12

# Уменьшение эмиттанса пучка в накопителе заряженных частиц с помощью периодических магнитных змеек

© А.В. Богомягков, К.Ю. Карюкина, Е.Б. Левичев

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия e-mail: Keerarara@mail.ru

(Поступило в Редакцию 27 марта 2015 г.)

Периодические магнитные структуры — змейки или вигтлеры (англ. wiggler) давно и успешно используются для управления параметрами пучка в накопителях заряженных частиц, в том числе для уменьшения эмиттанса. В настоящей работе мы оптимизируем оптические функции промежутка накопителя, куда устанавливается змейка, с целью более эффективного уменьшения эмиттанса. Впервые получены оптимальные решения для структур типа FODO и Theoretical Minimum Emittance (ТМЕ). Предложен оригинальный способ подавления вклада полей змейки в радиационное возбуждение фазового объема пучка путем модуляции периода поля вдоль оси змейки.

# Введение

Магнитной многополюсной змейкой (в английской литературе используется термин wiggler) называется последовательность магнитов, создающих знакопеременное поле таким образом, что пучок заряженных частиц, пролетая в нем, периодически отклоняется относительно оси змейки. Ниже мы будем рассматривать только плоские змейки с вертикальным полем, в которых отклонение пучка происходит в горизонтальной плоскости.

Поскольку синхротронное излучение (СИ) из змеек увеличивает потери энергии частиц, сила радиационного трения возрастает, что при определенных условиях, накладываемых на параметры змейки и оптические функции в месте ее размещения, может приводить к уменьшению фазового объема пучка (эмиттанса). Это свойство успешно используется в источниках СИ и накопителях-охладителях для линейных коллайдеров. В качестве первого примера можно привести источник СИ PETRA III (DESY, Гамбург), где двадцать змеек на постоянных магнитах длиной 4 m каждая, разработанных и изготовленных в ИЯФ СО РАН [1], уменьшают горизонтальный эмиттанс в 4 раза до рекордного для такой энергии (6 GeV) значения 1 nm [2]. Другим примером является проект накопителя-охладителя линейного коллайдера CLIC, в котором сверхпроводящие змейки общей длиной 150 m позволили получить расчетный эмиттанс (горизонтальный/вертикальный) 80 рm/0.5 рm [3].

Выражения для вклада змеек в эмиттанс давно известны (см. например, [4]), однако при их выводе предполагалось, что горизонтальная бетатронная функция на длине змейки меняется слабо, и в формулах используется среднее значение этой функции. Между тем точно так же, как оптимизация оптических функций в поворотном магните позволяет минимизировать эмиттанс пучка, оптимизация горизонтальной беты в змейке позволяет более эффективно этот эмиттанс уменьшить. Ниже мы проводим оптимизацию бетатронной функции в змейке

для двух случаев: 1) змейка ставится в промежуток со структурой типа FODO, 2) горизонтальная бета имеет минимум в центре змейки (аналог структуры ТМЕ для поворотного магнитна).

Другой возможностью более эффективной минимизации эмиттанса змейками, рассматриваемой в настоящей работе, является модуляция периода магнитного поля вдоль оси змейки. Такая модуляция позволяет компенсировать неизбежный рост горизонтальной бета-функции вдоль оси вигглера, которая в пренебрежении фокусировкой змейки изменяется квадратично с продольной координатой и ограничивает возможность змейки для уменьшения эмиттанса.

### 1. Влияние змейки на эмиттанс

Пользуясь формализмом структурных (радиационных) интегралов, введенных в [5], эмиттанс релятивистского пучка электронов, определяемый синхротронным излучением, можно записать как

$$\varepsilon_x = C_q \frac{\gamma^2}{J_x} \frac{I_5}{I_2} = C_q \frac{\gamma^2}{J_x} \frac{\oint H(z)/|\rho|^3 dz}{\oint 1/\rho^2 dz}, \tag{1}$$

где  $C_q=3.84\cdot 10^{-13}\,\mathrm{m},\ \gamma$  — релятивистский фактор, интегралы берутся по замкнутой орбите, лежащей в горизонтальной плоскости,  $J_x$  — безразмерный декремент затухания горизонтальных бетатронных колебаний (далее считается  $J_x=1$ ),  $\rho$  — радиус кривизны орбиты, а функция H(z) определяется поведением оптических  $(\alpha_x,\,\beta_x,\,\gamma_x$  — параметры Куранта—Снайдера) и дисперсионной  $\eta_x$  функциями в поворотных магнитах

$$H = \gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta_x' + \beta_x \eta_x'^2, \tag{2}$$

где штрих обозначает производную по продольной координате. Интегрировать в (1) можно отдельно по магнитам кольца, отдельно по змейкам:  $I_n = I_{n0} + I_{nw}$ .

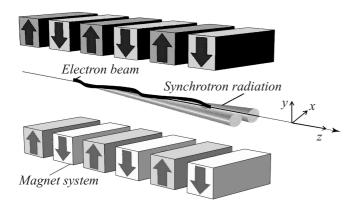


Рис. 1. Планарный вигглер, орбита пучка и система координат.

Тогда относительный вклад змеек в полный эмиттанс запишется как

$$r_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} = \frac{1 + I_{5w}/I_{50}}{1 + I_{2w}/I_{20}}.$$
 (3)

Как будет показано ниже, для эффективного уменьшения эмиттанса нужны змейки с большой амплитудой поля и малым периодом. Кроме того, будем считать, что в поперечном направлении полюса вигтлера широкие, так что зависимостью поля от x можно пренебречь. Для таких устройств вертикальное поле вдоль оси змейки может быть записано в виде [6]

$$B_{v} = B_{w} \cosh(ky) \cos(kz), \tag{4}$$

где y — вертикальная координата, z — расстояние вдоль оси,  $B_w$  — амплитуда магнитного поля,  $k=2\pi/\lambda_w$ ,  $\lambda_w$  — длина периода змейки. На рис. 1 схематично показаны рассматриваемый многополюсной планарный вигглер и соответствующая система координат.

Далее мы пренебрегаем конкретным устройством крайних полюсов змейки, считая, что их вклад мал, и рассматриваем только периодическую часть. В этом случае дисперсионная функция и ее производная, генерируемая периодическим полем змейки, меняются как [7]:

$$\eta_w(z) = \frac{1 - \cos(kz)}{k^2 \rho_w} = \eta_{w0} - \frac{\theta_w \cos(kz)}{k},$$

$$\eta_w'(z) = \frac{\sin(kz)}{k \rho_w} = \theta_w \sin(kz),$$
(5)

где  $\rho_w^{-1} = h_w = B_w/B\rho$  — максимальная кривизна поля змейки,  $B\rho$  — жесткость магнитной структуры, пропорциональная энергии пучка,  $\theta_w = h_w \lambda_w/2\pi$  — максимальный угол отклонения пучка от оси змейки.

В слагаемое  $\eta_{w0}$  в (5) могут быть включены как собственная постоянная часть дисперсионной функции вигтлера, так и среднее значение остаточной дисперсии в прямолинейном промежутке кольца.

Подставим в (2) среднее по длине змейки значение бета-функции  $\beta_x(z) = \bar{\beta}_x$ . Тогда для синусоидальной модели змейки можно найти следующие значения радиационных интегралов:

$$I_{5w} \approx \frac{8}{15} N_w \theta_w h_w^2 \left( \frac{5\eta_{w0}^2}{\bar{\beta}_x} + \bar{\beta}_x \theta_w^2 \right),$$

$$I_{2w} = \frac{L_w h_w^2}{2},$$
(6)

где  $N_w$  и  $L_w=N_w\lambda_w$  — число периодов и полная длина змейки. В  $I_{5w}$  приводятся основные по углу  $(\theta_w\ll 1)$  члены. Значение пятого интеграла в (6) достигает минимума при  $\eta_{w0}=0$ , однако, поскольку точно занулить дисперсионную функцию в прямоугольном промежутке невозможно, следует поставить практическое ограничение, при котором влияние дисперсии на результирующий эмиттанс мало:

$$\eta_{w0} \ll \bar{\beta}_x \theta_w / \sqrt{5}.$$
(7)

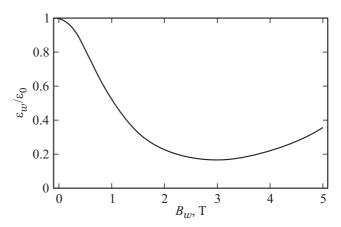
С этим условием пятый радиационный интеграл вигглера записывается следующим образом:

$$I_{5w} \approx \frac{8}{15} N_w \theta_w^3 h_w^2 \bar{\beta}_x = \frac{1}{15\pi^3} \lambda_w^3 h_w^5 L_w \bar{\beta}_x.$$
 (8)

Подставляя  $I_{5w}$  и  $I_{2w}$  в (3) получаем

$$r_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{x0}} \approx \frac{1 + h_w^5 N_w \lambda_w^3 \bar{\beta}_x / (15\pi^3 I_{50})}{1 + h_w^2 N_w \lambda_w / (2I_{20})}.$$
 (9)

Это выражение хорошо известно, см., например, [8]. На рис. 2 показано типичное поведение функции  $r_{\varepsilon}$  (9) в зависимости от амплитуды поля вигтлера  $B_w \propto h_w$ . При фиксированном периоде поля  $r_{\varepsilon}(B_w)$  имеет характерный минимум для некоторого  $B_{w \, \text{min}}$ . При увеличении амплитуды поля эмиттанс начинает быстро расти. Значение  $h_{w \, \text{min}}$  можно найти в предположении, что радиационное затухание в основном определяется змейками:



**Рис. 2.** Относительное изменение эмиттанса пучка из-за влияния вигглера.

 $I_{2w} \gg I_{20}$  (так называемый wiggler dominated mode), когда можно пренебречь единицей в знаменателе (9)

$$h_{w \, \text{min}} = \left(\frac{10\pi^3 I_{50}}{\lambda_w^2 L_w \bar{\beta}_x}\right)^{1/5} \approx \pi \left(\frac{I_{50}}{\lambda_w^2 L_w \bar{\beta}_x}\right)^{1/5}.$$
 (10)

При этом минимальный эмиттанс зависит только от одного параметра змейки — периода  $\lambda_w$ :

$$r_{\varepsilon \, \text{min}} \approx \frac{8}{3} \frac{I_{20}}{\pi^2 L_w^{3/5}} \left(\frac{\bar{\beta}_x \lambda_w^2}{I_{50}}\right)^{2/5}.$$
 (11)

Из (9) следует, что для эффективного уменьшения эмиттанса змейка должна существенно увеличивать затухание (интеграл  $I_{2w}$ ). При фиксированной полной длине змеек  $N_w\lambda_w$ , заданной габаритами установки, увеличить  $I_{2w}$  можно, только увеличивая амплитуду магнитного поля  $h_w$ . С другой стороны, должно быть  $I_{5w} < I_{50}$ , для чего, как можно видеть из числителя (9), нужно иметь достаточно малый период поля змейки  $\lambda_w$ . Эти два требования противоречивы, поскольку для периодического магната амплитуда и период поля связаны соотношением (формула Хальбаха [9])

$$B_w \propto \exp(-\pi g/\lambda_w),$$
 (12)

где д — межполюсный зазор в магните.

В программах, моделирующих движение частиц в циклическом ускорителе, магниты, как правило, задаются в кусочно-постоянном (piecewise) виде. Для справки приведем второй и пятый интегралы в случае, когда магнитны змейки задаются в моделирующей программе именно кусочно-постоянной функцией

$$I_{2w}^{pw} = L_w h_w^2, \quad I_{5w}^{pw} \approx \frac{1}{48} \lambda_w^2 h_w^5 L_w \bar{\beta}_x.$$
 (13)

Второй радиационный интеграл в кусочно-постоянном приближении в два раза больше, чем для синусоидальной модели поля вигглера, но и пятый интеграл в  $15\pi^3/48\approx 10$  раз больше, и это необходимо учитывать при учете влияния змейки на радиационные параметры пучка.

# 2. Оптимизация структурных функций накопителя

Поскольку интеграл  $I_{5w}$  (6) зависит от среднего значения горизонтальной бетатронной функции в промежутке змейки, поведение горизонтальной беты можно оптимизировать так, чтобы среднее значение на длине змейки было минимальным. Это должно упростить требования на получение малого  $I_{5w}$ .

Такая процедура аналогична оптимизации оптических функций в поворотных магнитах источника СИ (оптимизация поведения H(z), выражение (2)) с целью получения малого эмиттанса. Мы проведем такую оптимизацию для двух распространенных случаев размещения вигглеров:

• Ячейка для постановки змейки имеет простейшую структуру типа FODO.

• Поведение оптических функций зеркально симметрично относительно середины змейки (для поворотного магнита такую структуру принято называть ТМЕ — Theoretical Minimum Emittance).

#### 2.1. Ячейка FODO

Рассмотрим ячейку, имеющую структуру FODO; змейка ставится между двумя — фокусирующей и дефокусирующей — линзами. Такая ячейка наиболее компактна и, если общая длина змеек исчисляется десятками или сотнями метров, использование структуры FODO может быть существенным для уменьшения размеров всей установки. На рис. 3 показана ячейка FODO, вмещающая две змейки.

Для оценки мы предполагаем, что квадрупольные линзы, точеные с одинаковой по модулю интегральной силой, а весь промежуток между ними занят вигтлером так, что длина ячейки FODO  $L_c \approx 2L_w$ . Тогда поведение структурных функций в прямолинейном промежутке (фокусировкой змейки пренебрегаем) имеет вид [10]

$$\beta_{x}(z) = \beta_{x} - 2\sec\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right)\right) z + 2\tan\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right) \frac{z^{2}}{L_{w}},$$

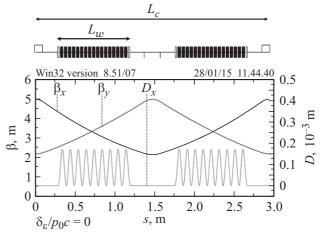
$$\alpha_{x}(z) = \sec\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right)\right) - 2\tan\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right) \frac{z}{L_{w}},$$

$$\gamma_{z}(z) = \frac{1}{L_{w}} \tan\left(\frac{\mu_{x}}{2}\right).$$
(15)

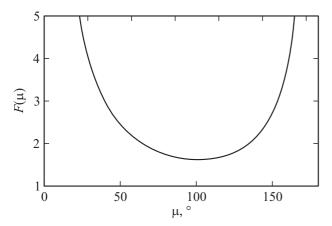
Здесь  $\mu_x$  — набег бетатронной фазы на всю ячейку, а  $\beta_x$  — максимальное значение функции в фокусирующей квадрупольной линзе

$$\beta_x = 2L_w \cos \mu_x \left( 1 + \sin \left( \frac{\mu_x}{2} \right) \right). \tag{16}$$

Подставляя выражения (14) и (5) в (2), после несложных вычислений получаем выражение для пятого инте-



**Рис. 3.** Ячейка для постановки змейки имеет структуру FODO. Показаны бетатронные функции и дисперсионная функция, генерируемая змейкой (извилистая линия).



**Рис. 4.** Зависимость  $F(\mu_x)$  из (17) от набега бетатронной фазы на ячейке FODO.

грала змейки, размещенной в FODO (оставлены основные значащие члены),

$$I_{5w}^{(\text{FODO})} \approx \frac{8}{15} N_w \theta_w^3 h_w^2 L_w F(\mu_x), \tag{17}$$

где функция  $F(\mu_x)$  описывает зависимость пятого интеграла от фокусировки ячейки

$$F(\mu_x) = \frac{2}{3}\csc\mu_x \left(2 + \cos^2\left(\frac{\mu_x}{2}\right)\right). \tag{18}$$

Минимум этой функции достигается при  $\sin(\mu_x/2) = \sqrt{3/5}$ ;  $\mu_{x\, \rm min} \approx 101.5^\circ$  и  $F_{\rm min} = 4/\sqrt{6} \approx 1.63$  (рис. 4). Подстановка полученного значения  $\mu_x$  в (16) позволяет найти максимальное значение горизонтальной беты в F-линзе и (с помощью (14)) среднее значение бета-функции на длине линзы, которое входит в (6) и (9):

$$\beta_x = \frac{5}{\sqrt{6}} \left( 1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) L_w \approx 3.62 L_w,$$

$$\bar{\beta}_x = 2\sqrt{\frac{2}{3}} L_w \approx 1.63 L_w. \tag{19}$$

Эти выражения означают, что для наиболее эффективного подавления вклада поля вигглера в радиационное возбуждение эмиттанса вигглер длиной  $L_w$  и соответствующая ячейка FODO должны быть согласованы в соответствии с (19). Тогда пятый интеграл достигает минимума

$$I_{5w \min}^{(\text{FODO})} = \frac{16\sqrt{2}}{15\sqrt{3}} N_w h_w^2 \theta_w^3 L_w.$$
 (20)

Интересно отметить, что полученная зависимость пятого интеграла, создаваемого вигглером, похожа на зависимость пятого интеграла, создаваемого поворотным магнитом в ячейке FODO. Однако в последнем случае минимум достигается при  $\mu_{x \min} \approx 137^{\circ}$  (задача о минимизации натурального эмиттанса в структуре FODO, например [11]).

# 2.2. Симметричная ячейка типа ТМЕ

Известно, что структура FODO не является оптимальной для минимизации эмиттанса в источниках СИ. Минимальный эмиттанс получается в структуре типа ТМЕ (Theoretical Minimum Emittance), в которой оптические функции зеркально симметричны относительно центра магнита, а  $\beta_x(z)$  и  $\eta_x(z)$  в этой точке имеют минимум. Попробуем использовать такую структуру для размещения вигглера-затухателя (рис. 5).

Пусть в центральной точке змейки  $\beta_x(L_w/2)=\beta_{x0}$ ,  $\alpha_x(L_x/2)=0$ . Тогда поведение функций Твисса по направлению к краю вигглера характеризуется ростом в соответствии с

$$\beta_x(z) = \beta_{x0} + z^2/\beta_{x0}, \quad \alpha_x(z) = -z/2\beta_{x0},$$

$$\gamma_x(z) = \gamma_{x0} = \beta_{x0}^{-1}, \quad (21)$$

а выражение (6) после соответствующего интегрирования запишется (в главном порядке по  $\theta_w$ ) как

$$I_{5w}^{(\text{TME})} \approx \frac{8}{15} N_w \theta_w^3 h_w^2 \left( \beta_{x0} + \frac{L_w^2}{12\beta_{x0}} \right).$$
 (22)

Минимизация этого выражения позволяет найти, что

$$I_{5w\, {
m min}}^{({
m TME})} pprox rac{8}{15}\, N_w heta_w^3 h_w^2 rac{L_w}{\sqrt{3}}$$
 при  $eta_{x0\, {
m min}} = rac{L_w}{2\sqrt{3}}.$  (23)

Сравнивая последнее выражение с таким же для FODO структуры (20)

$$I_{5w \, \text{min}} \approx N_w \theta_w^3 h_w^2 L_w \begin{cases} \frac{8}{15} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, & \text{FODO,} \\ \frac{8}{15} \frac{1}{\sqrt{3}}, & \text{TME,} \end{cases}$$
 (24)

можно видеть, что в структуре типа ТМЕ при одинаковой длине вигтлера можно получить минимальный пятый интеграл в  $2\sqrt{2}$  раз меньше. Однако следует помнить, что в случае FODO число квадрупольных линз в ячейке меньше, чем в ТМЕ, т.е. в последнем случае расстояния между змейками оказываются длиннее, а следовательно, их "погонная плотность" меньше.

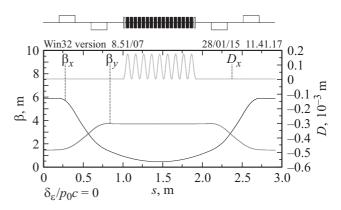


Рис. 5. Вигглер установлен в ячейку ТМЕ.

# 3. Модуляция периода змейки

Пятый радиационный интеграл, взятый по длине вигглера, имеет, согласно (1), вид

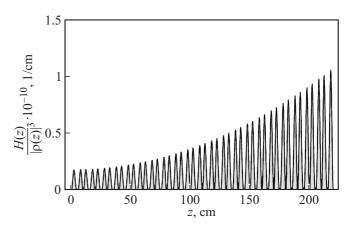
$$I_{5w} = \int_{0}^{L_w} H(z)|h(z)|^3 dz.$$
 (25)

Можно показать, что для змейки максимальный вклад в функцию H(z) дает член  $H(z) \approx \beta_x(z) \eta_z'^2(z)$ , тогда (взяв для простоты и наглядности случай размещения змейки в ячейке типа TME)

$$I_{5w} \approx 2 \int_{0}^{L_{w}/2} \left(\beta_{x0} + \frac{z^{2}}{\beta_{x0}}\right) \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{w}}z\right)\right|^{5} h_{w}^{5} \frac{\lambda_{w}^{4}}{(2\pi)^{4}} dz.$$

Функцию под интегралом  $I_{5w}$  в выражении (25) можно разделить на две части — периодическую по z, связанную с полем змейки, и растущую как  $\propto z^2$ , связанную с бетатронной функцией. Подынтегральная функция (26) имеет характерный вид, показанный на рис. 6. Использовались следующие параметры вигглера: длина  $L_w = 2.2 \,\mathrm{m}$ , период  $\lambda_{w0} = 0.2 \,\mathrm{m}$ , число периодов  $N_{w0} = 11$ , радиус поворота, соответствующий пиковому полю  $ho_w = 4 \, \mathrm{m}$ , минимальная бета-функция в центре вигглера  $\beta_{x0 \, \text{min}} = 1 \, \text{m}$  (в соответствии с (23)). Если какой-нибудь параметр поля змейки, входящий в интеграл, уменьшать с увеличеним z так, чтобы купировать рост  $\beta_x(z)$ , это позволило бы дополнительно уменьшить  $I_{5w}$ . Мы предлагаем выбрать в качестве такого параметра период магнитного поля, введя некоторую его зависимость вдоль оси вигглера  $\lambda_w = \lambda_w(z)$ , как это показано на рис. 7. Предлагаемый способ аналогичен идее А. Рюлиха (A. Wrulich), которую он высказал в 1992 г. Согласно этой идее, рост функции H(z) в поворотном магните можно компенсировать спадом магнитного поля; позднее такие магниты стали называться "магнитами с продольным градиентом поля". В нашем случае уменьшить амплитуду поля нежелательно, поскольку при этом будет уменьшаться второй интеграл  $I_{2w}$  в знаменателе выражения для эмиттанса (1). Тогда, несмотря на уменьшение  $I_{5w}$ , эмиттанс может возрасти. А так как  $I_{2w}$  не зависит от периода змейки, то период можно уменьшать, по крайней мере, до таких значений, которые не сказываются существенно на амплитуду поля в зазоре периодического магнита.

Поскольку для многослойной змейки  $\lambda_w \ll L_w$ , а, как мы видели выше, характерная величина бетатронной функции  $\beta_x \sim L_w$ , очевидно, что изменение беты на длине периода мало, и можно воспользоваться ее средним значением для периода n:  $\bar{\beta}_{xn}$ . С увеличением номера периода от центра змейки (где бетатронная функция минимальна) величина  $\bar{\beta}_{xn}$  растет и, чтобы скомпенсировать этот рост, причем, что  $\lambda_n = \lambda_{n-1} - \Delta \lambda_n$  и  $|\Delta \lambda_n / \lambda_{n-1}| \ll 1$ . Задачу поставим следующим образом:



**Рис. 6.** График подынтегральной функции (26). Показана половина змейки, размещенной в ячейке типа ТМЕ; начало координт соответствует центру змейки.

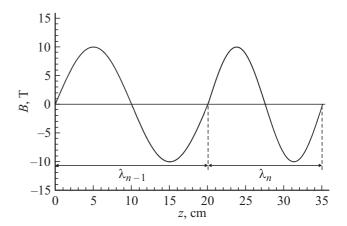


Рис. 7. Иллюстрация уменьшения периода змейки.

найти изменение периода  $\Delta \lambda_n$ , чтобы  $I_{5w,n-1} = I_{5w,n}$ , где интегралы берутся по периоду с соответствующим номеро (рис. 7). Тогда из (8) следует

$$\lambda_{w,n-1}^{3}\bar{\beta}_{x,n-1} = \lambda_{w,n}^{3}\bar{\beta}_{x,n}.$$
 (27)

Зная начальные значения бета-функции  $(\beta_{x,n-1}(0), \alpha_{x,n-1}(0))$  на входе в период с номером n-1, можно найти таковые на входе периода с номером n

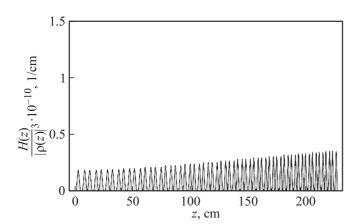
$$\beta_{x,n}(0) = \beta_{x,n-1}(0) - 2\alpha_{x,n-1}(0)\lambda_{n-1} + \gamma_{x,n-1}(0)\lambda_{n-1}^2,$$
(28)

$$\alpha_{x,n}(0) = \alpha_{x,n-1}(0) + \gamma_{x,n-1}(0)\lambda_{n-1}$$
 (29)

и, рассчитав средние значения в (27), получить следующее выражение в первом порядке по  $|\Delta \lambda_n/\lambda_{n-1}| \ll 1$ :

$$\lambda_n \approx \lambda_{n-1} \left[ 1 - \frac{-6\alpha_{x,n-1}d_{n-1} + (1 + \alpha_{x,n-1}^2)d_{n-1}^2}{9 - 30\alpha_{x,n-1}d_{n-1} + 26(1 + \alpha_{x,n-1}^2)d_{n-1}^2} \right],$$
(30)

где  $d_{n-1}=\lambda_{n-1}/\beta_{x,n-1}(0)$ . Если при этом учесть, что  $\beta_{x,n-1}(0)\sim L_w$  и, следовательно, для многополюсной



**Рис. 8.** График подынтегральной функции (26) с учетом уменьшения длины периода змейки в соответствии с (30).

змейки  $d_{n-1} \ll 1$ , выражение (30) можно упростить до

$$\lambda_n \approx \lambda_{n-1} \left[ 1 + \frac{2\alpha_{x,n-1}d_{n-1}}{3 - 10\alpha_{x,n-1}d_{n-1}} \right].$$
 (31)

Полученные формулы были применены к примеру вигглера, приведенному выше  $(L_w=2.27\,\mathrm{m},\ \lambda_{w0}=0.2\,\mathrm{m},\ N_{w0}=14,\ \rho_w=4\,\mathrm{m}).$  С уменьшением периода подынтегральная функция, показанная на рис. 6, меняется на ту, которая приведена на рис. 8: квадратичный рост огибающей скомпенсирован. Небольшой подъем подынтегральной функции на рис. 8 к концу змейки объясняется тем, что формулы (30) и (31) всетаки приближенные.

Интегрирование функции, приведенной на рис. 8, уменьшает  $I_{5w}$  по сравнению с постоянным периодом (рис. 6) в 3.5 раза.

#### Заключение

Для эффективного уменьшения эмиттанса электронного пучка в накопительных кольцах с помощью сильнополевых многополюсных магнитных змеек проведена оптимизация оптических функций промежутка, предназначенного для постановки змейки. Получены выражения, позволяющие согласовать змейку с оптикой такого промежутка. Предложен метод дополнительного уменьшения пятого радиационного интеграла, ответственного за увеличение поперечного фазового объема пучка, путем вариации длины периода поля змейки.

Исследование выполнено за счет гранта Российского начного фонда (проект N 14-50-00080).

# Список литературы

- [1] PETRA III Technical Design Report. 2004.
- [2] *Tischer M.* et al. Damping Wigglers for the ETRA-III Light Source, Proc. of PAC'05, Knoxville. 2005. P. 2446–2448.

- [3] Levitchev E. et al. Minimizing emittance for the CLIC damping ring, Proc. of EPAC 2006, Edinburgh. P. 870–872.
- [4] Wiedemann H. Handbool of Accelerator Physics and Engineering. Section 3.1.4.5 / Ed. by A. Chao, M. Tigner. World Scientific, 1999.
- [5] Helm R.H., Lee M.J., Morton P.L., Sands M. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1973. Vol. 20. P. 900.
- [6] Halbach K. Transverse wiggler magnet design consideration. SSRP Report N 77/05, May 1977.
- [7] Smith L. LBL-ESG Tech. Note-24. 1986.
- [8] Chao A., Tigner M. Handbook of Accelerator Physics and Engineering, World Scientific, 1999. P. 188.
- [9] Halbach K. // J. de Physique. Vol. 44. Colloque C1. Supplement to #2. 1983. C1.
- [10] Keil E. CERN 77-13. 1977. P. 22.
- [11] *Helm R., Wiedemann H.* Technical Report PEP-Note 303. SLAC. Stanford. CA, 1979.