти параллельны и диапазон неоднозначности остается в пределах  $3^\circ$  даже при очень больших числах  $M$  (см. рисунок, *d*).

Известно, что для области неоднозначности характерен гистерезис при изменении как угла клина, так и числа Маха. В этапной работе [1] гистерезис был обнаружен и в численных расчетах, и в экспериментах. Однако моменты перехода  $МО \rightleftharpoons РО$  все же несколько отличались от предсказываемых критериями отсоединения и СМК. Не было определено, сходится ли решение к предсказанному теорией или к какому-то другому. Кроме того, в ряде расчетов при помощи консервативных разностных схем получен парадоксальный результат — переход от

**Таблица 2.** Сходимость численного решения к теоретическому результату

Количество ячеек разностной сетки	Переход РО $\rightarrow$ МО	Переход РО $\leftarrow$ МО
60	$M = 2.6$	$M = 2.7$
240	$M = 2.7$	$M = 2.8$
480	$M = 2.75$	$M = 3.0$
960	$M = 2.8$	$M = 3.15$
Теоретическое значение	$M_R = 2.77$	$M_0 = 3.149$

РО к МО происходил ниже линии, соответствующей критерию фон Неймана. Но в этой области условия динамической совместности, полученные из законов сохранения, запрещают существование РО, а условие консервативности разностной схемы подразумевает строгое выполнение законов сохранения.

В данной работе для исследования гистерезиса был выполнен достаточно тонкий вычислительный эксперимент. Расчеты выполнялись на четырех различных структурированных разностных сетках. Самая грубая сетка имела 60 ячеек поперек течения, остальные — 240, 480 и 960 ячеек. Использовалась модель идеального газа, так как в задачах расчета струйных течений с ударными волнами выбор модели турбулентности может оказать существенное влияние на геометрию УВС [14]. Кроме того, переход РО  $\rightleftharpoons$  МО может сопровождаться быстрой скачкообразной перестройкой УВС, т.е. существенно нестационарным процессом, в моделях же турбулентности используется осреднение турбулентного потока по времени, поэтому их применение в данном случае теоретически не обосновано. Момент перехода к маховскому отражению контролировался визуально по наличию двух тангенциальных разрывов за ножкой Маха (по изолиниям полного давления  $P_0$  и чисел Маха) и дополнительно по изменению кривизны отраженного скачка уплотнения, так как известно [15], что при РО отраженный скачок имеет положительную кривизну, а при МО — отрицательную. В табл. 2 приведены результаты расчетов на четырех различных разностных сетках. По мере увеличения количества узлов разностной сетки моменты перехода МО  $\rightleftharpoons$  РО стремятся к теоретическим значениям. При этом при постоянном угле клина  $\beta$  по

мере увеличения числа Маха переключение от МО к РО происходит в соответствии с критерием СМК, т.е. в области неоднозначности присутствует МО. На обратном ходе при уменьшении числа Маха переключение от РО к МО происходит в соответствии с критерием отсоединения, т.е. в зоне неоднозначности реализуется РО.

Таким образом, теоретические исследования и численные расчеты продемонстрировали, что гистерезис при интерференции встречных скачков имеет место в ограниченной области изменения числа Маха и угла разворота потока на скачке, в которой теория допускает существование как регулярного, так и нерегулярного взаимодействия. В работе определены границы этой области гистерезиса. Показано, что ее размеры существенным образом зависят от показателя адиабаты газа. При постоянном угле клина  $\beta$ , по мере увеличения числа Маха в области неоднозначности реализуется МО, на обратном ходе при уменьшении числа Маха — РО.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение № 14.575.21.0057, уникальный идентификатор прикладных научных исследований RFMEFI 57514X0057).

## Список литературы

- [1] *Ben-Dor G., Ivanov M., Vasilev E.I., Elperin T.* // Progr. Aerospace Sci. 2002. V. 38. P. 347–387.
- [2] *Иванов М.С., Кудрявцев А.Н., Никифоров С.Б., Хотяновский Д.В.* // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 3. С. 73–15.
- [3] *Ivanov M.S., Ben-Dor G., Elperin T., Kudryavtsev A., Khotyanovsky D.* // AIAAJ. S. 2001. V. 39(5). P. 972–974.
- [4] *Ben-Dor G.* Shock Wave Reflection Phenomena. 2nd ed. N.Y.: Springer-Verlag, 2007. 342 p.
- [5] *Von Neumann J.* Oblique reflection of shocks. Explos. Res Rept 12, Navy Dept Bureau of Ordinance. Washington, DC, U.S.A., 1943.
- [6] *Усков В.Н., Булат П.В., Продан Н.В.* // Фундаментальные исследования. 2012. № 9(2). С. 414–420.
- [7] *Усков В.Н., Булат П.В., Продан Н.В.* // Фундаментальные исследования. 2012. № 11. Ч. 1. С. 168–175.
- [8] *Bulat P.V., Uskov V.N.* // Res. J. Appl. Sci., Eng. Tech. 2014. V. 8. N 1. P. 135–142.

- [9] *Gvozdeva L.G., Borsch V.L., Gavrenkov S.A.* // 28th ISSW. V. 2. Ed. K. Kontis. Springer, 2012. P. 587–592.
- [10] *Булат П.В., Упырев В.В., Денисенко П.В.* // Науч.-техн. вестник информ. технологии, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 2. С. 338–345.
- [11] *Булат П.В., Денисенко П.В., Продан Н.В.* // Науч.-техн. вестник информ. технологии, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 2. С. 346–355.
- [12] *Усков В.Н., Адрианов А.Л., Старых А.Л.* Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма, 1995. С. 180.
- [13] *Uskov V.N., Mostovykh P.S.* // Shock Waves. 2010. V. 20. N 2. P. 119–129. <http://link.springer.com/article/10.1007/s00193-009-0243-5>.
- [14] *Bulat P.V., Ilina E.E., Ilina T.E.* // Am. J. Appl. Sci. 2014 V. 11. P. 1914–1920.
- [15] *Uskov V.N., Mostovykh P.S.* // 20th International Shock Interaction Symposium. Stockholm, 2012.