03

Точные решения для формы двумерной проводящей капли, движущейся через диэлектрическую среду под углом к внешнему электрическому полю

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: nick@iep.uran.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2015 г. В окончательной редакции 2 июня 2015 г.)

В двумерной постановке рассмотрены возможные равновесные конфигурации поверхности капли проводящей жидкости, движущейся относительно диэлектрической среды под некоторым углом к внешнему электрическому полю. С помощью метода конформных отображений получено двухпараметрическое семейство точных частных решений этой задачи. Для них характерна значительная деформация поверхности двумерной капли: максимально возможное отношение ее продольного и поперечного размеров составляет 11/2.

Известно, что внешнее однородное электрическое поле растягивает окруженные диэлектрической жидкостью капли проводящей жидкости вдоль силовых линий [1,2]. В ситуации, когда капля движется относительно окружающей среды, на ее поведение также будет влиять динамическое давление обтекающего потока [3–5]. Так, при потенциальном обтекании капли в соответствии с уравнением Бернулли возникает тенденция к ее сплющиванию вдоль потока.

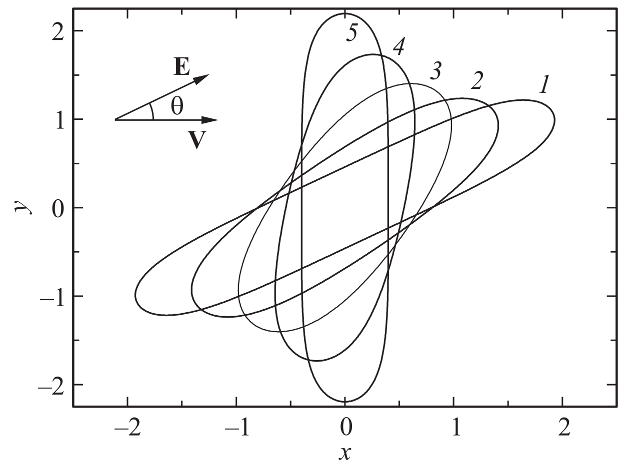
Задача нахождения формы капли чрезвычайно сложна; она требует определения капиллярного, электростатического и динамического давлений на неизвестной поверхности раздела. Анализ существенно упрощается в двумерной постановке, когда применим метод конформных отображений. Он позволяет свести исходную задачу к задаче с известной границей, представляющей собой (в конформных переменных) окружность. Использование подобного подхода ранее позволило найти нетривиальные частные решения для формы движущегося в идеальной жидкости двумерного пузыря [6], формы заряженной цилиндрической струи проводящей жидкости [7], формы незаряженной струи в поперечном внешнем электрическом поле [8], а также для ряда других ситуаций [9–11].

Понятно, что задача о геометрии капли в двухмерной постановке имеет скорее академический, чем практический интерес. Однако нам представляется интересной появляющаяся возможность нахождения точных решений для конфигураций капли, далеко выходящих за рамки применимости традиционно используемой теории возмущений по малому параметру — амплитуде деформации поверхности (см., например, [3,4,12]). Можно ожидать, что основные закономерности поведения капель будут общими для плоско- и осесимметричных случаев. Для того чтобы подчеркнуть особенности рассматриваемой геометрии, мы по аналогии с работами [13–15] будем иногда использовать термин „двумерная капля“.

В настоящей работе будет построено двухпараметрическое семейство точных решений для формы двумерной проводящей капли, движущейся в окружающей ее жидкости под некоторым заданным углом к направлению внешнего электрического поля. Эти решения сводятся к полученным в [6,9] для частных случаев, когда отсутствует либо электростатическое, либо динамическое давление.

Итак, ограничиваясь случаем плоской симметрии задачи (все величины зависят только от пары координат x и y), рассмотрим распределения электрического поля и поля скоростей вокруг капли идеально проводящей жидкости. Удобно перейти в движущуюся вместе с каплей систему координат, в которой она неподвижна и обтекается стационарным потоком набегающей жидкости. Будем считать, что жидкость в капле покоится, и ее можно рассматривать как область постоянного давления. Внешнюю жидкость считаем невязкой и несжимаемой, а ее течение — безвихревым. Положим, что вектор скорости потока $\mathbf{V}$ на бесконечном удалении от капли направлен вдоль оси x прямоугольной системы координат: $\mathbf{V} = \{V, 0\}$, а направление вектора напряженности внешнего однородного электрического поля $\mathbf{E}$ составляет угол θ с осью x: $\mathbf{E} = \{E\cos\theta, E\sin\theta\}$ (см. рисунок). Не теряя общности, можно считать, что $0 \le \theta \le \pi/2$ (это обусловлено инвариантностью задачи относительно замены $\mathbf{V} \to -\mathbf{V}$, либо $\mathbf{E} \to -\mathbf{E}$).

В отсутствие внешнего электрического поля ($E = 0$) и обтекающего потока ($V = 0$) поверхность раздела примет форму окружности некоторого радиуса R_0. Поток, обтекающий двумерную каплю, будет вытягивать ее вдоль направления оси y. С другой стороны, электрическое поле будет вытягивать каплю вдоль силовых линий. Если считать каплю несжимаемой, то ее площадь при деформациях меняться не будет. В ситуации, когда имеют место оба деформирующих поверхность раздела фактора ($E \ne 0$ и $V \ne 0$), решением задачи



Приведены характерные формы двумерной капли при $\theta = \pi/6$. Конфигурация *1* соответствует $\alpha = 1/3$, $\tilde{E} \approx 0.7$, $\tilde{V} = 0$; *2* — $\alpha = 0.26$, $\tilde{E} \approx 0.71$, $\tilde{V} \approx 0.42$; *3* — $\alpha = 0.215$, $\tilde{E} \approx \tilde{V} \approx 0.62$; *4* — $\alpha = 0.26$, $\tilde{E} \approx 0.42$, $\tilde{V} \approx 0.71$; *5* — $\alpha = 1/3$, $\tilde{E} = 0$, $\tilde{V} \approx 0.7$.

может являться некоторая нелинейная суперпозиция двух известных решений, соответствующих ситуациям, когда $E = 0$, $V \neq 0$ [6] и когда $E \neq 0$, $V = 0$ [9].

Распределения потенциала электрического поля φ ($\mathbf{E} = -\{\varphi_x, \varphi_y\}$) и функции тока жидкости Ψ ($\mathbf{V} = \{\Psi_y, \Psi_x\}$) задаются двумерными уравнениями Лапласа:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0.$$

Их следует решать совместно с условиями, что на поверхности раздела $\varphi = 0$ (она эквипотенциальна) и $\Psi = 0$ (при стационарном обтекании граница совпадает с соответствующей линией тока), а на бесконечности

$$\varphi \to -E(x\cos\theta + y\sin\theta), \quad \Psi \to Vy.$$

Равновесная форма границы определяется условием баланса электростатического, динамического и капиллярного давлений:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2_{\varphi=0} + \frac{\rho}{2}\left(\nabla\Psi\right)^2_{\Psi=0} + T\kappa + \Delta P = 0. \qquad (1)$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность внешней жидкости, κ — локальная кривизна поверхности раздела, ε_0 — электрическая постоянная, ε — относительная диэлектрическая проницаемость внешней жидкости. Постоянная ΔP определяется выражением $\Delta P = P_d - P_\infty - \rho V^2/2$, где P_∞ — давление жидкости на бесконечности, а P_d — давление внутри капли.

Для поверхности, задаваемой параметрическими уравнениями $x = X(\tau)$ и $y = Y(\tau)$ с параметром τ, возрастающим в направлении вращения против часовой стрелки (он будет введен ниже), кривизна определяется формулой

$$\kappa = (Y_\tau X_{\tau\tau} - X_\tau Y_{\tau\tau})/\left(X_\tau^2 + Y_\tau^2\right)^{3/2} \qquad (2)$$

Для удобства перейдем к безразмерным переменным

$$x \to xR_0, \quad y \to yR_0, \quad \varphi \to \varphi\sqrt{TR_0/(\varepsilon\varepsilon_0)},$$

$$\Psi \to \Psi\sqrt{TR_0/\rho}, \quad \Delta P \to pT/R_0.$$

При этом вместо напряженности электрического поля E и скорости потока жидкости V мы будем использовать следующие безразмерные выражения:

$$\tilde{E} = E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 R_0/T}, \quad \tilde{V} = V\sqrt{\rho R_0/T}.$$

Введем комплексные потенциалы электрического поля $w = \varphi - i\psi$ и поля скоростей $W = \Phi + i\Psi$, которые являются аналитическими функциями переменной $z = x + iy$ всюду в области вне капли, а на бесконечности ($|z| \to \infty$) удовлетворяют условиям

$$w \to -\tilde{E}z\exp(-i\theta), \quad W \to \tilde{V}z.$$

Функция ψ является гармонически сопряженной к потенциалу электрического поля φ; условие $\psi = \mathrm{const}$ задает силовые линии электрического поля. Функция Φ, гармонически сопряженная с функцией тока Ψ, имеет смысл потенциала скорости.

Далее, осуществим конформное преобразование области вне капли в область вне круга единичного радиуса в комплексной плоскости вспомогательной переменной ξ. Тогда задача нахождения комплексных потенциалов с условиями $\mathrm{Re}\, w = 0$ и $\mathrm{Im}\, W = 0$ на неизвестной поверхности капли сводится к задаче с аналогичными условиями на окружности единичного радиуса $|\xi| = 1$ и со следующими условиями на бесконечности $|\xi| \to \infty$:

$$w \to -\lambda\tilde{E}\xi\exp(-i\theta), \quad W \to \lambda\tilde{V}\xi.$$

Ее решение дается соотношениями

$$w = -\lambda\tilde{E}\left(\xi\exp(-i\theta) - \xi^{-1}\exp(i\theta)\right),$$

$$W = \lambda\tilde{V}(\xi + \xi^{-1}), \qquad (3)$$

где λ — вещественная константа, значение которой определяется из требования, что при деформации площадь капли S при любых $\tilde{E}$ и $\tilde{V}$ не меняется ($S = \pi$). Неизвестной остается отображающая функция $z = z(\xi)$.

Параметризуем окружность $|\xi| = 1$, соответствующую границе капли в новых переменных, как $\xi = \exp(i\tau)$, где вещественный параметр τ меняется в интервале $0 \le \tau \le 2\pi$. Форма поверхности будет задаваться параметрическим выражением $z = Z(\tau) \equiv X(\tau) + iY(\tau)$, а условие баланса давлений (1) с учетом соотношений (2) и (3) перепишется в виде

$$\lambda^2\tilde{E}^2\left(1 + \cos(2\tau - 2\theta)\right) + \lambda^2\tilde{V}^2\left(1 - \cos(2\tau)\right)$$

$$+ \mathrm{Im}\,(Z_\tau\overline{Z}_{\tau\tau})/|Z_\tau| + p|Z_\tau|^2 = 0. \qquad (4)$$

В итоге задача нахождения формы двумерной капли свелась к уравнению (4). Построить его решение в общем случае не удается. Однако для частного случая, когда параметр p равен нулю ($\Delta P = 0$), уравнение (4) существенно упрощается. Приведем пару примеров, для которых это условие реализуется. В случае если обе жидкости покоятся ($V = 0$), величина ΔP будет иметь смысл перепада давлений на поверхности раздела: $\Delta P = P_d - P_\infty$. В отсутствие электрического поля ($E = 0$) условие $\Delta P = 0$ естественным образом выполняется на плоской границе, $\kappa = 0$. Для сферической заряженной капли разность давлений оказывается равной нулю при пороговом для развития ее неустойчивости значении заряда [16].

В ситуации, когда $p = 0$, будем искать частное решение для $Z(\tau)$ в виде

$$Z(\tau) = \lambda\Big(\exp(i\tau) - 2\alpha\exp\big(-i(\tau + 2\beta)\big) - (\alpha^2/3)\exp\big(-i(3\tau + 4\beta)\big)\Big), \qquad (5)$$

где α — вещественный параметр, характеризующий амплитуду деформации поверхности капли (при $\alpha = 0$ поверхность двумерной капли представляет собой окружность). Фаза β определяет направление (угол относительно оси x), в котором вытягивается капля. Этот параметр связан со скоростью потока $\tilde{V}$, напряженностью электрического поля $\tilde{E}$ и углом θ формулой

$$\beta = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\tilde{V}^2 - \tilde{E}^2\cos 2\theta}{\tilde{E}^2\sin 2\theta}\right).$$

Отметим, что в частном случае $\beta = 0$ выражение (5) совпадает с полученными в [6,9] решениями. Формула (5) соответствует следующему отображению:

$$z = \lambda\big(\xi - 2\alpha\xi^{-1}\exp(-2i\beta) - (\alpha^2/3)\xi^{-3}\exp(-4i\beta)\big).$$

Значение параметра λ, входящего в выражение (5), определяется из условия нормировки

$$S = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_0^{2\pi} Z\overline{Z}_\tau\, d\tau = \pi.$$

Находим для него $\lambda(\alpha) = \big(1 - 4\alpha^2 - \alpha^4/3\big)^{-1/2}$.

Подставляя выражение (5) в условие (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему алгебраических уравнений, связывающих параметры задачи. При ее решении удобно в качестве независимых переменных взять параметры α и β, характеризующие степень деформации капли и угол наклона электрического поля. Остальные параметры задачи выражаются через них

$$\tilde{E}^2_{1,2} = \tilde{V}^2_{2,1} = (2\lambda)^{-1}\left(1 - 3\alpha^2 \pm \sqrt{4\alpha^2 - \sin^2\theta\big(1 - 3\alpha^2\big)^2}\Big/\cos\theta\right), \qquad (6)$$

где нижние индексы соответствуют двум различным ветвям решений. Понятно, что, с одной стороны, эти выражения должны быть неотрицательными, а с другой — неотрицательно подкоренное выражение. Эти два условия накладывают следующие (зависящие от угла наклона поля θ) ограничения на возможные значения параметра α:

$$\alpha_c(\theta) \le \alpha \le 1/3,$$

$$\alpha_c(\theta) = (3\sin\theta)^{-1}\Big(-1 + \sqrt{1 + 3\sin^2\theta}\Big).$$

При $\alpha = \alpha_c(\theta)$ конфигурации капли, соответствующие верхним и нижним знакам в выражениях (6), совпадают (для частного случая $\theta = \pi/6$ эта ситуация соответствует кривой *3* на рисунке). При $\alpha > \alpha_c(\theta)$ имеется две ветви решений: $\tilde{E}_1$, $\tilde{V}_1$ (рисунок, кривая *2*) и $\tilde{E}_2$, $\tilde{V}_2$ (рисунок, кривая *4*). Значению $\alpha = 1/3$ соответствуют максимально деформированные конфигурации поверхности капли (кривые *1* и *5* рисунка). Для конфигурации *1* отсутствует поток жидкости ($\tilde{V} = 0$); электрическое поле растягивает каплю вдоль направления вектора напряженности, т. е. под углом θ к оси x. Для конфигурации *5* отсутствует внешнее электрическое поле ($\tilde{E} = 0$); поток, обтекающий каплю в направлении оси x, вытягивает ее вдоль оси y.

Таким образом, в двумерной постановке найдено двухпараметрическое семейство точных решений для равновесных конфигураций капли проводящей жидкости, движущейся с постоянной скоростью относительно диэлектрической среды под углом к приложенному электрическому полю. Полученные решения соответствуют значительным деформациям поверхности двумерной капли: отношение ее продольного и поперечного размеров может достигать значения 11/2.

Работа выполнена в рамках темы государственного задания № 0389-2014-0006 при поддержке РФФИ (проект 16-08-00228), а также Президиума УрО РАН (программа „Квантовая макрофизика и нелинейная динамика“, проект 15-8-2-8).

Список литературы

[1] *O'Konski C.T., Thacher H.C.* // J. Phys. Chem. 1954. Vol. 57. P. 955–958.

[2] *Garton C.G., Krasucki Z.* // Proc. R. Soc. A 1964. Vol. 280. P. 211–226.

[3] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 9. С. 21–28.

[4] *Kim J.G., Im D.J., Jung Y.M., Kang I.S.* // J. Coll. Int. Sci. 2007. Vol. 310. P. 599–606.

[5] *Mahlmann S., Papageorgiou D.T.* // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2009. Vol. 23. P. 375–379.

[6] *McLeod E.B.* // J. Rat. Mech. Anal. 1955. Vol. 4. P. 557–567.

[7] *Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. N 016307.

[8] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 20. С. 14–18.

[9] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 22. С. 79–83.
[10] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 12. С. 132–134.
[11] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В., Иванов П.К.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 20. С. 84–88.
[12] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 5. С. 16–24.
[13] *Buckmaster J.D., Flaherty J.E.* // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 60. P. 625–639.
[14] *Antanovsii L.K.* // Meccanica-J. Ital. Assoc. Theor. Appl. Mech. 1994. Vol. 29. P. 27–42.
[15] *Crowdy D.*// IMA J. Appl. Math. 2008. Vol. 73. P. 740–758.
[16] *Rayleigh, Lord* // Phil. Mag. 1982. Vol. 14. P. 184–186.